

В. И. Носков

О ГЕОМЕТРИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ (МОДЕЛЬ ВЛОЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ)



МОНОГРАФИЯ

В. И. Носков

О ГЕОМЕТРИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ (МОДЕЛЬ ВЛОЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ)

Монография

Новокузнецк
Знание-М
2025

УДК 514.756.28;531.51;537.8(035.3)
ББК 22.322
Н84

Автор:

Носков В. И. - Институт механики сплошных сред,
Уральское отделение Российской Академии Наук, Россия, Пермь,
e-mail: nskv@icmm.ru, vitivnos@gmail.com

Рецензенты:

Панов В. Ф. – доктор физико-математических наук,
профессор Физико-математического института ПГНИУ;
Райхер Ю. Л. – доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник лаборатории Динамики дисперсных систем
ИМСС УрО РАН.

Носков, Виталий Иванович.

Н84 О геометризации классических полей (Модель Вложенных Пространств) : [Электронный ресурс] : монография / В. И. Носков. – Текстовое (символьное) электронное издание. – Новокузнецк : Издательство «Знание-М», 2025. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Сист. требования: IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; CD/DVD-ROM дисковод, мышь ; Adobe Reader 8.0 и выше. – 48 с.

ISBN 978-5-00255-452-2

Представлена геометризация классических гравитации и электричества в релятивистском пространстве Финслера Модели Вложенных Пространств (МВП). Модель оснащена риман-подобной геометрией, локально зависящей от механического состояния материи: кручение и неметричность отсутствуют. Связность геометрии обусловлена классическим гравитационным и электромагнитным полями. В случае Вейль-инвариантной МВП полевые уравнения дают естественную интерпретацию тёмных материи и энергии. Описан также гравитационно-электрический redshift в МВП.

Изложение рассчитано на студентов старших курсов физических факультетов университетов, аспирантов, а также на инженеров-физиков, знакомых с теорией поля и римановой геометрией.

The geometrization of classical gravity and electricity in the relativistic Finsler space of the Embedded Space Model (MES) is described. The model is equipped with a Riemann-like geometry that locally depends on the mechanical state of matter: torsion and nonmetricity are absent. The connectedness of geometry is determined by the classical gravitational and electromagnetic fields. In the case of a Weyl-invariant MES, the eld equations provide a natural interpretation of dark matter and energy. A gravitational- electric redshift in the MES is also described.

The presentation is intended for undergraduates of university physics departments, graduate students and physics engineers familiar with eld theory and Riemannian geometry.

Keywords: geometrization, electricity, gravity, Model of Embedded Spaces

УДК 514.756.28;531.51;537.8(035.3)
ББК 22.322

ISBN 978-5-00255-452-2

© Носков В. И., 2025
© ИМСС УрО РАН, 2025
© Знание-М, 2025

Оглавление

Предисловие	4
1 Модель и основы геометрии	8
1.1 <i>Вложение</i> в приближении пробной частицы	8
1.1.1 Геодезическая	10
1.1.2 Ковариантная производная	12
1.1.3 Преобразования координатные и состояния	15
1.1.4 Кривизны <i>Вложения</i>	19
2 Геометризация полей	23
2.1 Лагранжево действие системы	23
2.2 Уравнения полей	25
2.2.1 Уравнение электричества	25
2.2.2 Уравнение гравитации	26
3 Некоторые следствия геометризации	29
3.1 Конформная метрика Вейля	29
3.1.1 Источники гравитации <i>Вложения</i> Вейля	31
3.1.2 Электричество и гравитация: взаимные калибровки	33
3.2 Электромагнитный redshift	35
4 Заключение	36
4.1 Сделанное	36
4.2 Предстоящее	37
А Финслерова геометрия и релятивизм	39
A.1 Параметризация: два типа геометрий	39
A.2 О геометрии Г. Ю. Богословского	43
Литература	45

Предисловие

Необходимость исследования геометрического аспекта физических явлений была отчётливо осознана ещё задолго до Декарта, а с изобретением системы координат прогресс в этой области существенно ускорился. Замечательным примером демонстрации роли геометрии в физике явилась знаменитая теорема (1918) Э. Нётер о геометро-симметричном смысле физических законов сохранения. Но настоящим прорывом в изучении физической роли геометрии пространства явились классические работы А. Эйнштейна и большой группы его последователей в первой половине 20-го века, посвящённые созданию Специальной и Общей теории относительности [1, 2]. Идеальная простота и результативность этих работ вызвали взрыв интереса не только к геометризации гравитации и электромагнетизма, но и к геометризации физики вообще. Физическими стандартами стали релятивистское псевдогалилеево [3], а позднее и псевдориманово 4-мерие [4, 5]. Возникло убеждение, что перспективы развития физики в этом направлении весьма многообещающи и именно ему и нужно следовать. В частности, кроме выяснения универсальных свойств физического пространства замаячила возможность объединения классических полей и материи на единой геометрической основе. При этом вариантов в выборе такой основы, казалось, было множество: от различных частных (обычно *конфигурационных*) случаев римановой геометрии (конформность, многомерие, кручение, неметричность и т. д.) до анизотропного её обобщения – геометрии Финслера, изобретённой в 1918 году и интенсивно разрабатывавшейся вплоть до середины XX столетия [6].

Однако время распорядилось иначе. Открытие и бурное развитие квантовой механики, наблюдение неизвестных ранее сильного и слабого взаимодействий, интерпретация "старой" физики как классического предела квантовой, привело к смещению исследовательских приоритетов. Но работы по геометризации физики, хоть и не с прежней интенсивностью, всё же продолжались, базируясь в основном на римановой (постепенно становилось ясно – лишь частично подходящей) геометрии:

"ранние" [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] и более "поздние" [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. Появились также работы, использовавшие очень многообещающую финслерову [6] анизотропную модель пространства, например [25]. Но общепризнанный успех в теории так и не был достигнут, хотя предварительный и весьма важный шаг в использовании картановско-финслеровой геометрической идеи всё же был сделан: работы Г.Ю. Богословского и соавторов [26, 27, 28]. Изученная в них релятивистская метрика, выходя за рамки стандартной финслеровой геометрии (см. напр. Приложение А2, с. 42), даёт необходимый анизотропный базис для *релятивистской* геометрии Финслера, подобный метрике Минковского для псевдоримановой геометрии ОТО.

На этом фоне весьма заметны и работы группы авторов во главе с Владимировым Ю.С. [29, 30, 31], также относящиеся к геометризации физики, но в *парадигме прямого межчастичного взаимодействия*, поэтому к дальнейшему изложению имеющие лишь косвенное отношение.

Насущные физические проблемы последнего времени, такие как квантование гравитации, описание эволюции наблюдаемой Вселенной, прогресс в запредельно сложной теории струн и т. д., связанные с геометрией пространства-времени практически на всех масштабах, постоянно заставляют возвращаться к вопросу об устройстве последнего. Примером может служить кризис космологической модели, начавшийся с осмысления астрономических наблюдений Ф. Цвикки 1937 года [32] (гипотеза скрытой массы Вселенной) и недавних открытий [33, 34] (ускоренное расширение Вселенной). Кризис, породив лавину работ по "тёмным" материи и энергии Вселенной [35, 36, 37]..., наталкивает на мысль, что электронейтральная модель пространства ОТО неполна, по крайней мере, на космологических масштабах [38]. При этом кажется очевидным, что включение электромагнетизма в геометрию *Стандартной Модели*, может существенно изменить как ее эволюционное поведение, так и привести к появлению свойств, радикально отличающихся от стандартных. Например, обусловленных ненулевым *реликтовым* электрическим зарядом Вселенной.

Перечисленного вполне достаточно, чтобы вернуться к "вечной" задаче геометризации классического электричества. При этом кажется естественным, что корректное решение последней следует искать в рамках иной, не эйнштейн-римановой, очевидно – *неконфигурационной* – модели пространства-времени. В частности, уравнение геодезической искомой модели должно, кроме обычного гравитационного, содержать ещё и лоренцев терм, зависящий от *собственных* характеристик материи: заряд, масса, скорость, Поскольку лоренцев терм старой, контину-

альной модели имеет явный *конфигурационный* смысл, то новая модель пространства-времени должна естественным образом снять это конфигурационное *противоречие*. Кроме того, она должна "работать" для классических полей и материи на масштабах от *молярных до космологических* – по меньшей мере. Очевидно пространство-время новой модели должно быть гладким и 4-мерным (иметь в каждой точке касательное пространство Минковского [3]) в силу экспериментальной ненаблюдаемости старших измерений. Очевидно также, что новая модель должна быть *метрической* на указанных масштабах. (Данное ограничение менее экспериментально достоверно нежели предыдущее, особенно на масштабах типа планковских, однако успех ОТО в описании гравитации представляется серьезным аргументом в пользу его справедливости.) И наконец, в пределе только гравитационного взаимодействия искомая модель должна вести к ОТО.

Почти удачной реализацией сформулированных требований является упомянутая финслерова модель (расслоённое пространство с полем скоростей материи касательного слоя [6]), оснащённая одноимённой геометрией. На первый взгляд модель обладает всеми необходимыми свойствами для простейшей геометризационной электродинамики и объединения её с гравитацией: финслерова геометрия метрическая, локальная, анизотропная – метрический тензор зависит как от координаты x точки пространства, так и от направления в ней $\dot{x}$ (касательный вектор любой кривой, проходящей через x). (Анизотропия необходима, поскольку электродинамика Максвелла – теория векторная, определяется $4d$ -вектором $A_i = (\varphi_e, -\vec{A})$.) Однако финслерова модель оказалась непродуктивной для геометризационно-объединения. Почему?

Ответ оказался простым: стандартная финслерова геометрия является *нерелятивистской* [39, 40, 41]. Она допускает параметризацию *только* негеометрическим ньютоновским временем (запрещены $1d$ -протяжённые геометрические величины типа x^0), поэтому её геодезическая *не может* иметь лоренцева терма. Исследование этого аспекта геометрии с соответствующими доказательствами приведено в Приложении 1А, с. 38. Кроме того, *неконфигурационность* финслеровой модели обычно молча подразумевается, хотя физические причины *постулата* о $\dot{x}$ -зависимости метрики не ясны: *физическая* модель финслерова расслоения до сих пор отсутствует.

Таким образом, за искомую математическую модель пространства-времени может быть по-прежнему взято финслерово касательное расслоение, оснащённое *релятивистским* вариантом финслеровой геометрии. Очевидно, для иллюстрации физических свойств матмодели и её

геометрии необходима подходящая физическая *неконфигурационная* модель пространства-времени.

Простейшей из таковых и является Модель Вложенных Пространств (МВП) [42, 43]. Она предполагает, что любой элемент распределенной материи имеет свое собственное гладкое точечное метрическое множество (пространство), а реальное 4d пространство-время Вселенной является взаимным *физическим Вложением* этих множеств друг в друга. Взаимодействие элементов играет роль "клея", удерживающего *Вложение* от распада на собственные множества. В простейшем случае *Вложение* не предполагает какой-то выделенной структуры среди вложенных множеств, однако в приближении пробной материи *Вложение* представимо как вложение *двух* множеств: множество Вселенной (вложение $N \simeq 10^{80}$ собственных множеств её частиц) и множества пробного элемента материи, находящегося в состоянии (x, u) *Вложения*. Первое множество можно рассматривать как Базу, второе – как Слой финслерова расслоения.

(Очевидно, что собственные множества материи обеспечивают *неконфигурационность* модели, а многообразие "*Вложение*" является метрическим и характеризуется внутренним относительным движением исходных множеств. За оценку размеров парциального множества можно принять [13], с. 12: "...от 10^4 мт до 10^7 рс ". Использование термина *Вложение* без подбоающих математических оговорок и уточнений не совсем корректно, зато определение "*физическое*" удачно выражает суть дела. Для наглядности: под *Вложением* в дальнейшем можно понимать тотальное точечное многообразие континуальной мощности, являющееся аналогом сплошной среды (например *смесь* различных жидкостей. Важно что все парциальные множества *равноправно* формируют многообразие *Вложение*.)

Начальные усилия в развитии МВП имеются в работах [39, 40, 41, 42, 44], а также фрагментарно в недавних [43, 45, 46, 47]. В данной же работе последовательно изложены основы простейшей релятивистской финслеровой геометрии *Вложения*, геометризация электричества и гравитации на её основе. Представлены и обсуждаются как некоторые новые, так и найденные ранее физические и космологические следствия геометризации.

Глава 1

Модель и основы геометрии

1.1 Вложение в приближении пробной частицы

Очевидно, материальной базой МВП является релятивистская классическая (неквантовая) электроразряжённая сплошная среда, заполняющая Вселенную. Непротиворечивое описание такой среды возможно только в двух случаях: среда, состоящая из взаимодействующих материальных точек, и среда, чьи свойства полностью определяются полевой гипотезой материи. Не конкретизируя, в дальнейшем мы будем исходить из предположения, что сплошная электроразряжённая материальная среда *существует*.

Простейший вариант МВП [43] (многообразие M , *Вложение*) использует приближение пробной частицы и предполагает существование только двух исходных множеств: M_c (charge) – множество пробного элемента электроразряжённой распределённой материи и M_s (source) – множество источника поля, к которому отнесена вся остальная материя Вселенной. В этом приближении метрика *Вложения*, подобно финслерову случаю, определяется локальным механическим состоянием материи

$$g_{ik} = g_{ik}(x^l, u^m), \quad (1.1)$$

где x^l – 4-координата элемента материи, $u^m = dx^m/ds$ – 4-скорость элемента в этой точке произвольной системы координат, а $ds = +\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$ – интервал его траектории.

(Выбор натурального параметра s гарантирует релятивизм функции и даёт единичность касательного вектора u . При этом (1.1) становится неявным определением метрики g_{ik} , что очевидно никак не ограничивает последнюю, но существенно упрощает описание геометрии. Размер-

ность *Вложения* и исходных множеств постулируем как $(3 + 1)d$: три пространственных и одно временное, являющееся следствием подвижности многообразий.)

Нетрудно показать, что в случае слабых полей и малых скоростей пробной материи (1.1) приближённо выглядит как

$$g_{00} \simeq 1 + 2(\varphi_g + \beta Au)/c^2, \quad g_{0\alpha} \simeq g_{0\alpha}^{(0)} = 0, \quad g_{\alpha\beta} \simeq g_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad (1.2)$$

где $Au \simeq \varphi_e - \vec{A}\vec{v}/c$, а φ_g и $A_i = (\varphi_e, \vec{A})$ – ньютонов и максвеллов потенциалы, $\beta = \rho/\mu$ – отношение плотностей электрического заряда и массы материи¹. Очевидно, калибровка потенциала $A_i \rightarrow A_i + \partial f/\partial x^i$: в касательном пространстве Минковского суть $f = f(x)$ (произвольная, гладкая функция) и компактная группа $U(1)$, в случае же *Вложения* – $f = f(x, u)$ (также произвольная, гладкая функция) и неизвестная пока, также компактная группа $U(1)|_{u=const}$.

Метрика (1.2) это метрика СО (системы отсчёта), в которой материя движется по инерции. Вопрос идентификации геометрии этой СО с геометрией пространства-времени, в котором имеются классические поля, заслуживает отдельного рассмотрения. Нетрудно видеть, что в рамках приближения пробной материи (частицы), присутствие термина βAu в (1.2) означает *конфигурационность* результата (1.2) для континуальной 4d модели пространства-времени. Действительно, пространство этой модели, будучи **внешним** по отношению к *пробной* (тестирующей) частице, никак *не должно* зависеть от её собственных характеристик (β, u) по самому определению "пробной" частицы. Очевидно также, что *конфигурационность* (1.2) исчезает в МВП. То есть в приближении пробной материи замена стандартного пространственно-временного континуума на МВП позволяет *отождествить* метрику (1.2) с метрикой *реального физического* пространства-времени. Очевидно на роль такого пространства есть единственный претендент – *Вложение*². Обобщая, можно утверждать, что произвольная модель пространства-времени, локально зависящая от собственных характеристик материи, может претендовать на *неконфигурационность*, только если она изоморфна МВП (*Вложению*).

Континуум Эйнштейна является *неконфигурационной* моделью пространства-времени только для гравитации и только в предположении $m_g =$

¹Достаточно приравнять лагранжевы плотности элемента материи в касательном пространстве (Минковского) и во *Вложении*: $[\mu c^2 \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} + \mu \varphi_g + \rho(\varphi_e - \vec{A} \cdot \vec{v}/c)]dt \simeq \mu c ds$: см. аналог, конец §87 [48].

²А так как приближение пробной частицы (другое название – приближение поля) является базой описания взаимодействия материя-поле, то *единственным* вариантом *неконфигурационной* модели пространства-времени является МВП.

m_i , где m_g и m_i – гравитационная и инерциальная массы пробной частицы. При этом ясно, что риманово пространство ОТО *можно* рассматривать и как частный случай МВП: *Вложение* собственного пространства пробной частицы (с весом c^{-2}) в пространство Минковского. В связи с этим, можно отметить, что формы уравнения Эйнштейна ОТО и, забегая немного вперёд, – полевых уравнений МВП, прямо указывают на МВП-структуру реального физического пространства-времени, поскольку согласно этим уравнениям, соответствующие геометрические связности определяются *собственными* характеристиками материи.

Вид метрики (1.2) свидетельствует, что она относится к классу финслеровых *неоднородных* метрик (см. с. 38): *не является* однородной 0 степени по u^i функцией. То есть, стандартная финслерова (*однородная*) геометрия [6] *не описывает Вложение* (впрочем как и пространство Богословского, см. с. 42).

Таким образом, для дальнейшего необходимо развить *неоднородный* релятивистский вариант финслеровой геометрии, который и позволит одновременно геометризовать гравитацию и электричество. Как будет показано, такую геометрию можно построить по образу и подобию геометрии Римана, поскольку анизотропный аргумент u^m метрического тензора (1.1) можно рассматривать как поле направлений $u^m(x)$ (эйлерово описание сплошной среды). А рассматривая гладкие координатные преобразования $x^i = x^i(x'^k, u'^l)$ систем отсчёта *Вложения* M и их якобиан, можно по аналогии с римановым дифференциальным формализмом построить общековариантный анизотропный тензорный анализ для новой геометрии: обычным образом определить контравариантный тензор $g^{ik}(x^l, u^m)$, как обратный тензору (1.1) $g_{ik}g^{kl} = g_i^l \equiv \delta_i^l$, используя стандартные правила лифта индексов тензора, связности и т. д., сохранить нормировки $g_{ik}g^{ik} = 4$ и $g_{ik}u^i u^k \equiv u_i u^i = 1$ и проч.

Также следует отметить, что возможно формальное обобщение, которое ведёт к чистой геометрии модели: под парой (x^l, u^m) (1.1) можно понимать состояние произвольной незамкнутой кривой, проходящей через точку x *Вложения*.

1.1.1 Геодезическая

Как известно, в геометризованной физической теории материя движется по инерции – по геодезическим кривым пространства-времени. То есть уравнение геодезической *Вложения* является одновременно и уравнением движения материи в рассматриваемых полях (гравитационное и электромагнитное).

Используем стандартный вариационный метод, полагая геодезическую кратчайшей, соединяющей точки x_1 и x_2

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} ds = 0,$$

где $ds = \sqrt{g_{ik}(x, u) dx^i dx^k}$ – интервал кривой, $u = dx/ds$ – единичный касательный вектор, а s – её натуральный параметр (длина).

Тогда для вариации интервала можно написать

$$0 = \delta \sqrt{g_{ik}(x, u) dx^i dx^k} = u_i \delta dx^i + \frac{dx^k dx^l}{2ds} \cdot \left[\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^m} \left(\frac{\delta dx^m}{ds} - u^m \frac{\delta_x ds}{ds} \right) \right] =$$

где δx^i – вектор вариации (на концах кривой равен нулю), а δ_x – оператор вариации только x -зависимости $ds(x, u)$ (ограничиваемся первой итерацией – линейное приближение).

Воспользовавшись коммутативностью операторов δ , d и опустив полные дифференциалы первого и последних двух слагаемых, получаем

$$= ds \delta x^i \left[-\frac{du_i}{ds} + u^k u^l \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) \right] + \vartheta_i (d\delta x^i - u^i d\delta_x s) = ds \left\{ \delta x^i [\dots] - \delta x^i \frac{d\vartheta_i}{ds} + \delta_x s \frac{d(\vartheta u)}{ds} \right\},$$

где ϑ_i – векторная величина³

$$\vartheta_i = c_{i,kl} u^k u^l, \quad 2c_{i,kl} = \partial g_{kl} / \partial u^i, \quad (1.3)$$

а $c_{i,kl}$ – тензорная (напомним, что $u^i = u^i(s)$).

Воспользовавшись эйлеровой формой $d/ds \equiv u^i \partial / \partial x^i$, оператор последнего слагаемого фигурных скобок можно преобразовать как

$$\delta_x s d/ds = \delta_x s u^i \partial / \partial x^i \simeq \delta x^i \partial / \partial x^i$$

и вынеся скорости за координатные производные, окончательно имеем уравнение геодезической *Вложения*

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} u^k u^l \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + 2u^m \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial u^m} \right) g_{kl} = 0, \quad (1.4)$$

³Имеет три независимые компоненты (как потенциал A_i) – обусловлены тремя независимыми компонентами вектора u^i .

где квадратные скобочки у индексов означают антисимметризацию

$$\partial^2/\partial x^{[i}\partial u^{k]} = \left(\partial^2/\partial x^i\partial u^k - \partial^2/\partial x^k\partial u^i \right) / 2.$$

Из (1.4) следуют три важных заключения:

– во-первых ясно, что последнее слагаемое – лоренцево: проводимая геометризация ведет к более общему нежели классический (Максвеллов), тензорному варианту электричества с потенциалом $c_{i,kl}$ (1.3). Связь с векторным вариантом даётся определением вектора ϑ_i ;

– во-вторых, легко доказать, что второе слагаемое (1.4) – чисто гравитационное: производная $\partial g_{kl}/\partial x^i$ берется при $u^m = \text{const}$, то есть она суть $\partial g_{kl}(x, u = \text{const})/\partial x^i$. А при этом условии электрические потенциалы (1.3) – тождественные нули: $2c_{i,kl} = \partial g_{kl}(x, u = \text{const})/\partial u^l \equiv 0 \Rightarrow \vartheta_i \equiv 0$. Следовательно, второе слагаемое (1.4) имеет отношение *только к гравитации*: $\partial g_{kl}/\partial x^i \sim \partial \varphi_g/\partial x^i$, $\square$;

– и в-третьих, как и следовало ожидать, элемент материи сплошной среды, заполняющей *Вложение*, движется по его геодезической поскольку определение последней совпадает с уравнением движения по инерции элемента материи с массой dm : $c\,dm\,\delta\int ds = 0$.

1.1.2 Ковариантная производная

Вид геодезической (1.4) и структура *Вложения* M (множества M_s и M_c – неподвижное и движущееся со скоростью u^i) указывают на факт, что в дифанализе геометрии МВП существуют два *разных* оператора градиента: $\partial/\partial x^i$ (*продольный*) и $\hat{b}_i$ (*поперечный*)

$$\partial/\partial x^i \in M_s, \quad \hat{b}_i \in M_c, \quad (1.5)$$

описывающих приращение произвольной $f(x, u)$ в точке $x^i + dx^i$ координатной системы. Вне *своих* множеств они не существуют (*равны нулю*)

$$\partial/\partial x^i \notin M_s \rightarrow \partial/\partial x^i = 0, \quad \hat{b}_i \notin M_c \rightarrow \hat{b}_i = 0. \quad (1.6)$$

Очевидно, градиенты определяют главные вклады, обусловленные множествами M_s и M_c многообразия *Вложение*,

$$\begin{aligned} \bar{d} &= dx^i \bar{\partial}/\partial x^i, \quad \bar{\partial}/\partial x^i = \partial/\partial x^i + \hat{b}_i, \\ \hat{b}_i &= 2u^k \hat{b}_{ik}, \quad \hat{b}_{ik} = \partial^2/\partial x^{[i}\partial u^{k]}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\hat{b}_{ik} = -\hat{b}_{ki}$ и $dx^i \hat{b}_i = 0$. Лоренцев градиент $\hat{b}_i$ следует трактовать как *ортогональный, первого порядка, линейный* оператор, поскольку он определяет *ортогональное приращение первого порядка* по dx^{i4} . Гради-

⁴Пример: $\hat{b}_{ik}[\beta(x)A_l(x)u^l] = \beta\hat{b}_{ik}(A_l u^l) + (A_l u^l)\hat{b}_{ik}\beta = \beta\hat{b}_{ik}(A_l u^l) = 2\beta\partial A_{[k}/\partial x^{i]}$.

ент $\hat{b}_i$ – это прямой учёт анизотропных (множество M_c), а $\partial/\partial x^i$ – изотропных (множество M_s) свойств *Вложения*.

Метричность многообразия M и исходных множеств M_s и M_c требует предположений о соответствующих геометриях: полагаем, что *неметричности и кручения отсутствуют*, а кривизны геометрий сводятся к связностям. И если с геометрией M_s ясно – она риманова (ОТО), то *считая* и остальные геометрии *римановыми*, можно построить соответствующие дифформализмы, введя ковариантные обобщения параллельного переноса и координатных производных [43]

$$\dots|i \equiv \bar{\partial} \dots / \partial x^i \pm \Gamma_{\cdot i} \dots, \quad g_{ik|l} = 0 \quad (1.8)$$

для M ($\Gamma_{i,kl} \in M$) и

$$\dots|i \equiv \dots; i + \dots; i, \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} \dots; i &\equiv \partial \dots / \partial x^i \pm \gamma_{\cdot i} \dots, \\ \dots; i &\equiv \hat{b}_i \dots \pm \omega_{\cdot i} \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

– для M_s и M_c соответственно: $\gamma_{i,kl} \in M_s$, $\omega_{i,kl} \in M_c$. Простейшая интерпретация этого обобщения сводится к взаимно-однозначному соответствию параллельных переносов метрики

$$g_{ik|l} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_{ik;l} = 0, \quad g_{ik:l} = 0, \quad (1.11)$$

и аддитивности связностей

$$\Gamma^i_{kl} = \gamma^i_{kl} + \omega^i_{kl} \quad (1.12)$$

при явных выражениях для последних

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{i,kl} &= \bar{\partial} g_{ik} / \partial x^l + \bar{\partial} g_{il} / \partial x^k - \bar{\partial} g_{kl} / \partial x^i, \\ 2\gamma_{i,kl} &= \partial g_{ik} / \partial x^l + \partial g_{il} / \partial x^k - \partial g_{kl} / \partial x^i, \\ 2\omega_{i,kl} &= \hat{b}_l g_{ik} + \hat{b}_k g_{il} - \hat{b}_i g_{kl}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Совершенно ясно, что область существования любой связности совпадает с таковой её градиента (1.5), (1.6): в частности любое произведение связностей $\gamma_{i,kl}$ и $\omega_{i,kl}$ тождественно равно нулю

$$\gamma_{i,kl} \otimes \omega_{m,np} = 0.$$

Кроме того, *смешанные* как простые, так и обобщённые производные любой функции также равны нулю: в МВП имеется только *Вложение* множеств M_s , M_c и отсутствует их *Пересечение*.

Наконец необходимо подчеркнуть важное следствие: $\gamma_{i,kl}$ содержит *только гравитационные* слагаемые, также как $\omega_{i,kl}$ – *только лоренцевы*. Другими словами, $\gamma_{i,kl}$ полностью эквивалентна римановой связности ОТО – она не имеет "перекрестных" слагаемых типа $\partial(c^{-2}\beta Au)/\partial x^l$, (1.2) (см. также конец "Геодезическая" с. 10).

Формулы (1.8) – (1.13) позволяют придать уравнению геодезической (1.4) типичный риманов вид

$$\begin{cases} du^i/ds + \Gamma^i_{kl}u^k u^l = 0, \\ du_i/ds - \Gamma^k_{il}u_k u^l = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Для демонстрации лоренцева слагаемого геодезической удобно воспользоваться операторами $\hat{b}_{ik}$ (1.7) в выражении (1.13) для $\omega_{i,kl}$

$$\begin{aligned} \bar{D}u^i/ds &\equiv du^i/ds + \Gamma^i_{kl}u^k u^l = \\ &= du^i/ds + \gamma^i_{kl}u^k u^l - f^i_{k,lm}u^k u^l u^m = 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

– сумма гравитационного и лоренцева ускорений, а сама связность $\omega_{i,kl}$:

$$\omega_{i,kl} = (f_{lm,ik} + f_{km,il} - f_{im,kl})u^m, \quad (1.16)$$

где $f_{ik,lm}$ – "материальный" МВП-аналог тензора электромагнитного поля

$$f_{ik,lm} \equiv \hat{b}_{ik}g_{lm} = \partial c_{k,lm}/\partial x^i - \partial c_{i,lm}/\partial x^k \quad (1.17)$$

с $c_{i,kl}$ (1.3) – "материальным" МВП-аналогом векторного потенциала A_i ⁵.

Наконец необходимо привести несколько простых формул для связности $\omega_{i,kl}$. Линейность $\bar{d}$ ведет к обобщению стандартной связи дифференциалов определителя и компонент метрического тензора

$$\begin{aligned} \bar{d}g &= gg^{ik}\bar{d}g_{ik} = -gg_{ik}\bar{d}g^{ik} \Rightarrow \\ \frac{\partial g}{\partial x^i} &= gg^{kl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}, \quad \hat{b}_i g = gg^{kl}\hat{b}_i g_{kl}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

⁵Отсюда ясно, что МВП – *классический предел* модели расслоённых пространств Янг-Миллса: компоненты потенциала $c_{i,kl}$ очевидно коммутируют.

откуда следуют различные полезные соотношения

$$\omega_{ik}^k = \hat{b}_i \ln \sqrt{-g} = f_{il,k}^k u^l \Rightarrow f_{ik,l}^l = 2\hat{b}_{ik} \ln \sqrt{-g}; \quad (1.19)$$

$$\omega_{ik}^{i,k} = -\frac{\hat{b}_k (\sqrt{-g} g^{ik})}{\sqrt{-g}} = (2f_{kl}^{ik} - f_{l,k}^{ik}) u^l \Rightarrow$$

$$2f_{kl}^{il} - f_{k,l}^{il} = 2\hat{b}_{kl} (\sqrt{-g} g^{il}) / \sqrt{-g} \Rightarrow \quad (1.20)$$

$$f_{il,k}^l = g^{lm} \hat{b}_{il} g_{km}, \quad (1.21)$$

а также

$$2\omega_{(i,k)l} = \hat{b}_l g_{ik}, \quad 2\omega_{(i,k)l}^{(i,k)} = -\hat{b}_l g^{ik},$$

$$\hat{b}_{ik} g^{lm} = -f_{ik}^{lm}, \quad \omega_{[i,k]}^{[i,k]} = 2f_{[i,k]}^{[i,k]} u^l, \dots \quad (1.22)$$

где круглые скобочки около пары индексов означают симметризацию.

Важным фактом дифформализма МВП является *коммутативность* операторов $\hat{b}_i$ (*первый порядок* по координате)

$$\hat{b}_{[i} \hat{b}_{k]} = 0, \quad (1.23)$$

которая прямо следует из определения (1.7)⁵.

Очевидно калибровочное преобразование материально-полевого тензорного "потенциала"

$$c_{i,kl} \rightarrow c_{i,kl} + \partial \Phi_{kl}(x, u) / \partial x^i,$$

где $\Phi_{kl}(x, u)$ – произвольная гладкая функция локального состояния материи, не меняет ни $f_{ik,lm}$, ни связность $\omega_{i,kl}$, ни кривизны... За этой калибровкой стоит некоторая группа симметрии, идентификация которой – отдельная непростая задача: поскольку линейные приращения $c_{i,kl}$ определяются непростыми градиентами $\hat{b}_i$ (1.7), (1.23), да и само *Вложение* – нетривиальное *анизотропное* пространство.

1.1.3 Преобразования координатные и состояния

Понятия "скаляр", "вектор", "тензор" и "связность" в случае единственного (риманова) пространства хорошо известны. Случай же *Вложения* очевидно требует пояснений. Произвольное локальное преобразование координатной системы $\{x^i\}$ в систему $\{x'^k\}$ во *Вложении* сопровождается соответствующим преобразованием скорости материи $u \rightarrow u'$,

⁵Операторы $\hat{b}_{ik}$ очевидно коммутативны $[\hat{b}_{ik}, \hat{b}_{lm}] = 0$, а $\hat{b}_{ik} u^l = 0$. То есть, как и в (1.4), пренебрегаем *тормозными* слагаемыми: $\hat{b}_{[i} \hat{b}_{k]} \neq d\hat{b}_{ik}/ds$.

что эквивалентно переходу физической системы из состояния (x^i, u^k) в близкое (x'^l, u'^m) . В силу строения *Вложения* (минимум два, относительно движущихся множества M_s и M_c) переход $(x^i, u^k) \rightarrow (x'^l, u'^m)$ описывается анизотропными, в отличие от изотропного риманова случая, гладкими непрерывными функциями

$$x^i = x^i(x'^k, u'^l), \quad u^i = u^i(x'^k, u'^l). \quad (1.24)$$

При этом, поскольку преобразование координат $x^i = x^i(x'^k, u'^l)$ определяет понятие "тензор", то оно является главным, задавая закон преобразования вектора скорости $u^i = u^i(x'^k, u'^l)$.

Оператор малого приращения (дифференциал) *Вложения* определяется в соответствии с (1.7) как

$$\bar{d} = dx^i \frac{\bar{\partial}}{\partial x^i}. \quad (1.25)$$

Тогда дифференциал $\bar{d}x^i$ координаты, будучи *бесконечно малым вектором*, преобразуется соответственно

$$\bar{d}x^i = dx'^k \frac{\bar{\partial}x^i}{\partial x'^k} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k} + 2u'^l \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^k \partial u'^l} \right) \bar{d}x'^k,$$

поскольку $\bar{d}x'^k = dx'^k$ (как и $\bar{d}x^i = dx^i$)⁶ – *общековариантные векторы*. Следовательно и произвольный контравариантный вектор A^i *Вложения* преобразуется также как $\bar{d}x^i$:

$$A^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k} + \hat{b}'_k x^i \right) A'^k \equiv \left(\bar{\partial}x^i / \partial x'^k \right) A'^k. \quad (1.26)$$

Видно, что матрица преобразований состоит из двух слагаемых, первое из которых изотропное риманово – вклад множества M_s (продольный перенос), второе – анизотропное, вклад множества M_c (перенос, ортогональный вектору смещения dx^i).

Закон преобразования ковариантного вектора следует из условия инвариантности скалярного произведения $A^i B_i = \text{const}$ и формально записывается как

$$A_i = \left(\partial x'^k / \bar{\partial} x^i \right) A'_k \quad (1.27)$$

⁶ $\bar{d}x^i = dx^k (\partial / \partial x^k + \hat{b}_k) x^i = dx^i$ – в случае *дифференциала* ортогональным слагаемым можно пренебречь, считая его поправкой следующего порядка малости. Чего нельзя делать для произвольного вектора.

где матрица преобразований $\partial x'^k / \bar{\partial} x^i$, являясь обратной к $\bar{\partial} x^i / \partial x'^k$ (1.26), может быть найдена по правилам матричной алгебры.

Дифференциал *Вложения* скалярной функции $\bar{d}\varphi$ являясь скаляром, т. е. инвариантом преобразований (1.24), может быть представлен в соответствии с (1.25) и фактом $dx^i = \bar{d}x^i$, как скалярное произведение двух векторов *Вложения*

$$\bar{d}\varphi = dx^i \frac{\bar{\partial}\varphi}{\partial x^i} = \bar{d}x^i \frac{\bar{\partial}\varphi}{\partial x^i},$$

откуда следует, что общековариантный вектор $\bar{\partial}\varphi / \partial x^i$ преобразуется в соответствии с (1.27) как

$$\frac{\bar{\partial}\varphi}{\partial x^i} = \left(\partial x'^k / \bar{\partial} x^i \right) \frac{\bar{\partial}\varphi}{\partial x'^k} \Rightarrow \frac{\bar{\partial}}{\partial x^i} = \left(\partial x'^k / \bar{\partial} x^i \right) \frac{\bar{\partial}}{\partial x'^k}. \quad (1.28)$$

Непротиворечивость определения понятия "вектор" (1.26) можно показать на примере закона преобразования вектора скорости u^i . В соответствии с (1.26) имеем

$$u^i = \left(\partial x^i / \partial x'^k \right) u'^k \quad (1.29)$$

поскольку $u'^k b'_k = 0$. Матрица преобразования $\partial x^i / \partial x'^k$ и есть тот локальный лоренцев буст, который только и *допустим* для u'^7 . Найденный закон "урезает" матрицу преобразования скорости (1.24) до матрицы, зависящей только от координаты.

Закон преобразования метрики – функции зависящей от состояния (x, u) , определяется матрицами, также зависящими от состояния (начального или конечного – зависит от ко- или контра-вариантности). Например,

$$\begin{aligned} g_{ik}(x, u) &= \left(\partial x^l / \bar{\partial} x^i \right) \left(\partial x'^m / \bar{\partial} x^k \right) g'_{lm}(x', u'), \\ g^{ik}(x, u) &= \left(\bar{\partial} x^i / \partial x'^l \right) \left(\bar{\partial} x^k / \partial x'^m \right) g'^{lm}(x', u'). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Наконец рассмотрим закон преобразования связностей *Вложения* M и множеств M_s, M_c на примере преобразования произвольного тензора

⁷ Лагранжево описание сплошной среды эквивалентно Эйлерову, в котором вектор скорости суть функция координаты $u^i(x)$.

$A^i|_k$. По определению (1.8) и (1.26) имеем

$$\begin{aligned} A^i|_k &\equiv \bar{\partial} A^i / \partial x^k + \Gamma^i{}_{lk} A^l = \frac{\bar{\partial}}{\partial x^k} \left(\frac{\bar{\partial} x^i}{\partial x^l} A^l \right) + \Gamma^i{}_{lk} \left(\frac{\bar{\partial} x^l}{\partial x^m} A^m \right) = \\ &= \frac{\bar{\partial} x^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \left(\frac{\bar{\partial} A^l}{\partial x'^m} \pm \Gamma^l{}_{nm} A'^n \right) + \left(\frac{\bar{\partial} x^m}{\partial x^l} \Gamma^i{}_{mk} + \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\bar{\partial}^2 x^i}{\partial x'^m \partial x^l} \right) A'^l. \end{aligned}$$

Откуда немедленно следует

$$\frac{\bar{\partial} x^m}{\partial x'^n} \Gamma^i{}_{mk} = \frac{\bar{\partial} x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \Gamma'^p{}_{nm} - \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\bar{\partial}^2 x^i}{\partial x'^m \partial x^l}$$

и в итоге

$$\begin{aligned} \Gamma^i{}_{lk} &= \frac{\bar{\partial} x^i}{\partial x'^p} \left[\frac{\partial x'^n}{\partial x^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \Gamma'^p{}_{nm} + \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\bar{\partial}}{\partial x'^m} \left(\frac{\partial x'^p}{\partial x^l} \right) \right] \Rightarrow \\ \Gamma^i{}_{kl} &= \frac{\bar{\partial} x^i}{\partial x'^p} \left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^l} \Gamma'^p{}_{mn} + \frac{\partial^2 x'^p}{\partial x^k \partial x^l} \right) \end{aligned} \quad (1.31)$$

– с точностью до следующего порядка малости во втором слагаемом (так же как в предельном случае $\bar{d}x^i = dx^i$).

Видно что закон преобразования связности (1.31) *Вложения* действительно риманов по форме. А с учетом областей существования операторов $\partial/\partial x^i \in M_s$ и $\hat{b}_i \in M_c$, он распадается на аналогичные законы преобразования связностей $\gamma^i{}_{kl}$ и $\omega^i{}_{kl}$:

$$\gamma^i{}_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^l} \gamma'^p{}_{mn} + \frac{\partial^2 x'^p}{\partial x^k \partial x^l} \right), \quad (1.32)$$

$$\omega^i{}_{kl} = \hat{b}_p x^i \left[\left(\hat{b}^{-1}_k x'^m \right) \left(\hat{b}^{-1}_l x'^n \right) \omega'^p{}_{mn} + \hat{b}^{-1}_k \left(\hat{b}^{-1}_l x'^p \right) \right]. \quad (1.33)$$

Очевидно, что величина $f_{ik,lm}$ подобно связности $\omega_{i,kl}$ *не тензор*, по той же причине – наличие второй производной матрицы преобразований:

$$\begin{aligned} f_{ik,lm} &= \left(\hat{b}^{-1}_i x'^n \right) \left(\hat{b}^{-1}_k x'^p \right) \left(\hat{b}^{-1}_l x'^r \right) \left(\hat{b}^{-1}_m x'^s \right) \cdot f'_{np,rs} + \\ &+ 2 \hat{b}^{-1}_l x'^r \hat{b}^{-1}_m x'^s g'_{rs} \hat{b}_{ik} \hat{b}^{-1}_m x'^s. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Заметим, что координатные производные по определению *везде*, в том числе и у матриц преобразований берутся при $u = \text{const}$ – фиксированном направлении в локусе. Поэтому в частности, гравитация *Вложения* x -общеквариантна (как в ОТО).

Преобразования (1.24) в общем случае описывают не только лоренц-римановы локальные бусты, но и малые трансляции. Поэтому они могут рассматриваться и как *локальные преобразования состояний* (x, u) *физической системы*.

1.1.4 Кривизны *Вложения*

Естественно полагать, что решением задачи о кривизне пространства МВП является некоторое обобщение риманова понятия в духе развиваемых представлений. При этом, определение тензора кривизны МВП, в отличие от риманова случая (единственное множество), должно учитывать структуру и внутреннюю подвижность *Вложения* M . Совершенно ясно, что искомое обобщение обязано совпадать с римановым для изотропного случая и давать ненулевое значение для *Вложения* даже плоских пространств.

С другой стороны, в ковариантном дифференциале произвольного $A_i(x, u)$ (1.8)

$$\bar{D}A_i = \left[\left(\partial/\partial x^k + \hat{b}_k \right) A_i - \Gamma_{ik}^l A_l \right] dx^k, \quad (1.35)$$

второе и третье слагаемые описывают приращения, обусловленные как подвижностью, так и структурой *Вложения*

$$\bar{D}A_i = \left(\partial A_i / \partial x^k \right) dx^k - \delta A_i, \quad \delta A_i = \left(\Gamma_{ik}^l A_l - \hat{b}_k A_i \right) dx^k. \quad (1.36)$$

Используя эти вклады, можно вычислить локальную циркуляцию ΔA_k произвольного вектора A_i вызванную полной кривизной *Вложения*

$$\Delta A_k = \oint_C \delta A_k = \oint_C \left(\Gamma_{kl}^i A_i - \hat{b}_l A_k \right) dx^l,$$

по малому замкнутому контуру C , см., напр., [48]. (Следует отметить, что ортогональность оператора $\hat{b}_l$ (1.7) кривой переноса, $\hat{b}_l u^l = 0$, требует аккуратности в дальнейших преобразованиях – не следует опускать соответствующие слагаемые до получения результата.)

Применяя теорему Гаусса, для приращений можно написать

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \left(\Gamma_{km}^i A_i - \hat{b}_m A_k \right)}{\partial x^l} - \frac{\partial \left(\Gamma_{kl}^i A_i - \hat{b}_l A_k \right)}{\partial x^m} \right] \Delta f^{lm}, \quad (1.37)$$

где как обычно, $\Delta f^{lm} \equiv \Delta x^l \Delta x'^m - \Delta x^m \Delta x'^l$ – площадь, охватываемая контуром C .

Координатные производные в этом выражении определяются *только* кривизной пространства, потому (1.36) можно считать определением координатной производной вектора $A_i(x, u)$ в любой точке внутри C

$$\partial A_i / \partial x^k = \Gamma_{ik}^l A_l - \hat{b}_k A_i.$$

Используя эту связь, а также учтя линейность $\hat{b}_i$ и коммутативность его с $\partial/\partial x^i$, выражение (1.37) можно преобразовать к виду

$$\Delta A_k = (1/2) \left(\bar{P}^i_{klm} A_i - 2\hat{b}_{[l}\hat{b}_{m]} A_k \right) \Delta f^{lm}, \quad (1.38)$$

где *тензор кривизны* вложения⁸ суть

$$\begin{aligned} \bar{P}^i_{klm} &= \frac{\bar{\partial}\Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\bar{\partial}\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + 2\Gamma^i_{n[l}\Gamma^n_{m]k}, \\ \bar{P}_{iklm} &= \frac{\bar{\partial}\Gamma_{i,km}}{\partial x^l} - \frac{\bar{\partial}\Gamma_{i,kl}}{\partial x^m} + 2\Gamma^n_{m[i}\Gamma_{n,k]l}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Равенства нулю коммутатора (1.23) и локальной циркуляции метрики определяет симметричную по *первой паре* индексов часть тензора

$$\Delta g_{ik} = \bar{P}_{(ik)lm} \Delta f^{lm} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P}_{(ik)lm} = 0. \quad (1.40)$$

(Нетрудно проверить, что (1.40) является тождеством.)

Вторая же часть тензора кривизны, антисимметричная по первой паре индексов, очевидно является *тензором Римана Вложения*

$$\bar{R}_{iklm} \equiv \bar{P}_{[ik]lm} \Rightarrow \bar{R}_{iklm} = \frac{\bar{\partial}\Gamma_{i,km}}{\partial x^l} - \frac{\bar{\partial}\Gamma_{i,kl}}{\partial x^m} + 2\Gamma^n_{m[i}\Gamma_{n,k]l}. \quad (1.41)$$

Тензор Римана распадается на три слагаемых R_{iklm} , r_{iklm} и p_{iklm}

$$R_{iklm} = \frac{\partial\gamma_{i,km}}{\partial x^l} - \frac{\partial\gamma_{i,kl}}{\partial x^m} + 2\gamma^n_{m[i}\gamma_{n,k]l}, \quad (1.42)$$

$$r_{iklm} = 2 \left(\hat{b}_{[l}\omega_{[i,k]m]} + \omega^n_{m[i}\omega_{n,k]l} \right), \quad (1.43)$$

— относятся к множествам M_s и M_c соответственно, а *смешанный* тензор (соответствует электрогравитации *Вложения*)

$$p_{iklm} \equiv 2 \left(\frac{\partial\omega_{[i,k]m]}{\partial x^l} + \hat{b}_{[l}\gamma_{[i,k]m]} - 2\gamma^n_{[l[i}\omega_{n,k]m]} \right), \quad (1.44)$$

$$p_{iklm} = -p_{kil m} = -p_{ikml}, \quad p_{iklm} = p_{lmik}, \quad (1.45)$$

по определению операторов (1.5) – (1.6), *тождественно равен нулю*

$$p_{iklm} \equiv 0,$$

⁸Контравариантная циркуляция: $\Delta A^k = -(1/2)\bar{P}^k_{ilm} A^i \Delta f^{lm}$ (1.23).

поскольку МВП *не имеет* пересечений множеств M_s и M_c . Симметрия же p_{iklm} к перестановке пар индексов $\{ik\} \rightleftharpoons \{lm\}$ следует из коммутативности операторов $\partial/\partial x^i$ и $\hat{b}_k$

$$\begin{aligned} 2\hat{b}_{[i}\gamma_{[l,m]k]} &= \frac{\partial\omega_{[i,k]m}}{\partial x^l} - \frac{\partial\omega_{[i,k]l}}{\partial x^m}, \\ \frac{\partial\omega_{[l,m]k}}{\partial x^i} - \frac{\partial\omega_{[l,m]i}}{\partial x^k} &= 2\hat{b}_{[l}\gamma_{[i,k]m]}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Совершенно ясно, что упрощения тензора кривизны M_s – тензор Риччи и кривизна, будучи определёнными стандартным образом,

$$\begin{aligned} R_{ik} &= g^{lm}R_{limk}, \quad R_{ik} = R_{ki}, \quad R = g^{ik}R_{ik}, \\ R_{ik} &= \frac{\partial\gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial\gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \gamma^l_{ik}\gamma^m_{lm} - \gamma^l_{im}\gamma^m_{kl}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

стандартными же (римановыми) свойствами и обладают. По физическому смыслу M_s , его кривизны, очевидно, обусловлены только *гравитационной* системы "материя-поля".

Используя (1.13) и (1.23), нетрудно проверить, что r_{iklm} также обладает симметрией тензора Римана по отношению к перестановке пар индексов $\{ik\} \rightleftharpoons \{lm\}$

$$\begin{aligned} r_{iklm} - r_{lmik} &= \hat{b}_{[l}\hat{b}_{k]}g_{im} + \hat{b}_{[i}\hat{b}_{l]}g_{km} + \\ &+ \hat{b}_{[k}\hat{b}_{m]}g_{il} + \hat{b}_{[m}\hat{b}_{i]}g_{kl} = 0. \end{aligned}$$

Симметрия $\{ik\} \rightleftharpoons \{lm\}$ тензора r_{iklm} обеспечивает аналог римановой циклической перестановочной симметрии R_{iklm} . Пусть $\dots ikl \odot \dots$ обозначает циклическую сумму по индексам i, k, l , тогда

$$r_{iklm \odot} \equiv r_{iklm} + r_{imkl} + r_{ilmk} = 0. \quad (1.48)$$

Коммутатор (1.23) обеспечивает также и аналог тождества Бианки для r_{iklm} в геометрии M_c

$$r_{nikl:m \odot} \equiv r_{nikl:m} + r_{nimk:l} + r_{nilm:k} = 0. \quad (1.49)$$

Тензор Риччи и скалярная кривизна M_c выглядят подобно римановым R_{ik} и R (1.47)

$$\begin{aligned} r_{ik} &= g^{lm}r_{limk}, \quad r_{ik} = r_{ki}, \quad r = g^{ik}r_{ik}, \\ r_{ik} &= \hat{b}_l\omega^l_{ik} - \hat{b}_k\omega^l_{il} + \omega^l_{ik}\omega^m_{lm} - \omega^l_{im}\omega^m_{kl}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Наконец приведем явный вид кривизны M_c

$$\begin{aligned} r &= 2\hat{b}_i \omega^{[i,k]}_k + \omega_{i,kl} \omega^{l,ki} - \omega^i_{ik} \omega_l{}^{lk} = \\ &= 4u^i \partial f_i^{[k,l]} / \partial x^k - \xi_{ik} u^i u^k, \end{aligned} \quad (1.51)$$

где $(\xi \equiv \xi^i_i)$

$$\begin{aligned} \xi_{ik} &= f_{il,m}{}^m f_k{}^{l,n}{}_n + f_{il,mn} (f_k{}^{l,mn} - 2f_k{}^{m,ln}), \\ \xi &= f_{lm,n}{}^n f^{lm,p}{}_p + f_{lm,np} (f^{lm,np} - 2f^{ln,mp}). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Кривизны геометрии множеств M_c , M_s и многообразия M_e следует использовать для построения лагранжевых "полевых" плотностей геометризованного лагранжева действия S рассматриваемой физической системы "классические поля + электрoзаряжённая распределённая материя" с целью получения "полевых" уравнений для связностей $\gamma_{i,kl}$ и $\omega_{i,kl}$. Логика развиваемой геометризации, сами геометрии *Вложения* и содержание ОТО являются достаточным основанием для реализации этой программы.

Несмотря на тождественное равенство нулю *смешанного* тензора кривизны (1.44), приведём для справок явный вид остальных смешанных кривизн

$$\begin{aligned} p_{ik} &= g^{lm} p_{limk}, \quad p_{ik} \neq p_{ki}, \quad p = g^{ik} p_{ik}, \\ p_{ik} &= \frac{\partial \omega^{[l}{}_{i]k}}{\partial x^l} - \frac{\partial \omega^{[l}{}_{i]l}}{\partial x^k} + 2 \left(\hat{b}_{[l} \gamma^{[l}{}_{i]k]} + \omega_{[i,l][m} \gamma^{m,l}{}_{k]} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{[i,l][m} \omega^{m,l}{}_{k]} + \omega_{(i,l)[m} \gamma^{l,m}{}_{k]} + \gamma_{(i,l)[m} \omega^{l,m}{}_{k]} \right), \\ p &= \frac{\partial \omega^{[i,k]}_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega^{[i,k]}_i}{\partial x^k} + 2 \left(\hat{b}_{[i} \gamma^{[i,k]}_{k]} + \omega_{i,kl} \gamma^{(k,l)i} - \omega^i_{ik} \gamma_l{}^{lk} \right) \end{aligned} \quad (1.53)$$

– антисимметризация по внутренним и внешним скобкам как обычно осуществляется отдельно: $[\cdot, \cdot, \cdot]$.

Глава 2

Геометризация полей

2.1 Лагранжево действие системы

Построение лагранжева действия рассматриваемой физической системы *Вложения* сразу же требует ответа на два принципиальных вопроса: о полевой гипотезе массы и о точечной структуре материи.

Проблема собственной электромагнитной массы заряда интенсивно исследовалась в 30-40-х годах прошлого столетия [49], [48]. Итоги хорошо известны: вклад собственного электромагнитного поля в её массу равен *нулю*¹. Этот результат был формально перенесён как на модель точечной частицы, так и на классическую гравитацию. Позднейшее открытие бозона Хиггса [50] подтвердило правоту постулата: в настоящее время считается, что масса материи обусловлена взаимодействием с полем Хиггса и не имеет какого-либо отношения к собственным электромагнитным и гравитационным полям.

Релятивизм ограничивает непрерывные распределения ρ, μ заряда и массы (q, m) классической материи

$$\rho = dq/\sqrt{\gamma} dV, \quad \mu = dm/\sqrt{\gamma} dV,$$

где $\gamma = \|\gamma_{\alpha\beta}\|$ – определитель $3d$ метрического тензора $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + g_{0\alpha}g_{0\beta}/g_{00}$, а $dV = dx dy dz$ – элемент $3d$ объёма, *условием точечности частиц*

$$\rho/q = \mu/m \quad \Rightarrow \quad \beta \equiv \rho/\mu = q/m, \quad (2.1)$$

¹Вывод справедлив как в теории Максвелла, так и в нелинейных типа Г. Ми (1912), М. Борна (1934).

– для отдельной частицы. Поэтому для материи состоящей из частиц одного сорта $\beta = \text{const}$ (заряд и масса распределены *одинаково* (2.1)), а в общем случае отношение плотностей заряда и массы распределённой материи

$$\beta = \beta(x, u) \in M_c. \quad (2.2)$$

Тогда простейшее действие физической системы *Вложения* должно состоять как минимум из двух слагаемых: лагранжевой плотности *свободной* материи

$$\Lambda_0 = -\mu c^2 ds / \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad (2.3)$$

и полевой лагранжевой плотности $\sim \bar{R}$, $\bar{R} = R + r$, (1.47), (1.51), (1.52). Очевидно вес гравитационного члена ($\sim R$) должен быть $\sim k^{-1}$, в то время как вес электрического ($\sim r$) должен быть $\sim \beta^{-2}$, причём оба значения принадлежат *единой* функции. Отсюда вытекает условие

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \beta^2 = k, \quad (2.4)$$

совмещающее геометрическое и оба физических ограничения на полевую лагранжеву плотность $\sim \bar{R}$.

Подытожим исходные особенности развиваемой геометризаци. Во-первых, полевые лагранжевы плотности $\sim R$ и $\sim r$ берутся с *единым* знаком (единая геометрическая природа), что является и *более* физически верным выбором, как станет очевидно в дальнейшем, нежели выбор в [47], соответствующий стандартному полевому. Во-вторых, использование скаляра $\bar{R}$ не вызывает возражений по тем же причинам, что и R в ОТО: $\bar{R}$ – единственный геометрический скалярный инвариант произвольных преобразований (1.24), имеющий квадратичные по связностям слагаемые. В-третьих, условие (2.4) обеспечивая *единые по смыслу* весовые множители для *разных* полевых плотностей, удачно соответствует и гравитации и электричеству. И наконец, "электровакуумное" значение $\beta_0 = \pm \sqrt{k}$ материи может быть верифицировано экспериментально [46].

Очевидный геометрический выбор вариационных переменных в [47]: "Независимыми вариационными параметрами следует выбрать метрику (при фиксированном направлении), $g^{ik}(x, u = \text{const})$, и само это направление в фиксированной точке *Вложения* – скорость материи $u^i(x) \dots$ ", добавляет в действие ещё два, равных нулю, но принципиально важных слагаемых. (Последние обусловлены нормированностью выбранных переменных и единственным *соответствующим* этому факту вариационным методом: *метод неопределённых множителей Лагранжа* [51].)

С учётом сказанного имеем

$$cS = \int \left[\Lambda_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\varkappa_g} + \frac{r}{\varkappa_e} \right) + \lambda_g (g_{ik} g^{ik} - 4) + \lambda_u (u_i u^i - 1) \right] \sqrt{-g} d\Omega \quad (2.5)$$

где λ_g и λ_u — неопределённые множители²

$$\lambda_g \neq \lambda_g(g^{ik}), \quad \lambda_u \neq \lambda_u(u^i), \quad (2.6)$$

и "полевые" весовые константы

$$\varkappa_g = 8\pi c^{-4} k, \quad \varkappa_e = 8\pi c^{-4} \beta^2. \quad (2.7)$$

Вариационные переменные определяют два геометрических экстремума действия: по двумерной плотности точек *Вложения* при фиксированном направлении и по направлению при фиксированной плотности точек

$$\delta S[g^{ik}, u^l]_{|u^l=const} = 0, \quad \delta S[g^{ik}, u^l]_{|g^{ik}=const} = 0,$$

дающие аналоги полевых уравнений Эйнштейна и Максвелла³. В дальнейшем для краткости будем называть их уравнениями **гравитации** и **электричества** *Вложения*.

2.2 Уравнения полей

2.2.1 Уравнение электричества

Искомое уравнение находится вариацией действия (2.5),

$$\delta S[g^{ik}, u^l]_{|g^{ik}=const} = 0,$$

по направлению u^i (по явной зависимости) при фиксированной плотности точек M_e :

$$\frac{\delta \Lambda_0}{\delta u^i} - \frac{1}{2\varkappa_e} \frac{\delta r}{\delta u^i} + \lambda_u u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta r}{\delta u^i} = \varkappa_e (\Lambda_0 + 2\lambda_u) u_i, \quad (2.8)$$

²Такая форма записи лагранжиана системы со связями весьма удобна и часто используется, см. например [18] §16.

³Метод состоит из трёх шагов: (1) варьируя находим уравнения с *неварьируемыми* и *неизвестными* λ_g и λ_u . При этом вариация по g^{ik} берётся в предположении, что g_{im} суть *независимая* величина ($\delta g_{mn} = 0$). Аналогично полагаем $\delta u_p = 0$, считая что u_p не зависит от u^l . То есть *пренебрегаем* нормировками (голономными связями); (2) путём *независимых* от метода соображений, находим λ_g и λ_u ; (3) *восстанавливаем* нормировки в итоговых результатах.

поскольку $\delta\Lambda_0/\delta u^i = \Lambda_0 u_i/2$.

Доказательство:

$$\frac{\delta\Lambda_0}{\delta u^i} \Big|_{g^{ik}, u_l = \text{const}} = -\frac{\delta}{\delta u^i} \left(\frac{d(mc^2)}{\sqrt{-g} dV} \frac{ds}{dx^0} \right) =$$

так как $\delta\sqrt{-g} = 0$ (плотность точек M_e фиксирована),

$$= -\frac{d(mc^2)}{\sqrt{-g} dV} \frac{\delta}{\delta u^i} \left(\frac{\sqrt{u_k u^k}}{g^{0m} u_m} \right) = \Lambda_0 \frac{\delta}{\delta u^i} \sqrt{u_k u^k} = \frac{1}{2} \Lambda_0 u_i$$

по причине $\delta u_k = 0$ (u_k – константа варьирования), $\square$.

Учёт (1.51) – (1.52) даёт для уравнения (2.8) форму

$$2 \frac{\partial f_i^{[k,l]}}{\partial x^k} l = -\frac{\varkappa_e}{2} \left(-\Lambda_0 g_i^k + a_i^k \right) u_k, \quad (2.9)$$

$$a_{ik} = (2/\varkappa_e) (-\xi_{ik} - \varkappa_e \lambda_u g_{ik}). \quad (2.10)$$

Видно, что полученное уравнение содержит неопределённый множитель λ_u (2.6), выбор которого в виде

$$\lambda_u \sim -\xi/4\varkappa_e \quad (2.11)$$

делает a_{ik} похожим на максвеллов ТЭИ поля.

Однако нет оснований полагать, что неопределённый множитель λ_u зависит только от скаляра ξ . Он может зависеть также и от гравитационной кривизны R Вложения.

Для уточнения этого обстоятельства, следует заняться выводом уравнения гравитации.

2.2.2 Уравнение гравитации

Однородность r по u^i

$$u^i (\delta r / \delta u^i) = r - \xi_{ik} u^i u^k$$

и уравнение (2.8) позволяют исключить производную от $f_{ik,lm}$ в r :

$$r = \xi_{ik} u^i u^k + \varkappa_e (\Lambda_0 + 2\lambda_u) u^2. \quad (2.12)$$

Подстановка этой связи в (2.5) обеспечивает учёт найденного экстремума по u^i , что очевидно необходимо,

$$2cS = \int \left[\Lambda_0 - R/\varkappa_g - \xi_{ik} u^i u^k / \varkappa_e + 2\lambda_g (g_{ik} g^{ik} - 4) - 2\lambda_u \right] \sqrt{-g} d\Omega, \quad (2.13)$$

а вид полученного выражения указывает, что правильное соотношение материи и гравитации в подинтегральном выражении может быть достигнуто только при $-2\lambda_u \sim R/2\kappa_g$. Тогда с учётом (2.11), *простейший выбор* искомого множителя λ_u в виде

$$\lambda_u = -(\xi/\kappa_e + R/\kappa_g)/4, \quad (2.14)$$

даёт для функционала (2.13) новое выражение

$$2cS = \int \left[\Lambda_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\kappa_g} + \frac{2\xi_{ik}u^i u^k - \xi}{\kappa_e} \right) + 2\lambda_g (g_{ik}g^{ik} - 4) \right] \sqrt{-g} d\Omega. \quad (2.15)$$

Модифицированное таким образом действие уже позволяет искать гравитационный экстремум $\delta S[g^{ik}, u^l]_{|u^l=const} = 0$ стандартным образом⁴

Варьируя (2.15) по g^{ik} при $u^i = const$ получаем уравнение анизотропной гравитации

$$R_{ik} - g_{ik}R/2 - 4\kappa_g\lambda_g g_{ik} = \kappa_g \left(t^{(0)}_{ik} + t^{(lt)}_{ik} + t^{(mt)}_{ik} \right), \quad (2.16)$$

где ТЭИ свободной материи

$$t^{(0)}_{ik} = 2 \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda_0)}{\sqrt{-g}\partial g^{ik}} = -\frac{2c^2}{\sqrt{-g}} \frac{dm}{d\Omega} \frac{\partial ds}{\partial g^{ik}} = \frac{\mu c^2}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx_i dx_k}{dx^0 ds} \Rightarrow$$

$$t^{(0)}_{ik} = -\Lambda_0 u_i u_k, \quad t^{(0)} = -\Lambda_0 > 0; \quad (2.17)$$

Лоренцев ТЭИ заряженной материи (свертка со скоростями движения)⁵

$$t^{(lt)}_{ik} = -u^l u^m \left(2 \frac{\partial}{\partial g^{ik}} - g_{ik} \right) \frac{\xi_{lm}}{\kappa_e} = \frac{1}{\kappa_e} \left\{ g_{ik} \xi_{lm} - 4 [f_{ln,ik} f_m^{n,p} + \right.$$

$$\left. + f_{li,n}^{(n} f_{mk,p}^{p)} + 2f_{ln,pi} (f_m^{[n,p]}{}_k + f_{km,}^{np}) \right] \Big\} u^l u^m,$$

$$t^{(lt)} = -\frac{2}{\kappa_e} \xi_{ik} u^i u^k; \quad (2.18)$$

⁴Норма $u^2 = g_{ik}u^i u^k = 1$ здесь является вариационной константой.

⁵Очевидно $\partial(u^l u^m)/\partial g^{ik} = 0$ т. к. $\delta u^i = 0$.

ТЭИ *Максвеллова типа* электрического поля⁶

$$t^{(mt)}_{ik} = \left(2 \frac{\partial}{\partial g^{ik}} - g_{ik} \right) \frac{\xi}{2\kappa_e} = \frac{1}{\kappa_e} \left\{ \xi_{ik} - \frac{g_{ik}}{2} \xi + 2 \left[f_{lm,ik} f^{lm,n}_n + \right. \right. \\ \left. \left. + f_{il,m} f^{(m} f^{l,n)}_k + 2 f_{lm,ni} \left(f^{l[m,n]}_k + f^{l,mn}_k \right) \right] \right\}, \\ t^{(mt)} = \frac{2}{\kappa_e} \xi. \quad (2.19)$$

А подстановка (2.14) в (2.10) даёт окончательно

$$a_{ik} = \tau_{ik} + \frac{R}{2\kappa_g} g_{ik}, \quad \tau_{ik} \equiv \frac{2}{\kappa_e} \left(-\xi_{ik} + \frac{g_{ik}}{4} \xi \right), \\ a = 2R/\kappa_g, \quad \tau = 0, \quad (2.20)$$

$$2 \frac{\partial f_i^{[k,l]}}{\partial x^k} = -\frac{\kappa_e}{2} \left[\left(-\Lambda_0 + \frac{R}{2\kappa_g} \right) g_i^k + \tau_i^k \right] u_k. \quad (2.21)$$

Казалось бы, тензоры (2.20) определяют уравнение электричества полностью и вывод его закончен. Однако, дело обстоит иначе: как видно из уравнения гравитации (2.16), кривизна R зависит от множителя λ_g ,

$$R/2\kappa_g = -(t^{(0)} + t^{(lt)} + t^{(mt)})/2 - 8\lambda_g, \quad (2.22)$$

который пока *не определён*. Поэтому для окончания вывода системы уравнений (2.16) и (2.21) следует найти λ_g .

Решение этой задачи в общем случае невозможно: неизвестно *полное* уравнение электричества (для $f_{ik,lm}$, а не для свёртки (2.21)). Но вполне достижимо для важнейшего случая конформно-римановой метрики Г. Вейля [8].

⁶Знаки $t^{(lt)}_{ik}$ и $t^{(mt)}_{ik}$ очевидно противоположны найденным ранее $t^{(oem)}_{ik}$ и $t^{(fem)}_{ik}$ [47] в силу выбора (2.5).

Глава 3

Некоторые следствия геометризации

3.1 Конформная метрика Вейля

Допустим подобно [47] п.п. 3.4.1, что Герман Вейль был *прав*: электро-динамика Максвелла – следствие масштабной инвариантности метрики ОТО. То есть полевые уравнения (2.16), (2.21) и уравнения геодезической (например (1.4) или [47] (14)) удовлетворяются конформной метрикой

$$g_{ik} = \chi(u) g_{ik}^{(r)}(x), \quad \chi = \exp \left(2c^{-2} \beta A_l u^l \right), \quad (3.1)$$

где $\beta = \rho/\mu = q/m = \text{const}$ (2.2) (элемент материи – точечная частица), $A_i = 4d$ максвеллов векторный потенциал.

Линейность (1.7) оператора $\hat{b}_{ik}$ даёт в этом случае *Вложения*¹

$$\begin{aligned} f_{ik,lm} &= \hat{b}_{ik} g_{lm} = c^{-2} \beta F_{ik} g_{lm}, \quad F_{ik} = \partial A_k / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^k, \\ f_{ik,lm} u^k u^l u^m &= c^{-2} \beta F_{ik} u^k, \quad 2f_i^{[k,l]}{}_l = 3c^{-2} \beta F_i^k, \end{aligned} \quad (3.2)$$

а из $\xi_{ik} = 9\kappa_e F_{il} F_k^l / 4\pi$ следует, что

$$\begin{aligned} \tau_{ik} &= -t_{ik}^{(mt)} = 18 T_{ik}^{(M)}, \quad t_{ik}^{(lt)} = -18 t_{ik}^{(L)}, \\ T_{ik}^{(M)} &= \frac{1}{4\pi} \left(-F_{il} F_k^l + \frac{g_{ik}}{4} F_{lm} F^{lm} \right), \quad t_{ik}^{(L)} \equiv \frac{1}{4\pi} \left(F_i F_k - \frac{g_{ik}}{2} F_l F^l \right), \\ F_i &\equiv F_{ik} u^k, \quad \tau = -t^{(mt)} = 0, \quad t^{(L)} = -F_i F^i / 4\pi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

¹ $\hat{b}_{ik}[\beta(x)A(x,u)u] = Au\hat{b}_{ik}\beta + \beta\hat{b}_{ik}Au = \beta F_{ik}u^k$.

где $T_{ik}^{(M)}$ и $t_{ik}^{(L)}$ – максвеллов и *неполный* лоренцев (см. далее) электромагнитный ТЭИ.

Видно, что первая формула второй строки (3.2) является лоренцевым ускорением материи. Вторая же формула этой строки ведёт к искомому условию на λ_g в данном конформном случае *Вложения*: правая часть (2.21) должна быть равной $-3\Lambda_0 u_i$, что обеспечивает уравнению (2.21) *линейный Максвеллов вид*

$$\left[(-\Lambda_0 + R/2\kappa_g) g_i^k + \tau_i^k \right] u_k = -3\Lambda_0 u_i \Rightarrow R/2\kappa_g = -2\Lambda_0 - \tau_{ii}. \quad (3.4)$$

Тогда (2.22) и (3.3) ведут к явному выражению для Вейль-конформной гравитации *Вложения*

$$4\lambda_g = (5/4)\Lambda_0 + (9/2) \left(t^{(L)} + T_{ik}^{(M)} u^i u^k \right). \quad (3.5)$$

Используя результат (3.5) в полевых уравнениях, нетрудно получить их взаимно согласованный вид для метрики (3.1):

– уравнение типа Максвелла (2.21)

$$\frac{\partial F_i^k}{\partial x^k} = \frac{\kappa_e c^2}{2\beta} \Lambda_0 u_i, \quad (3.6)$$

которое можно записать в стандартном виде²

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} F_i^k)}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j_i, \quad (3.7)$$

где в силу (2.2), (2.3), (2.7) имеем

$$j^i = \rho c dx^i / \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad (3.8)$$

– плотность электрического тока;

– уравнение типа Эйнштейна для заряжённой материи с электромагнитными полями

$$R_{ik} - g_{ik} R/2 = \kappa_g \left(t_{ik}^{(0)} + t_{ik}^{(d)} \right), \quad (3.9)$$

где³

$$t_{ik}^{(d)} \equiv t_{ik}^{(dm)} + t_{ik}^{(df)}, \quad (3.10)$$

$$t_{ik}^{(dm)} \equiv \frac{5}{4} \Lambda_0 g_{ik}, \quad t_{ik}^{(df)} \equiv -18 \left(T_{ik}^{(M)} + T_{ik}^{(L)} - \frac{g_{ik}}{4} T_{lm}^{(M)} u^l u^m \right). \quad (3.11)$$

² $F_i^k \partial \ln \sqrt{-g} / \partial x^k \equiv 0$ так как $\hat{b}_{ik}$ и $\partial / \partial x^i$ принадлежат *разным* множествам: (1.5), (1.6).

³ Конформный множитель (3.1) в левой части (3.9) считается константой поскольку $\chi(u) \in M_c$, а $\partial / \partial x^i \in M_s$. То есть левая часть (3.9) – функция $g_{ik}^{(r)}(x)$.

Здесь $t_{ik}^{(dm)}$ – ТЭИ "тёмной" материи, $t_{ik}^{(df)}$ – ТЭИ "тёмной" энергии, а $T_{ik}^{(L)}$ – *полный*, с учётом (3.5), ТЭИ Лоренца:

$$T_{ik}^{(L)} \equiv \frac{1}{4\pi} \left(F_i F_k - \frac{g_{ik}}{4} F_l F^l \right), \quad T^{(L)} = 0. \quad (3.12)$$

3.1.1 Источники гравитации *Вложения* Вейля

Полученная система уравнений (3.7) и (3.9) конформного *Вложения* интересна прежде всего гравитационными источниками, обусловленными лагранжевым множителем λ_g второго уравнения. Этот множитель имеет смысл космологического терма уравнения Эйнштейна, $\Lambda_c = -4\kappa_g \lambda_g$ [31], с которым обычно связывают, так называемые, *тёмные* источники гравитации: материю и энергию Вселенной. Поэтому они объединены в ТЭИ $t_{ik}^{(d)}$ и обозначены в соответствии с их материально-полевым содержанием $t_{ik}^{(dm)} \sim \Lambda_0$ и $t_{ik}^{(df)} \sim T_{ik}^{(M)}$, $T_{ik}^{(L)}$.

Отношение тёмных источников $t_{ik}^{(d)}$ к обычной гравитации можно выяснить, найдя из (3.9) R_0^0 – компоненту тензора Риччи в *ньютоновом* приближении. В этом случае $u^i \simeq (1, \vec{0})$, а единственная из $g_{ik}^{(r)}(x)$, отличная от метрики Минковского компонента, $g_{00}^{(r)}(x) \simeq 1 + 2\varphi_g$ даёт, как известно, $R_0^0 \simeq c^{-2} \Delta \varphi_g$, где φ_g – ньютонов потенциал, [48]. Тогда

$$\begin{aligned} c^2 \Delta \varphi_g &\simeq (\kappa_g/2) \left[\mu c^2 + \left(5\mu c^2/2 - 9\vec{E}^2/8\pi \right) \right] \Rightarrow \\ \Delta \varphi_g &\simeq 4\pi k \left[\mu + \left(5\mu/2 - 9\vec{E}^2/8\pi c^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где слагаемые круглых скобок – тёмные гравитационные источники ($\vec{E}$ – напряжённость электрического поля).

Видно, что вклад тёмной материи (давление материи) имеет *гравитационный* смысл, а вклад электромагнитно-полевой (тёмная энергия) – *антигравитационный*. Качественно данный результат *коррелирует* с интерпретацией астрономических наблюдений [33, 34, 32].

Количественную оценку состава источников гравитации МВП можно попытаться найти сравнив модули слагаемых правой части (3.9). Для этого представим правую часть в явном виде

$$\begin{aligned} R_{ik} - \frac{g_{ik}}{2} R &= \kappa_g \left[\left(u_i u_k - \frac{5}{4} g_{ik} \right) (-\Lambda_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2\pi} \left(F_i F_k - F_{il} F_k^l + \frac{3}{16} g_{ik} F_{lm} F^{lm} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

и найдём модули всех усреднённых по 3-объёму слагаемых, в предположении "холодной" $v/c \simeq 0$ и "почти плоской" современной Вселенной:

$$|\bar{\mu}c^2|; 5|\bar{\mu}c^2|; \frac{9}{2\pi} \left(|\overline{F^2}| - \frac{|\overline{F_{lm}F^{lm}}|}{4} \right) \simeq 18\bar{w}_e,$$

где $\bar{w}_e = \overline{\vec{E}^2}/8\pi$ – средняя $3d$ плотность энергии эл.-маг. поля.

Допустив, что принцип детального равновесия $\bar{\mu}c^2 \simeq \bar{w}_e$ как *выполнялся* в эпоху отделения вещества от излучения, так выполняется и в настоящее время, нетрудно найти относительные веса *видимой* материи $n^{(vm)}$, тёмной материи $n^{(dm)}$ и тёмной энергии $n^{(de)}$

$$\begin{aligned} n^{(vm)} &= 1/24 \simeq 4,2\%, \\ n^{(dm)} &= 5/24 \simeq 20,8\%, \\ n^{(de)} &= 18/24 = 75\%. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Качественное и неплохое количественное совпадение (3.13), (3.15) с известными оценками состава Вселенной⁴ – факт не только замечательный сам по себе. Важно, что он является жёстким доказательством приоритета *геометрического* полевого подхода по сравнению со стандартным: см. обсуждение выбора знака r в действии системы – текст перед (2.5). При этом оказывается, что электромагнитные полевые источники $t^{(M)}_{ik}$ и $t^{(L)}_{ik}$ входят в уравнение гравитации (3.9) как антигравитационные. Поэтому обобщая сказанное можно считать, что результат (3.13), (3.15) прямо указывает на справедливость геометрического описания нашей Вселенной! Кроме того, (3.13), (3.15) зависит от размерности МВП (коэффициент $n - 1 = 3$ (3.4)): отличная от $4d$ размерность *Вложения* даёт *неверный* состав Вселенной.

Современное пространственное распределение видимой и тёмных материи и энергии – результат эволюции Вселенной, в которой заметную роль играли электромагнитное и гравитационные излучения. Вполне возможно, что они "вымели" часть материи на периферию звёздных скоплений, так что внутри тёмные источники *компенсируют* друг друга... Отметим также, что поскольку давление *видимой* материи в настоящее время идентифицируется как материя *тёмная*, то проблема её обнаружения просто *отсутствует*.

⁴Сравнение с (3.13) не должно смущать: гравитация описывается не только 0_0 -уравнением из тензорного блока (3.9)! Последний в этой оценке должен использоваться *целиком*...

В финале раздела необходимо *напомнить*, что метод неопределённых множителей, использованный при выводе полевых уравнений (2.16) и (2.21) (общий случай) и (3.7), (3.9) (*Вложение* Вейля (3.1)) содержит *неустранимые в рамках метода* неопределённости: *не существует* универсального способа определения множителей λ_u и λ_g . Рекоменгуемый стандарт – выход за рамки метода и привлечение сторонних физико-математических соображений, обусловленных решаемой задачей. Очевидно такой вариант действий не гарантируя *полноты*, позволяет учесть *главный вклад* в решение. Поэтому найденные полевые уравнения и их следствия справедливы ровно настолько, насколько *точно* были найдены λ_u и λ_g : формулы (2.14) и (3.5)⁵. Потому и результат (3.13), (3.15) вызывает не только удивление, но и доверие к основной идее данной работы – гипотезе Вложенных Пространств.

3.1.2 Электричество и гравитация: взаимные калибровки

В общем случае метрик *Вложения* за электрический сектор отвечает *тензорная* величина $f_{ik,lm}$ (1.17), определённая на M_c (1.7)

$$\begin{aligned} f_{ik,lm} &= \hat{b}_{ik} g_{lm} \equiv \partial c_{k,lm} / \partial x^i - \partial c_{i,lm} / \partial x^k, \\ c_{i,kl} &\equiv (1/2) \partial g_{kl} / \partial u^i, \quad c_{i,kl} = c_{i,lk}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

для которой $c_{i,kl}$ играет роль потенциала. Легко видеть, что $c_{i,kl}$ определён с точностью до калибровочного преобразования [18]

$$c_{i,kl} \rightarrow c_{i,kl} + \partial \nu_{kl} / \partial x^i, \quad \nu_{ik} = \nu_{ki}, \quad (3.17)$$

где *тензор* $\nu_{kl}(x)$ – произвольная гладкая функция координаты, такая что $\partial \nu_{ik} / \partial x^l \in M_s$ в силу (1.7). В частном случае ν_{ik} может быть и *римановым метрическим тензором* $g_{ik}(x)$ или, как в уравнении типа Эйнштейна анизотропной гравитации МВП (3.9), – метрическим тензором $g_{ik}(x, u = \text{const})$ связности $\gamma_{i,kl}$ (множество M_s).

Таким образом, во-первых, анизотропная метрика $g_{ik}(x, u = \text{const})$ может рассматриваться как *калибровочное* поле потенциала $c_{i,kl}$. То есть каждую из 10 различных компонент тензора $g_{ik}(x, u = \text{const})$ можно формально считать калибровочным полем с группой $U(1)_{ik}$ потенциала $c_{i,kl}$ аналогично случаю потенциала Максвелла. Константы этих групп,

⁵Хотя дотошный критик всегда вправе утверждать, что обсуждаемые неопределённости имеют тот же формальный смысл, что и космологическая постоянная Λ_c уравнения Эйнштейна.

по-видимому, также составляют риманов тензор. И во-вторых, это свойство указывает на симметричную *независимость* электрического и гравитационного секторов теории, в частности на возможность *независимо от гравитации* определения "космологического" множителя λ_g .

С другой стороны, случай конформной метрики (3.1) позволяет легко показать, что множитель $\chi(u)$ является калибровочным полем гравитационного потенциала $g_{ik}^{(r)}(x)$. Действительно, область существования функции $\chi(u)$ определяется полем u : $\chi(u) \in M_c$. Поэтому $\chi(u)$ и оператор $\partial/\partial x^i \in M_s$ не имеют общей области существования:

$$\chi(u) \in M_c, \quad \partial/\partial x^i \in M_s \quad \Rightarrow \quad \partial\chi(u)/\partial x^i = 0, \quad (3.18)$$

то есть функция $\chi(u)$ ведёт себя как $const(x)$ в любой точке M_s . А этот факт обеспечивает инвариантность эйнштейновской гравитации M_s по отношению к преобразованию

$$g_{ik}^{(r)}(x) \quad \Rightarrow \quad \chi(u) g_{ik}^{(r)}(x), \quad (3.19)$$

являющемуся "вейлевской" калибровкой. Это преобразование "порождает" **новую пространственно-временную структуру** – *Вложение* M_e Вейля, в котором появляется электродинамика Максвелла (3.7), а гравитация Эйнштейна становится анизотропной (3.9) – (3.12). То есть $\chi(u)$ позволяет откалибровать $g_{ik}(x)$ по направлениям в любой координатной т. (x) ⁶.

Аналогичный механизм сопровождает калибровку (3.17): поскольку $\nu_{kl} = \nu_{kl}(x)$, то $\nu_{kl} \notin M_c$ поэтому (3.17) "даёт" *Вложение* M_e с метрикой (3.1) и анизотропной гравитацией за счёт *анизотропного* вложения множества M_s .

Таким образом можно считать, что в случае *Вложения* Вейля потенциалы гравитационный g_{ik} и электрический A_i ("редуцированный" $c_{i,kl}$) являются *взаимными* калибровочными полями, а **реализация** калибровочных свойств *Вложения* заметно отличается от стандартного (единственное множество) по вполне понятной причине: многообразие M_e (*Вложение*) даже в приближении пробной частицы является вложением не менее чем **двух** независимых множеств M_s и M_c .

⁶ Более того, в *общем* случае метрики *Вложения* очевидно существует обобщение калибровки (3.19) для каждой ik -компоненты: $g_{ik}(x) \Rightarrow \chi_{(ik)}(u)g_{ik}(x)$ с 16-ю векторными потенциалами $A^{(ik)}_I$, из которых только 10 независимы, см. напр. [18] стр. 51.

3.2 Электромагнитный redshift

В разделе "*Вложение* в приближении пробной частицы" с. 8 показано, что метрический тензор 4d пространства-времени МВП в общем случае определяется локальным механическим состоянием распределённой материи $g_{ik} = g_{ik}(x^l, u^m)$, где $u^i = dx^i/ds$ – единичный вектор скорости. То есть и локальный темп хода часов также зависит от этого состояния. Поэтому эффект *красного смещения* во *Вложении*, определяясь разницей состояний материи трека волнового процесса (например фотона) должен в *слабых полях и при медленном движении материи* определяться только g_{00} компонентой метрики – именно она имеет максимальное отличие от значений метрики Минковского (1.2)

$$g_{00} \simeq 1 + 2(\varphi_g + \beta Au)/c^2, \quad (3.20)$$

где $\varphi_g, A^i = (\varphi_e, \vec{A})$ – ньютонов и максвеллов потенциалы, а $\beta = \rho/\mu$ – отношение плотностей электрического заряда и массы материи.

Из этого выражения непосредственно следует, что относительный сдвиг частоты ν (фотона) на треке определяется разностями как гравитационного потенциала так и электромагнитного действия материи

$$\Delta\nu/\nu \simeq -[\Delta\varphi_g + \Delta(\beta Au)]/c^2. \quad (3.21)$$

Сохраняя во втором слагаемом только старший член ($u^i \simeq (1, \vec{0})$), нетрудно видеть, что для предела *нейтральной* материи (2.4) электромагнитный сдвиг сводится к электрополевному

$$\Delta\nu/\nu \simeq -(\Delta\varphi_g \pm \sqrt{k} \Delta\varphi_e)/c^2. \quad (3.22)$$

Оценка последнего даёт вполне приемлемые значения для постановки соответствующего тестового эксперимента:

$$\Delta\nu/\nu \simeq \mp c^{-2} \sqrt{k} \Delta\varphi_e \simeq 10^{-21} \Delta\varphi(V), \quad (3.23)$$

где разность потенциалов берётся в *вольтах*, а знак определяется измерениями. Отметим, что возможны и прямые измерения по типу Паунда-Реббки [52].

Глава 4

Заключение

4.1 Сделанное

Идея объединения классических гравитации и электричества на единой геометрической основе возникла в 20-х годах прошлого столетия, сразу же после успеха в геометрическом описании гравитационного поля – создании ОТО. Но реализация её оказалась неожиданно проблемной, вызванной серьёзными геометрическими причинами: существующая модель пространства-времени (бесструктурный континуум Эйнштейна) совершенно не подходила для геометризации векторного поля как и известные на то время геометрии континуума. Единственным исключением являлась созданная в 1918 году анизотропная финслерова модель пространства-времени с соответствующей дифференциальной геометрией – казалось прекрасно соответствующей требованиям объединения. Однако эта модель, как было показано в нами в работах 2001 – 2008 годов, была изначально существенно скомпрометирована принципиальным нерелятивизмом её геометрии, что и обусловило неудачи в финслеровых попытках геометризации электродинамики, теории как известно, сугубо релятивистской.

Формулировка же релятивистского варианта геометрии финслерова пространства (Модель Вложенных Пространств) немедленно обеспечила естественное решение задачи объединения. А последующий анализ МВП показал, что её пространство на языке современной геометрии – это касательное 4d расслоение с группой $U(1)$ в слое. При этом *достаточность* описания расслоения в действительных числах подсказывает, что МВП – классический предел квантовых расслоений типа Янга-Миллса.

Группа расслоения *Вложения* в общем случае описывает анизотро-

пию пространства-времени, которая проявляется и в гравитации модели. Например, *астрономически наблюдаемая* на больших космологических масштабах анизотропия распределения вещества Вселенной может рассматриваться как аргумент в пользу МВП-природы последней, а новые источники анизотропной гравитации уравнения типа Эйнштейна *Вложения* – как тёмные материя и энергия Вселенной, стоящие за Λ_c -членом стандартного уравнения.

Полную геометризацию удалось провести пока только для частного случая *Вложения* с конформно-римановой метрикой Вейля. Он удобен тем, что допускает *векторное* приближение электричества МВП – максвеллов вариант. Это свойство позволяет найти неопределённый множитель Лагранжа $\lambda_g \sim \Lambda_c$ гравитационной вариационно-полевой процедуры, что снимает стандартную неопределённость в источниках кривизны уравнения гравитации. Результаты неплохо согласуются с современными количественными оценками состава Вселенной: 1 : 5 : 18 – отношение видимой материи к тёмной материи и тёмной энергии. При этом а) *ненаблюдаемость* тёмной материи очевидна: роль этой материи выполняет *давление* видимой материи; б) *давление* увеличивает *гравитационное* действие видимой материи, в то время как в) тёмная энергия (электромагнитно-полевой природы) оказывает *антигравитационное (!)* действие. Следует также отметить, что данные результаты однозначно определяются $4d$ -мерностью *Вложения* и имеют неканонический смысл: электричество исследуемой системы – источник антигравитации, а давление материи – дополнительный гравитационный источник. Сравнение с известными гравитационными полями говорит о взаимной компенсации тёмных источников вблизи звёзд и нарастании несбалансированности при удалении от них.

4.2 Предстоящее

Более точные оценки состава и пространственно-временного распределения вещества Вселенной МВП могут быть получены при решении эволюционной задачи *общего* варианта *Вложения* с произвольной метрикой $g_{ik}(x, u)$. Очевидно он и сам по себе представляет немалый физический интерес: фундаментальные свойства связности $\sim f_{ik,lm}$ не сводятся только к Вейль-Максвеллову конформному варианту $\sim \beta F_{ik} g_{lm}$. По-видимому также возможно и *Вложение* с классическими полями, суммарный потенциал которых составляет Максвеллов вектор A_i . Думается здесь уместно и более "крамольное" предположение: квантовым

полям слабого и сильного взаимодействий также должны соответствовать некие классические аналоги в МВП.

И наконец, косвенные, либо астрономические аргументы корректности МВП безусловно важны, но они не могут сравниться с результатами прямого *экспериментального* теста, например с измерениями *redshift* МВП в электромагнитных полях [47, 46]. Такой физический эффект существует только во *Вложении* (3.23), а его исследование может дать прямую информацию как об анизотропии, так и о реликтовом заряде Вселенной. По нашему мнению давно следует поставить соответствующий эксперимент: его результаты могут оказаться весьма познавательными.

Приложение А

Финслерова геометрия и релятивизм

А.1 Параметризация: два типа геометрий

1. Базовым утверждением финслеровой геометрии является постулат однородности: метрическая функция F , задающая расстояние ds между двумя близкими точками с координатами x^i и $x^i + dx^i$ финслерова пространства F_n зависит от x^i и dx^i как от независимых переменных и является непрерывной, гладкой и *однородной +1 степени* по аргументу dx^1

$$ds = F(x^i, dx^k), \quad F(x, kdx) = kF(x, dx), \quad (k > 0). \quad (5.1.1)$$

Теорема Эйлера $dx^i \partial F(x, dx) / \partial dx^i = +1 F(x, dx)$ об однородных функциях немедленно даёт

$$ds^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, dx)}{\partial dx^i \partial dx^k} dx^i dx^k \Rightarrow$$
$$g_{ik}(x, dx) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, dx)}{\partial dx^i \partial dx^k}, \quad (5.1.2)$$

где $g_{ik}(x, dx) \equiv g_{ik}(x^l, dx^m)$ интерпретируется как метрический тензор F_n в т. x^l и направлении dx^m . Очевидно, $g_{ik}(x, dx)$ – функция *0 степени однородности* по dx . Теорема Эйлера также позволяет утверждать, что для $C_{ikl}(x, dx)$ – полностью симметричного тензора 3 ранга

$$C_{ikl}(x, dx) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}(x, dx)}{\partial dx^l} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2(x, dx)}{\partial dx^i \partial dx^k \partial dx^l},$$

¹ Для упрощения формул будем опускать индексы там, где их отсутствие не мешает пониманию.

(функция -1 степени однородности по dx), выполняется условие ортогональности

$$C_{ikl}(x, dx) dx^i = C_{ikl}(x, dx) dx^k = C_{ikl}(x, dx) dx^l = 0. \quad (5.1.3)$$

Параметризация функции $F(x, dx)$ реализуется скаляром t – величиной, *инвариантной* по отношению к произвольным координатным преобразованиям $x'^i = x'^i(x^k)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) ([6], § 1.2, второй абзац), и определяется *также* геометрическими свойствами последней. Нетрудно видеть, что в зависимости от этих свойств, "скорость" $\dot{x} \equiv dx/dt$ может *быть*, а может *и не быть* функцией $+1$ степени однородности по dx . Например, допустимый *негеометрический* параметр "ньютоново время" *сохраняет* однородность аргумента направления: $\dot{x} \equiv dx/dt$ – функция $+1$ степени однородности по dx по-прежнему. И наоборот, также допустимый, *натуральный* параметр s (длина) – *геометрическая* $1d$ -протяженная величина – изменяет аргумент анизотропии: $\dot{x}$ – уже функция 0 степени однородности по dx . Естественно, что эта изменчивость $\dot{x}$ сказывается на свойствах параметризованной метрической $F(x, \dot{x})$, поэтому параметризация $F(x, dx)$ всегда должна сопровождаться некоторым *дополнительным* условием, налагаемым на её результат – на $F(x, \dot{x})$.

2. Допустим, что $F(x, \dot{x})$ – функция $+1$ степени однородности по $\dot{x}$ (Условие А (I.1.8) [6] – *дополнительное* условие – однородности). Тогда для $ds = F(x, \dot{x}) dt$ мгновенно имеем реплику формул (5.1.1) – (5.1.3) – *базовые формулы стандартного (однородного) варианта финслеровой геометрии* [6] :

$$F(x, k\dot{x}) = kF(x, \dot{x}), \quad (k > 0),$$

$$\dot{x}^i \partial F(x, \dot{x}) / \partial \dot{x}^i = +1 F(x, \dot{x}), \quad (5.1.1')$$

$$ds^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k} dx^i dx^k \Rightarrow g_{ik}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k}, \quad (5.1.2')$$

где $g_{ik}(x, \dot{x})$ – функция 0 степени однородности по $\dot{x}$ – метрический тензор F_n в т. x^i и направлении $\dot{x}^k$ (совпадающем с dx^k). А также для $C_{ikl}(x, \dot{x})$ (симметричный тензор 3 ранга, функция -1 степени однородности по $\dot{x}$)

$$C_{ikl}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^l},$$

реплицируется условие ортогональности – *важнейшее* свойство стандартного (однородного) варианта геометрии:

$$C_{ikl}(x, \dot{x}) \dot{x}^i = C_{ikl}(x, \dot{x}) \dot{x}^k = C_{ikl}(x, \dot{x}) \dot{x}^l = 0. \quad (5.1.3')$$

3. Пусть параметр t – $1d$ -протяженная величина, то есть dt – функция $+1$, а $\dot{x}^i = 0$ степени однородности по dx^2 . Допустим, что Условие А (условие однородности) не выполняется: $ds = Q(x, \dot{x})dt$, где $Q(x, \dot{x})$ – гладкая, неоднородная по $\dot{x}$ функция.

Докажем, что принятое неоднородное условие *совместимо* с финслеровым постулатом однородности (5.1.1). То есть что $F(x, dx) = Q(x, \dot{x})dt$ – функция $+1$ степени однородности по dx :

$$\begin{aligned} dx^i \frac{\partial F(x, dx)}{\partial dx^i} &= dx^i \frac{\partial Q(x, \dot{x})}{\partial dx^i} dt + Q(x, \dot{x}) \left(dx^i \frac{\partial dt}{\partial dx^i} \right) = \\ &= dt \frac{\partial Q(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \left(dx^i \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial dx^i} \right) + (+1)Q(x, \dot{x})dt = \\ &= \left(0 \cdot \dot{x}^k \right) dt \frac{\partial Q(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} + (+1)F(x, dx) = (+1)F(x, dx), \quad \square. \end{aligned} \quad (5.1.1'')$$

Следовательно, формулы (5.1.1) – (5.1.3) выполняются и в этом *неоднородном* варианте геометрии³. Но вот связей, подобных (5.1.1') – (5.1.3') здесь *нет*, поскольку $F(x, \dot{x}) = Q(x, \dot{x})$ – *неоднородная* функция! Очевидно, эта внутренняя свобода *неоднородной* геометрии имеет принципиальные и далеко идущие последствия: она кардинально отличается от стандартного однородного финслерова варианта [6] и может рассматриваться как некоторое финслерово обобщение римановой геометрии.

4. Проиллюстрировать *новые* финслеровы возможности при нарушении условия однородности – Условия А – можно на примере уравнения геодезической:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} ds = 0, \quad ds^2 = g_{ik}(x, \dot{x}) dx^i dx^k \quad \Rightarrow \quad (5.1.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}(x, \dot{x})}{\partial x^i} + f_{im,kl} \dot{x}^m \right) \dot{x}^k \dot{x}^l - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \dot{x}_i + \\ + \left(C_{mkl} \frac{\partial \ln \dot{s}}{\partial x^i} - C_{ikl} \frac{\partial \ln \dot{s}}{\partial x^m} \right) \dot{x}^k \dot{x}^l \dot{x}^m = 0, \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

где

$$f_{im,kl} = \frac{\partial C_{mkl}}{\partial x^i} - \frac{\partial C_{ikl}}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial \ln \dot{s}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{np}(x, \dot{x})}{\partial x^i} \frac{\dot{x}^n \dot{x}^p}{\dot{x}^2},$$

²Пример метрической функции: $ds = f(\dot{x})\Phi(x, dx)$, где $f(\dot{x})$ – произвольная гладкая функция $\dot{x} = dx/ds_{(0)}$, $ds_{(0)}^2 = g_{ik}^{(0)} dx^i dx^k$ и, одновременно, – функция 0 степени однородности по dx , а $\Phi(x, dx)$ – функция $+1$ степени однородности по dx и $n = \text{const}$.

³Например, $2g_{ik}(x, dx) = Q(x, \dot{x})^2 (\partial^2(dt)^2 / \partial dx^i \partial dx^k)$ – функция 0 степени однородности по dx , поэтому: $C_{ikl}(x, dx) dx^i = C_{ikl}(x, dx) dx^k = C_{ikl}(x, dx) dx^l = 0$.

$$\frac{\ddot{s}}{\dot{s}} = \frac{1}{\dot{x}^2} \left[\ddot{x}^k \dot{x}_k + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}(x, \dot{x})}{\partial x^m} \dot{x}^m + C_{mkl} \ddot{x}^m \right) \dot{x}^k \dot{x}^l \right].$$

Отсюда сразу же видно, что для стандартной *однородной* финслеровой геометрии, когда *Условие А выполняется*, т. е. выполняется и ортогональность (5.1.3'), лоренцев терм $f_{im,kl} \dot{x}^m \dot{x}^k \dot{x}^l$, как и два последних слагаемых автоматически выпадают из геодезической (нули). А если выбрать $t = s$, то (5.1.5) превращается в геодезическую, имеющую только анизотропный риманов терм

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}(x, u)}{\partial x^i} u^k u^l = 0, \quad u_i = \frac{dx_i}{ds}. \quad (5.1.5')$$

Для *неоднородной* же финслеровой геометрии, когда *Условие А не выполняется*, имеем в геодезической как анизотропный риманов, так и лоренцев термы (1.4)

$$\frac{du_i}{ds} - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}(x, u)}{\partial x^i} + f_{im,kl}(x, u) u^m \right) u^k u^l = 0, \quad (5.1.5'')$$

$$f_{im,kl}(x, u) = \frac{\partial c_{m,kl}(x, u)}{\partial x^i} - \frac{\partial c_{i,kl}(x, u)}{\partial x^m},$$

$$c_{i,kl}(x, u) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}(x, u)}{\partial u^i},$$

где $c_{i,kl}(x, u)$ – тензорный электромагнитный потенциал, симметричный по последним индексам.

То есть *новые* финслеровы возможности сводятся к появлению в геодезической лоренцева терма (эквивалентно возможности геометризации электродинамики в F_n) и массы нового физического содержания геометрии.

В заключение можно сказать, что стандартная (однородная) финслерова геометрия имеет не менее двух физических признаков *нерелятивизма*: *только* ньютонова параметризация и *отсутствие* лоренцева терма в геодезической. Оба являются следствиями *Условия А* (I.1.8) [6]. Таким образом стандартная финслерова геометрия *не может быть использована в релятивистской физике*. Косвенное указание на столь жёсткое заключение есть у Г. Ю. Богословского: " ... общая теория финслеровых пространств говорит о существовании не одного (как в римановом случае), а трёх тензоров четвёртого ранга, описывающих кривизну. ... Данное обстоятельство порождает известные трудности на пути формального обобщения уравнений Гильберта-Эйнштейна с помощью аппарата финслеровой геометрии." , [27]. И наоборот, *неоднородная*

финслерова геометрия *может быть использована в релятивистской физике* и применима для геометризации классического электромагнетизма, см. например "Модель и основы геометрии" с. 8. При этом главным признаком класса *релятивистских* финслеровых геометрий является *неоднородность* метрической функции $F(x, \dot{x})$ по $\dot{x}$.

А.2 О геометрии Г. Ю. Богословского

Сравнение геометрии МВП с конформно-плоской анизотропной геометрией Богословского [26, 27, 28] позволяет высказать несколько соображений. Во-первых, метрическая функция Богословского

$$ds = \left[\frac{(dx_0 - \vec{\nu} d\vec{x})^2}{dx_0^2 - d\vec{x}^2} \right]^{r/2} \sqrt{dx_0^2 - d\vec{x}^2},$$

где $r = \text{const}$, $\vec{\nu} = \text{const}$ – фиксированный единичный вектор, как нетрудно видеть, удовлетворяет финслеру постулату однородности метрической функции $F(x, dx)$ (5.1.1).

Во-вторых, соответствующая метрика может быть представлена в виде

$$g_{ik}(u) = \left(g_{lm}^{(0)} \nu^l u^m \right)^r g_{ik}^{(0)}, \quad (5.2.1)$$

где $i, k, \dots = 0, 1, 2, 3$, $\nu_i = (1, -\vec{\nu})$ – нуль-вектор ($1 - \vec{\nu}^2 = 0$), $u^i = dx^i/ds^{(0)}$ и $ds^{(0)} = +\sqrt{g_{ik}^{(0)} dx^i dx^k}$ – интервал Минковского (плоское касательное $4d$ пространство-время с метрическим тензором $g_{ik}^{(0)}$). В качестве скорости $\dot{x}$ следует выбрать вектор u в силу его *общековариантности*: ds – скаляр, инвариантный относительно *произвольных* координатных преобразований $x'^i = x'^i(x^k)$.

Запись (5.2.1) показывает, что метрика Богословского *не является* функцией нулевой степени однородности по u , то есть *не относится* к стандартным финслеровым. Она – из класса релятивистских финслеровых метрик: лоренцев терм соответствующей геодезической равен нулю *только* в силу $\vec{\nu} = \text{const}(x)$, а физический смысл пространства – анизотропный аналог пространства Минковского с абстрактным $3d$ вектором анизотропии $\vec{\nu}$.

В более общем случае $\nu_i(x)$ геодезическая имеет неравный нулю лоренцев терм, а при $r = 2$ этот вектор может интерпретироваться как $\nu_i(x) \sim A_i$, где A_i – потенциал электромагнитного поля пространства

Богословского. Например, $\nu_i(x) = \pm\sqrt{k}A_i(x)/c^2$. В случае электронейтральности метрики (5.2.1), вектор $\nu_i(x)$ может быть интерпретирован как угловая скорость для моделей Вселенной с вращением [53].

Литература

- [1] A. Einstein, “Zur Elektrodynamik bewegter Körper,” *Ann. Phys.*, vol. 17, no. IV, pp. 891–921, 1905.
- [2] A. Einstein, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,” *Ann. Phys.*, vol. 49, p. 769, 1916.
- [3] H. Minkovski, “Raum und Zeit,” *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 1905.
- [4] G. Nordstrom, “Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips,” *Chrn. d. Phys.*, vol. 42, p. 533, 1913.
- [5] A. Einstein, “Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie,” *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss.*, vol. 47, p. 831, 1915.
- [6] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*. Springer, 1959.
- [7] A. Einstein and A. D. Focker, “Nordstrom’s theory of gravitation from the point of view of the absolute differential calculus,” *Ann. Phys.*, vol. 44, p. 321, 1914.
- [8] H. Weyl, “Einstein and theory of gravitation,” *Sitzungsber d. Berl. Akad.*, p. 465, 1918.
- [9] T. Kaluza, “On the unification problem in physics,” *Sitzungsber d. Berl. Akad.*, p. 921, 1921.
- [10] O. Klein, “Quantentheorie und funfdimensionale Relativitätstheorie,” *Zeits. f. Physik*, vol. 37, p. 895, 1926.
- [11] A. D. Fokker, “Ein invarianter Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen,” *Zeits. f. Phys.*, vol. 58, p. 386, 1929.

- [12] W. Pauli, "Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogen koordinaten," *Ann. der Phys.*, vol. 18, p. 305, 1933.
- [13] A. S. Eddington, *The combination of relativity theory and Quantum theory*. Dublin Institute of Advanced Studies, 1943.
- [14] A. S. Eddington, *Fundamental theory*. N.Y.: Cambridge Press, 1946.
- [15] Y. B. Rumer, *Studies in 5-optics*. Moscow: GITTL (in Russian), 1956.
- [16] E. J. Zimmerman, "The macroscopic nature of space-time," *Amer. J. Philos.*, vol. 30, p. 97, 1962.
- [17] R. Penrose, *Structure of space-time*. Moscow: Mir, 1972.
- [18] N. P. Konopleva and V. N. Popov, *Gauge fields*. Moscow: Atomizdat (in Russian), 1972.
- [19] E. Schmutzer, "Projectiv unified field theory I-V," *Exp. Techn. Phys.*, vol. 28, p. 395, 1980.
- [20] A. Salam and J. Strathdee, "On Kaluza-Klein theory," *Ann. of Phys.*, vol. 141, p. 316, 1982.
- [21] Y. S. Vladimirov, "The unified field theory, combining Kaluza's five-dimensional and weyl's conformal theories," *Gen. Rel. Grav.*, vol. 12, p. 1167, 1982.
- [22] V. G. Krechet, "Geometrization of physical interactions, 5-dimensional theories and the many world problem," *Grav. Cosmol.*, vol. 1, no. 3, p. 199, 1995.
- [23] P. Wesson and et al., "A theory of space, time and matter," *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 11, no. 18, p. 3247, 1996.
- [24] F. W. Cotton, "A generalization of the Einstein-Maxwell equations," *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 136, p. 162, 2021.
- [25] N. Voicu, "On the fundamental equations of electromagnetism in finclerian space-time," *Progr. Electromagn. Research*, vol. 113, p. 83, 2011.
- [26] G. Y. Bogoslovsky, "On a special relativistic theory of anisotropic space-time," *Dokl Akad Nauk*, vol. 213, no. 5, p. 1055, 1973.

- [27] G. Y. Bogoslovsky, *Theory of Locally Anisotropic Space-Time*. Moscow: MSU, 1992.
- [28] V. Balan, G. Y. Bogoslovsky, S. S. Kokarev, D. G. Pavlov, S. V. Siparov, and N. Voicu, “Geometrical models of the locally anisotropic space-time,” *J. Modern Phys.*, vol. 3, p. 1314, 2012.
- [29] Y. S. Vladimirov, *Relational Theory of Space-Time and Interactions. Part 1. Theory of Systems of Relations*. Moscow: MSU (in Russian), 1996.
- [30] Y. S. Vladimirov, *Relational Theory of Space-Time and Interactions. Part 2. Theory of Physical Interactions*. Moscow: MSU (in Russian), 1998.
- [31] Y. S. Vladimirov, *The Classical Theory of Gravitation*. Moscow: Librokom (in Russian), 2009.
- [32] F. Zwicky, “On the Masses of Nebular and Clusters of Nebular,” *The Astrophysical Journal*, vol. 86, pp. 217–246, Oct. 1937.
- [33] A. G. Riess and et al., “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astron. J.*, vol. 116, p. 1009, 1998.
- [34] S. Perlmutter and et. al., “Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae,” *Astron. J.*, vol. 117, p. 565, 1999.
- [35] G. R. Blumenthal, S. M. Faber, J. R. Primack, and M. J. Rees, “Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter,” *Nature*, vol. 311, no. 511, pp. 517–525, 1984.
- [36] A. A. Grib, *Basic concepts of modern cosmology*. Moscow: Fizmatlit (in Russian), 2008.
- [37] D. Huterer and L. Shafer, “Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests,” *arXiv:1709.01091v2 [astro-ph.CO]* 5Feb 2018, 2018.
- [38] V. A. Rubakov, “Hierarchies of fundamental constants,” *Phys.-Uspekhi*, vol. 50, no. 4, p. 320, 2007.
- [39] V. I. Noskov, “Relativistic version of Finslerian geometry and an electromagnetic ‘redshift’,” *Grav. Cosmol.*, vol. 7, no. 1, p. 41, 2001.

- [40] V. I. Noskov, “On the relativistic nature of Finslerian geometry,” *Grav. Cosmol.*, vol. 10, no. 3, p. 1, 2004.
- [41] V. I. Noskov, “Relativistic version of Finslerian geometry II,” *Grav. Cosmol.*, vol. 10, no. 4, p. 279, 2004.
- [42] V. I. Noskov, “Model of embedded spaces: the field equations,” *Grav. Cosmol.*, vol. 13, no. 2, p. 127, 2007.
- [43] V. I. Noskov, “Model of Embedded Spaces: Peculiarities of Dynamical Embedding and Geometry,” *Grav. Cosmol.*, vol. 19, no. 4, p. 257, 2013.
- [44] V. I. Noskov, “The possibility of relativistic Finslerian geometry,” *J. Math. Sciences*, vol. 153, no. 6, p. 799, 2008.
- [45] V. I. Noskov, “Model of Embedded Spaces: Gravitation and Electricity,” *Grav. Cosmol.*, vol. 22, no. 2, p. 199, 2016.
- [46] V. I. Noskov, “Redshift in the Model of Embedded Spaces,” *Grav. Cosmol.*, vol. 23, no. 4, p. 316, 2017.
- [47] V. I. Noskov, “On geometrization of Classical Fields (Model of Embedded Spaces),” *Grav. Cosmol.*, vol. 29, no. 2, p. 128, 2023. <http://arxiv.org/abs/2502.011744>.
- [48] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The classical Theory of Fields*. Butterworth/Heinemann, USA, 4 rev. engl. ed. ed., 1994.
- [49] D. Ivanenko and A. Sokolov, *Classical theory of field (new problems)*. Moscow, Leningrad: Gosizdat (in Russian), second ed ed., 1951.
- [50] P. Higgs, “Broken symmetries and the masses of gauge bozons,” *Physical Review Letters*, vol. 13, pp. 508–509, 1964.
- [51] V. I. Smirnov, *Course of Higher Mathematic*, vol. 4. Moscow: Gosizdat (in Russian), 3 ed., 1953.
- [52] Y. D. Bayukov, “Observation of the gamma resonance of the long-lived ^{109m}Ag isomer with the help of gravitational gamma spectrometer,” *Letters to JEPT*, vol. 90, no. 7, pp. 547–551, 2009. In Russian.
- [53] V. F. Panov, “Rotating of the Early Universe,” *Sov. Phys. J.*, vol. 28, p. 981, 1985.

Научное издание

Носков Виталий Иванович

**О ГЕОМЕТРИЗАЦИИ
КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ**
(Модель Вложенных Пространств)

Монография

Издано в авторской редакции.

Издательство «Знание-М» (654029, г. Новокузнецк, Вокзальная 3-47),
e-mail: id_piar@mail.ru
Объем данных – 8,7 Мб
Подписано к использованию: 25.11.2025
Тираж 10 экз. Усл. печ. л. – 2,79. Заказ № 8353.

Издано в научных и учебных целях.



Смыслим в издательском деле!
Наши книги в Интернет-магазине **www.litres.ru/logos**

центр-логос.рф

BK vk.com/cnzlogos

logos.book@mail.ru

ISBN: 978-5-00255-452-2

