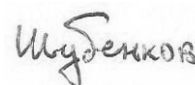


Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Пермский государственный национальный
исследовательский университет»

На правах рукописи



Шубенков Иван Сергеевич

Конвекция одно- и многокомпонентных жидкостей в пористых слоях

Специальность 1.1.9 —

«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Любимова Татьяна Петровна

Пермь — 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	4
ВВЕДЕНИЕ.....	6
Глава 1. КОНВЕКЦИЯ ТРЁХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ	14
1.1. Введение.....	14
1.2. Конвекция трёхкомпонентной смеси в горизонтальном пористом слое в статическом поле тяжести.....	26
1.2.1. Постановка задачи, основные уравнения и граничные условия.....	26
1.2.2. Спектрально-амплитудная задача	33
1.2.3. Линейный анализ устойчивости.....	34
1.2.4. Нелинейные конвективные режимы	46
1.3. Влияние вибраций на возникновение и нелинейные режимы конвекции трёхкомпонентной смеси в горизонтальном пористом слое.....	56
1.3.1. Постановка задачи, основные уравнения и граничные условия.....	56
1.3.2. Оценка размерных параметров системы для проверки применимости метода осреднения	57
1.3.3. Метод осреднения.....	60
1.3.4. Спектрально-амплитудная задача	62
1.3.5. Линейный анализ устойчивости.....	63
1.3.6. Нелинейные конвективные режимы	69
1.4. Заключение по главе	76
Глава 2. ТРЁХМЕРНЫЕ РЕЖИМЫ КОНВЕКЦИИ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ В НАКЛОННОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ.....	78
2.1. Введение.....	78

2.2. Возникновение и нелинейные режимы конвекции в наклонном пористом слое под действием вертикального градиента температуры.....	81
2.2.1. Постановка задачи, определяющие уравнения и граничные условия.....	81
2.2.2. Линейная устойчивость состояния механического равновесия	83
2.3. Нелинейные режимы конвекции	89
2.3.1. Параметры задачи и расчётная сетка	89
2.3.2. Результаты расчётов	92
2.4. Нелинейные режимы для продольных мод конвекции.....	94
2.4.1. Сведение трёхмерной постановки задачи к двумерной.....	94
2.4.2. Результаты расчётов	97
2.5. Заключение по главе	104
Глава 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ КОНВЕКЦИИ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ СИСТЕМАХ, ИМИТИРУЮЩИХ ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ СКЛАДКИ	105
3.1. Введение.....	105
3.2. Постановка и геометрия задачи, определяющие уравнения и граничные условия	107
3.3. Параметры задачи и численная реализация	110
3.4. Антиклинальная складка. Эволюция структур течения.	112
3.5. Синклинальная складка. Близкие проницаемости слоёв.	119
3.6. Заключение по главе	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	130
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	133

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

V – скорость фильтрации

t – время

P – давление

T – температура

$\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n-1})$ – вектор концентраций

ϕ – пористость

ρ – плотность жидкости

ν – кинематическая вязкость жидкости

K – проницаемость пористой матрицы

g – ускорение свободного падения

\mathbf{y} – единичный вектор, направленный вверх

$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_C$ – коэффициент теплового расширения

$\mathbf{I} = (1, \dots, 1)$ – вектор-столбец

$\mathbf{B} = \text{diag}(\beta_{C_1}, \dots, \beta_{C_{n-1}})$ – диагональная матрица коэффициентов концентрационного расширения

$\beta_{C_i} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial C_i} \Big|_{T, C_j, j=1, \dots, n-1, j \neq i}$ – коэффициент концентрационного расширения

($i = 1, \dots, n - 1$ – индекс компоненты смеси, n – число компонент)

$b = \frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f}$ – отношение объёмных теплоёмкостей

$(\rho c)_p$ – эффективная теплоёмкость пористой среды

$(\rho c)_f$ – теплоёмкость жидкой смеси

$\chi = \frac{\lambda^*}{(\rho c)_f}$ – эффективный коэффициент температуропроводности пористой среды

λ^* – эффективная теплопроводность пористой среды

\mathbf{D} – матрица коэффициентов молекулярной диффузии

\mathbf{D}_T – вектор коэффициентов термодиффузии

$Ra = \frac{Kg\beta_T\Delta TL}{\nu\chi}$ – аналог числа Рэлея для пористой среды (Глава 1)

$Ra_v = \frac{K\phi(a\omega\beta_T\Delta T)^2}{2\nu\chi}$ – вибрационное число Рэлея

$\varepsilon = \phi \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)^*}$ – нормализованная пористость

$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = -\mathbf{C}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C}_0)\beta_T^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}_T$ – вектор отношений разделения

$\mathbf{Le} = \chi(\mathbf{D})^{-1}$ – диагональная матрица чисел Льюиса ($Le_{11} = \chi/D_{11}$, $Le_{22} = \chi/D_{22}$)

k – волновое число

a – амплитуда вибраций

ω – частота вибраций

\mathbf{n} – единичный вектор оси вибраций

\mathbf{w} – соленоидальная часть вектора средней температуры

$\delta = \frac{\Omega^2/\phi}{1+\Omega^2/\phi^2}$ – параметр, позволяющий учесть вязкость жидкости при термовибрационной конвекции

$\Omega = \frac{\omega K}{\nu}$ – безразмерная частота вибраций

$R^2 = Ra = \frac{g\beta Ah^2 K}{\nu\chi}$ – аналог числа Рэлея для пористой среды (Глава 2)

$\zeta = k_z/k$ – параметр трёхмерности ($k = (k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$)

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования

Конвективные процессы в пористых средах являются предметом повышенного научного интереса в частности в связи с задачами о течениях подземных вод и эксплуатации геотермальных резервуаров. Другими важными приложениями являются фильтрация загрязняющих веществ, добыча нефти и пищевая промышленность, а также охлаждение электронных компонентов, теплоизоляция и проблемы безопасности в активных зонах ядерных реакторов.

Реальные жидкости, используемые в промышленности, а также встречающиеся в природе и быту, в большинстве случаев являются многокомпонентными. Их поведение может существенно отличаться от поведения однокомпонентных жидкостей и требует углублённого и всестороннего изучения. Конвективные процессы в однокомпонентных жидкостях и бинарных смесях достаточно полно исследованы, в то же время количество работ, посвященных трёхкомпонентным и более сложным системам, невелико, поскольку данное направление только в настоящее время начинается активно развиваться с ростом мощностей вычислительной техники и улучшением измерительных возможностей.

Задачи конвекции многокомпонентных жидкостей в пористых средах особенно актуальны, когда речь идёт об описании движения нефти в недрах земли. Благодаря наличию геотермального градиента, в нефтеносных пластах имеют место конвективные, а также диффузионные и термодиффузионные процессы. Несмотря на то, что в пористых средах эти процессы (в том числе конвективные) происходят очень медленно, за время существования нефтеносного пласта они могут внести существенный вклад в пространственное распределение компонентов в месторождениях углеводородов. В промышленности эффект термодиффузии используется для разделения изотопов или фракций жидких или газовых смесей на отдельные компоненты в

термодиффузионных (термогравитационных) колоннах. Этим способом можно успешно разделять компоненты, температура кипения которых отличаются на десятые доли градуса, проводить обогащение урана и т.д.

Одним из эффективных средств воздействия на структуру и устойчивость конвективных течений жидкостей являются вибрации. С помощью вибраций можно влиять на порог конвекции и осуществлять управление течением жидкостей. Значительный вклад в теорию вибрационной гидромеханики внесли ученые Пермской гидродинамической школы. Данное направление является актуальным и в настоящее время.

Экспериментальное изучение течений жидкостей в пористых средах является сложным, поэтому необходимо использовать теоретические методы, включающие в себя аналитическое и численное решение систем уравнений, а также прямое численное моделирование, в том числе с использованием математических пакетов и программных систем, таких как Ansys Fluent и т.п.

Настоящая работа направлена на изучение конвективных процессов, в пористых слоях, насыщенных одно- и многокомпонентными жидкостями, при вертикальном градиенте температуры. Рассматриваются устойчивость механического равновесия и надкритические режимы конвекции, способные существенно повлиять на распределение компонентов смеси. Особое внимание уделяется структуре конвективных течений, которая может сильно зависеть от конфигурации слоя, угла его наклона, нагрева и физических параметров смеси.

Целью диссертационной работы является определение условий устойчивости механического равновесия и характеристик нелинейных режимов конвекции одно- и многокомпонентных жидкостей в горизонтальном и наклонном пористых слоях при вертикальном градиенте температуры.

Для достижения поставленной цели решались следующие **задачи**:

1) Исследовать устойчивость механического равновесия и нелинейные режимы конвекции трёхкомпонентной смеси с эффектом Соре в горизонтальном пористом слое, подогреваемом снизу, в том числе при наличии вибраций.

2) Исследовать возникновение и развитие трёхмерных конвективных структур в насыщенном однокомпонентной жидкостью наклонном пористом слое при вертикальном градиенте температуры.

3) В рамках трёхмерного подхода выполнить прямое численное моделирование конвекции в насыщенных бинарной жидкостью трёхслойных пористых системах, имитирующих антиклинальную и синклиналиную геологические складки, под действием геотермального градиента.

Методология и методы исследования

Для исследования линейной устойчивости механического равновесия бинарной и трёхкомпонентной смесей использовались уравнения термоконцентрационной конвекции с эффектом Соре в приближении Буссинеска. Линейные задачи устойчивости решались численно методом построения фундаментальной системы решений. Основным инструментом нелинейного исследования являлся вычислительный эксперимент, для реализации которого применялись метод конечных разностей (численное решение в переменных функции тока) и вычислительный пакет Ansys Fluent, реализующий метод конечных объёмов (численное решение в естественных переменных скорость–давление).

Научная новизна работы состоит в том, что в ней впервые:

1) Обнаружена длинноволновая мода колебательной неустойчивости трёхкомпонентной смеси с эффектом Соре в подогреваемом снизу горизонтальном пористом слое. Найден диапазон параметров, в котором эта мода является наиболее опасной. Получена карта устойчивости, определены характер возбуждения конвекции и характеристики надкритических конвективных режимов.

2) С использованием модели, учитывающей вязкие члены в уравнениях для пульсаций, исследовано влияние высокочастотных вертикальных вибраций малой амплитуды на возникновение и развитие конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном пористом слое, насыщенном трёхкомпонентной смесью.

Выявлено, что воздействие вибраций приводит к расширению области параметров, в которой длинноволновые возмущения являются более опасными. Показано, что вибрации повышают устойчивость механического равновесия для ячеистых возмущений и снижают частоту наиболее опасных колебательных возмущений.

3) Установлено, что за наступление кризиса механического равновесия наклонного слоя пористой среды, насыщенной однокомпонентной жидкостью, при вертикальном градиенте температуры, при любых углах наклона слоя ответственны трёхмерные возмущения, имеющие форму продольных валов.

4) Обнаружено, что при трёхмерном конвективном движении, возникающем после потери устойчивости, траектории частиц жидкости внутри каждого конвективного вала представляют собой эллипсы. Нормаль к плоскости, в которой лежат эти эллипсы, перпендикулярна вектору силы тяжести и наклонена под некоторым углом к оси валов. По мере увеличения надкритичности этот угол увеличивается.

5) Определены условия возникновения конвекции, а также структура и интенсивность конвективных движений, возникающих после потери устойчивости механического равновесия в насыщенных бинарными смесями пористых слоях, имитирующих антиклинальные и синклинальные геологические складки, под действием геотермального градиента.

Практическая и теоретическая значимость

Результаты проведённых исследований важны с точки зрения фундаментальной механики жидкости, для развития знаний в области гидродинамики и теплопереноса, они расширяют понимание процессов тепловой конвекции многокомпонентных жидкостей под действием гравитационного и вибрационного полей. Экспериментальное изучение течений жидкостей в пористых средах является сложным, поэтому существует необходимость использовать теоретические методы.

Полученные данные могут помочь точнее прогнозировать процессы миграции и формирования залежей углеводородов, а также оценить эффективность естественного перемешивания компонент жидкостей в подземных резервуарах. Другим важным приложением может являться проектирование хранилищ токсичных или радиоактивных отходов в геологических формациях, где температурные градиенты могут инициировать нежелательную циркуляцию грунтовых вод. Исследование теплопереноса в пористых слоях актуально для оптимизации работы геотермальных систем и повышения КПД теплообменников, заполненных зернистыми или пористыми материалами.

Сочетание многокомпонентности смеси и сложности рассматриваемой геометрии позволяет отойти от идеализированных физических моделей и приблизиться к реалистичному описанию процессов, протекающих в земной коре и промышленных установках. На сегодняшний день данная тематика изучена недостаточно.

Положения, выносимые на защиту:

- 1) В задаче об устойчивости механического равновесия трёхкомпонентной смеси с эффектом Соре в горизонтальном пористом слое имеется диапазон значений отношений разделения, в котором длинноволновая мода колебательной неустойчивости является наиболее опасной, а конвекция возбуждается путём прямой бифуркации.
- 2) Воздействие высокочастотных вертикальных вибраций малой амплитуды на конвекцию в насыщенном трёхкомпонентной смесью горизонтальном пористом слое приводит к сдвигу точек перехода от длинноволновых мод неустойчивости равновесия к ячеистым, расширяя диапазон значений параметров, в котором длинноволновые моды более опасны, а также повышает порог конвекции для ячеистых мод и уменьшает частоту колебательных мод.
- 3) За кризис механического равновесия наклонного слоя пористой среды, насыщенной однокомпонентной жидкостью, при вертикальном градиенте

температуры, во всём диапазоне углов наклона слоя ответственны трёхмерные возмущения, имеющие форму продольных валов, при этом имеется отличная от нуля компонента скорости жидкости вдоль оси валов, так что траектории движения жидких частиц представляют собой эллипсы.

4) В насыщенных бинарными смесями трёхслойных пористых системах, имитирующих антиклинальную и синклинальную геологические складки, находящиеся под действием геотермального градиента, при проницаемостях слоёв, превышающих пороговые значения, наблюдается слабое конвективное движение, охватывающее всю систему, а при более высоких проницаемостях формируются продольные валы, накладывающиеся на слабое сквозное течение.

Достоверность результатов работы основывается на использовании проверенных методов и соответствии результатов численных расчётов аналитическим формулам (в предельных случаях) и результатам других авторов. Для выполнения расчетов использовались известные и хорошо зарекомендовавшие себя в гидродинамических задачах численные методы (методы стрельбы, конечных разностей, конечных объёмов). В ряде случаев были получены близкие результаты при использовании различных численных методов. Расчетные алгоритмы верифицировались с использованием различных численных схем. Проводился анализ сходимости результатов при изменении шага расчётной сетки.

Апробация результатов

Результаты диссертационной работы были представлены и обсуждались на следующих конференциях: Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Физика для Пермского края" (Пермь, 2021); Всероссийская конференция с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения» (Пермь, 2022, 2023, 2025); Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2023, 2025); XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023); Всероссийская конференция «Математическое моделирование в механике» (Красноярск, 2024);

Международный симпозиум «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2024); Отчётная конференция «Фундаментальная механика в новых материалах, конструкциях, технологиях» (Пермь, 2024, 2025); 15th, 16th International Meeting on Thermodiffusion (Tarragona, Spain 2023; Milano, Italy, 2025); Всероссийская конференция «XLI Сибирский теплофизический семинар» (Новосибирск, 2025); XXVI Международная конференция "НеЗаТеГиУс-2026" (Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность) (Московская обл., 2026); Всероссийская конференция «Механика в новых материалах, конструкциях и технологиях» (Пермь, 2026).

Помимо перечисленных выше конференций результаты исследований также докладывались на Пермском гидродинамическом семинаре имени проф. Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова (Пермь, 2025, 2026; номера заседаний: 1591, 1608).

Исследования, результаты которых вошли в диссертацию, проводились в рамках крупного научного проекта при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2024-535 от 23.04.2024).

Публикации

Материалы диссертации изложены в 6 работах [1-6], опубликованных в научных журналах из списка ВАК, 5 из которых также индексируются в международных базах данных Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора

Автором диссертации проведена большая часть численных расчётов, включающих исследование линейной устойчивости и исследование нелинейных режимов конвекции с использованием метода конечных разностей и программного пакета Ansys Fluent. Численные расчеты Раздела 3.4 осуществлялись совместно с соавтором публикации Н.А. Ожгибесовой. Все вычислительные программы для исследования линейной устойчивости и большинство программ, реализующих метод конечных разностей, разработаны

автором диссертации. Постановка задач, обсуждение и анализ результатов осуществлялись совместно с научным руководителем Т.П. Любимовой.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 148 страниц, включая 78 рисунков и 7 таблиц. Список литературы содержит 139 наименований.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, Любимовой Татьяне Петровне, за неоценимую помощь и поддержку, оказанную на всех этапах работы над диссертацией и в целом на всём научном пути.

Также автор благодарит весь коллектив лаборатории «Вычислительной гидродинамики» ИМСС УрО РАН за экспертные рекомендации, конструктивную критику и ценные советы.

Особая признательность адресована Ожгибесовой Надежде Алексеевне за помощь и содействие в подготовке текста диссертации.

Глава 1. КОНВЕКЦИЯ ТРЁХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ

1.1. Введение

Конвекция является одним из наиболее фундаментальных явлений в гидродинамике. Она может возникать при наличии температурного градиента, градиента концентрации примесей и многих других факторов. Классической задачей теории гидродинамической устойчивости является задача Рэля, сформулированная в 1916 году [7]. В работе рассмотрена устойчивость равновесия вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном слое, подогреваемом снизу. Было впервые получено точное аналитическое решение данного типа задач, что стало прорывом в теории гидродинамической устойчивости. Доказано, что конвекция возникает, когда выталкивающая сила становится способной преодолеть стабилизирующее влияние вязкого трения и тепловой диффузии, а также был определён критерий, когда система теряет устойчивость и переходит от состояния равновесия к конвективному режиму – критическое число Рэля. Помимо этого, решение Рэля предсказывало структуру возникающих течений.

В классической постановке задачи Рэля рассматриваются свободные границы. Однако в реальных системах граничные условия, как правило, являются значительно более сложными. Наиболее реалистичный случай – жидкость между двумя твёрдыми пластинами, на которых выполняется условие прилипания, был рассмотрен в работе [8]. Было показано, что вязкое трение значительно повышает порог конвекции (почти в 3 раза по сравнению со случаем свободных границ). Стало понятно, что тип граничных условий очень сильно влияет на устойчивость системы.

Случай, когда нижняя граница твердая, а верхняя – свободная (контакт с газом без учета поверхностного натяжения), рассматривался в работе [9]. Было получено промежуточное значение критического числа Рэля между случаями свободных и твёрдых границ, что показывает монотонную зависимость устойчивости системы от степени «зажатости» слоя.

Классические задачи предполагали границы с бесконечной теплопроводностью (изотермические), однако в реальности стенки имеют конечную толщину и теплопроводность. Такие условия исследовались в работе [10]. Оказалось, что снижение теплопроводности границ приводит к снижению устойчивости системы и снижению волнового числа критических возмущений.

В монографии [11] систематизированы все имеющиеся на тот момент решения, приведены уточнённые численные значения для различных граничных условий и расширена задача путём добавления факторов вращения и магнитного поля.

Важнейшим этапом в физике конвекции стал переход от линейной теории устойчивости к анализу нелинейных эффектов, позволяющему объяснить, какую форму примет конвективное движение и как оно будет эволюционировать при дальнейшем росте надкритичности. Первые фундаментальные шаги в этом направлении были сделаны в работе [12]. Был предложен метод разложения по малому параметру (амплитуде конвекции), что позволило описать, как энергия передается от основного состояния к высшим гармоникам, формируя устойчивые стационарные валы.

Наибольший вклад в классификацию нелинейных режимов внес Фридрих Буссе [13]. Исследовалась устойчивость уже возникших конвективных валов по отношению к вторичным возмущениям. Была построена область на плоскости (Ra, k) (число Рэлея – волновое число), внутри которой конвективные валы остаются устойчивыми (диаграмма Буссе). Также были описаны типы неустойчивости: зигзагообразная неустойчивость (zigzag), перекосно-реактивная (cross-roll) и неустойчивость наклонных валов. Данная работа дала объяснение, почему в экспериментах наблюдаются структуры разного размера и формы при одних и тех же параметрах.

Книга Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкого [14] является одним из наиболее общих систематических изложений теории конвективной устойчивости несжимаемой жидкости. В частности, были изложены метод малых возмущений и спектральный анализ, приведён обзор исследований устойчивости равновесия и

нелинейных режимов конвекции (в том числе сеточным методом), исследована структура течений в замкнутых полостях, показано, как нелинейное взаимодействие мод приводит к смене режимов и т.д.

Наиболее полным обзором, содержащим описание структур конвективных течений, считается работа [15]. В ней систематизированы известные формы конвекции, подробно разобраны механизмы, по которым система выбирает конкретный размер ячеек. Показано, что структура зависит не только от числа Рэлея, но и от предыстории процесса (эффект гистерезиса). Исследовано как нелинейные процессы приводят к установлению стационарного или хаотического режима течения.

Огромное прикладное значение для задач добычи нефти, гидрогеологии, теплоизоляции, биомедицинских технологий и др. имеет изучение конвекции в насыщенных жидкостями пористых средах. В литературе задача в такой постановке известна как задача о конвекции Рэлея-Дарси. Модель пористой среды предполагает, что жидкость заполняет пустоты твердой матрицы. Это вносит принципиальные изменения в уравнения движения, так как вязкое трение теперь определяется не только внутренним трением слоев жидкости, но и сопротивлением пористой среды. Для описания таких систем используется закон Дарси, отражающий линейную связь между скоростью фильтрации и градиентом давления. Переход к пористой среде снижает порядок уравнений, но вводит новые физические параметры, сильно влияющие на динамику конвективных структур. Также важно учитывать, что в пористой среде температура твёрдого скелета и жидкости могут не совпадать, что приводит к локальной тепловой неравновесности. Порог устойчивости для таких систем был впервые получен в работах [16, 17]. Результаты работ по конвекции в пористых средах обобщены в монографии [18].

Многие жидкости, с которыми приходится иметь дело в природе и технике, не являются однокомпонентными, а представляют собой смесь нескольких веществ. В некоторых случаях поведение таких жидкостей значительно отличается от поведения однокомпонентных жидкостей.

Плотность бинарной смеси в отличие от однокомпонентной жидкости, определяется не только температурой, но и концентрацией примеси. Основная специфика бинарных смесей заключается в том, что поток массы возникает не только за счет градиента концентрации (диффузия), но и под влиянием градиента температуры. Это явление называется термодиффузией или эффектом Соре. Этот эффект наблюдается в смесях газов, жидкостей и даже твердых телах. Хотя существует феноменологическое описание, основанное на линейной неравновесной термодинамике, эффект Соре является многофакторным явлением, и однозначной микроскопической картины не существует [19]. Также в смесях возможны такие эффекты, как диффузионная теплопроводность (эффект Дюфура) и бародиффузия.

Ключевое отличие задачи о конвекции бинарной смеси от классической задачи Рэлея-Бенара заключается в том, что потеря устойчивости может происходить не только через монотонные моды (возникновение стационарных валов), но и через колебательные моды (бифуркация Хопфа). В работах [20, 21] было показано, что если компоненты смеси диффундируют с разной скоростью, в системе может начаться конвекция, даже если суммарный градиент соответствует устойчивой стратификации плотности. Это объясняется расфазировкой процессов выравнивания температуры и концентрации (быстрая теплопроводность и медленная диффузия).

В смесях с отрицательным эффектом Соре (когда термодиффузия стремится стабилизировать механическое равновесие) часто наблюдается подкритическая бифуркация: конвекция возникает скачком и при меньших надкритичностях, чем предсказывает линейная теория. В работах [22, 23] было теоретически предсказано и экспериментально подтверждено существование бегущих волн, которые перемещаются в горизонтальном направлении при стационарных внешних условиях.

Термодиффузия является основным механизмом промышленного разделения углеводородов [24]. В природе эффект Соре имеет множество проявлений, включая работу солнечных прудов [25] и микроструктуру океана

(образование чередующихся ламинарных и конвективных слоёв) [26]. В обоих случаях речь идет о соленой воде, в которой существует температурный градиент. Кроме того, тепловая диффузия играет важную роль в биологических системах, а именно, в переносе массы через биологические мембраны, вызванном малыми тепловыми градиентами в живой материи.

Процессы диффузии и конвекции играют ключевую роль в трансформации и смешивании жидких смесей. Процессы смешивания в жидких смесях представляют большой научный и промышленный интерес в нефтяных месторождениях, где они способствуют первоначальному распределению огромного количества компонентов смеси, образующей сырую нефть. Геотермический градиент может вызывать тепловую диффузию и должен учитываться при прогнозировании состава углеводородов, поскольку это важный фактор, влияющий на стратегию разработки нефтяных месторождений [27].

В связи с многочисленными фундаментальными и промышленными приложениями, такими как океанография, астрофизика, геология и химические процессы, широко изучается двойная диффузионная конвекция в насыщенной жидкостью пористой среде под действием градиентов температуры и концентрации. Обзор актуальных разработок и публикаций в этой области можно найти в [18, 28]. В задачах фильтрации грунтовых вод, где, как правило, представляет интерес движение фронта концентрации растворенного вещества, обычно изучается система, состоящая из слоёв пористой среды с различными свойствами. Анализ данных нефтегазоразведки показывает наличие тепловых аномалий, которые можно объяснить тепловой конвекцией [29-32].

Фундаментальные основы термодинамического описания конвективных течений в сложных системах были заложены И.Г. Шапошниковым [33], который одним из первых в СССР начал рассматривать вопросы конвекции в смесях. Исчерпывающий анализ влияния эффекта Соре на устойчивость механического равновесия представлен в работе [34]. Исследовались сложные нелинейные режимы конвекции в бинарных и многокомпонентных смесях, включая влияние вибраций на эти системы.

В работе [35] исследовано влияние модуляции параметров системы. Показано, что она может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее действие, причем в бинарных смесях этот эффект выражен гораздо ярче, чем в чистой жидкости, из-за наличия конкурирующих временных масштабов (времени диффузии и периода модуляции). В [36] исследовались переходы между различными конвективными режимами (валы, гексагоны, колебательные режимы) под влиянием магнитных полей и модуляции температуры на границах. Это критически важно для задач отбора структур в нелинейной области.

Переход к пористой среде в задачах конвекции бинарных смесей порождает одну из самых богатых с точки зрения физики моделей – задачу Дарси-Рэля с учётом эффекта Соре. Специфика термоконцентрационной неустойчивости делает систему очень чувствительной к внешним воздействиям.

В работе [37] установлено, что при нормальном эффекте Соре неустойчивость носит монотонный характер, а порог устойчивости значительно ниже, чем в свободной жидкости. При аномальном эффекте Соре возникает конкуренция: теплопроводность стремится поднять жидкость, а тяжелый компонент, скопившийся внизу из-за эффекта термодиффузии, удерживает её. Это повышает устойчивость равновесия, а возникающая неустойчивость носит колебательный характер.

Отсутствие инерционных членов в законе Дарси упрощает нелинейное исследование пористых систем, но тепловая инерция пористой матрицы усложняет динамику. В работе [38] показано, что в пористой среде нелинейное взаимодействие тепловых и концентрационных полей приводит к формированию устойчивых режимов даже при параметрах, где в случае обычной жидкости режим стал бы хаотическим.

В работе [39] показано, как модуляция температуры границ влияет на выбор между стационарными и колебательными режимами. Обнаружены режимы параметрического резонанса, когда частота внешнего воздействия совпадает с собственной частотой колебаний смеси.

В работе [40] проведено численное исследование профиля концентрации раствора, насыщающего низкопроницаемый грунт. Обнаружено, что примесь, накапливаемая у границы фазового перехода (переход жидкость-пар внутри почвы), увеличивает плотность смеси и может приводить к развитию концентрационной конвекции, которая взаимодействует с восходящим течением (вынужденной конвекцией). Определен порог устойчивости вынужденного течения и воздействие на него возникающей концентрационной конвекции. Показано, что при интенсивном подтоке к поверхности испарения происходит быстрый рост концентрации примеси на этой границе, значение которой достигает концентрации насыщения. В этом случае примесь выпадает в осадок. В режиме медленного испарения происходит диффузионный отток примеси из области высокой концентрации, что предотвращает развитие конвективного течения.

Задача о формировании профиля концентрации соли в высокопроницаемом грунте при испарении воды и подъемном течении раствора рассмотрена в [41]. Показано, что профиль концентрации соли может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Развитие неустойчивости приводит к возникновению концентрационной конвекции. При небольшой интенсивности испарения в грунте устанавливается подъемно-криволинейное или циркуляционное течение, заполняющее весь слой. Интенсивное испарение приводит к формированию мелкой стохастической структуры солевых «капель».

У многокомпонентных смесей (три и более компонент) количество степеней свободы системы резко возрастает, приводя к возникновению явлений, невозможных в бинарных смесях. Главное отличие от бинарных смесей – возможность существования нескольких различных временных масштабов диффузии. Это порождает сложные режимы, такие как смешанные моды (одни компоненты дестабилизируют слой, а другие стабилизируют) и многочастотные колебания (из-за конкуренции теплопроводности и диффузии компонент смеси).

Большинство экспериментальных методов изучения многокомпонентных жидкостей так или иначе основаны на оптических схемах. Однако для

трёхкомпонентных смесей оптические методы гораздо сложнее и менее надежны, чем для бинарных. В настоящее время использование оптических методов для изучения смесей с более чем тремя компонентами представляется недостижимым. Для перехода к действительно многокомпонентным смесям разработка новых экспериментальных методов является одной из важнейших задач для будущего развития этой области, поскольку для формулирования улучшенных теоретических концепций необходима надежная база данных.

Известно, что эффект Соре довольно тонкий и чувствительный к гравитационным силам. Существует множество способов его измерения, такие как ячейка Соре, метод отклонения луча, метод вынужденного рассеяния Рэлея с помощью термодиффузии, конвективная связь и термогравитационный метод [42]. Часто высказывалась необходимость использования микрогравитации для измерения коэффициента Соре [43]. В условиях микрогравитации в космосе был проведен ряд экспериментов, в результате которых были измерены коэффициенты диффузии и коэффициенты Соре для нескольких жидких смесей [44-52].

Недавно на Международной космической станции были проведены эксперименты по измерению коэффициентов переноса трёхкомпонентной смеси тетралина, изобутилбензола и *n*-додекана [53-56]. Ранее были измерены коэффициенты термодиффузии бинарных смесей жидкостей, входящих в состав этой смеси [56]. Также была изучена тройная смесь воды, этанола и триэтиленгликоля [57]. Авторы определили коэффициенты диффузии и термодиффузии этой смеси для нескольких вариантов массовых долей компонентов и для их бинарных вариаций.

Первые общие подходы к исследованию трёхкомпонентных смесей были заложены в работе [58]. В монографии [59] дано описание линейной устойчивости многокомпонентных смесей и предсказаны новые типы неустойчивости, связанные с перекрестной диффузией. Показано, как собственные значения матрицы коэффициентов Соре определяют направление разделения компонентов.

В пористой среде к сложности диффузионных процессов добавляется влияние пористой матрицы, которая выравнивает скорости течения, но усиливает различие в эффективных коэффициентах диффузии. Конвективная система, представляющая собой многокомпонентную жидкость в пористой среде – это ключевая модель для описания процессов в нефтеносных пластах, где нефть является многокомпонентной смесью углеводородов. В [60] была развита теория термогравитационного разделения в пористых средах.

Конвекция в пористых средах, насыщенных бинарными жидкостями, к настоящему времени изучена достаточно хорошо [61-63]. В то же время, количество работ по конвекции жидкостей с тремя и более компонентами в пористых средах [64, 65] невелико.

В работе [66] исследовалась конвекция в квадратной полости пористой среды, насыщенной трёхкомпонентной смесью углеводородов, нагреваемой снизу. Было обнаружено множество различных режимов течения. Изучены происхождение и развитие конвективных течений одно- и двухвихревых структур. В работе [67] моделировалась конвекция той же смеси в вытянутой по горизонтали прямоугольной полости (соотношение сторон 5:1), состоящей из двух слоёв с одинаковой пористостью и различными проницаемостями. Задача решалась в рамках модели Дарси-Буссинеска с учетом термодиффузии. Показаны начальные стадии возникновения и развития конвекции. При значительной разнице проницаемостей на коротких временах локальное возникновение конвекции наблюдается в слое с большей проницаемостью. Аналогичное поведение наблюдалось для однокомпонентной жидкости в работах [68, 69]. В общем случае, весь формирующийся поток смещается в область слоя с большей проницаемостью. Более легкие компоненты смеси накапливаются вблизи горячей нижней границы из-за эффекта термодиффузии.

В работе [70] обнаружено, что задача о стационарной двумерной конвекции в замкнутой полости пористой среды произвольной формы с идеально проводящими границами, нагреваемыми снизу, имеет бесконечное число решений, образующих однопараметрическое семейство. Позднее это свойство

было названо косимметрией. В случае бесконечного горизонтального слоя эта неоднозначность сводится к тривиальному переносу.

В работе [71] в плоской постановке рассматривается конвекция многокомпонентной жидкости, насыщающей пористую среду, в контейнере прямоугольного сечения. Данная задача относится к классу косимметричных систем, для которых характерно рождение непрерывного семейства стационарных решений в результате первого перехода. Предложен спектрально-разностный метод исследования задачи, сохраняющий косимметрию исходных дифференциальных уравнений для конечномерного аналога и позволяющий рассчитывать семейства стационарных конвективных режимов.

Исследование сценариев развития таких семейств проведено в [72]. Рассмотрена конвекция двух- и трехкомпонентной жидкости и проанализированы одно- и разнонаправленные вертикальные градиенты температуры и концентраций. Изучен новый сценарий образования непрерывного семейства стационарных решений, реализующийся в случае колебательной неустойчивости механического равновесия.

Для исследования режимов гравитационной конвекции многокомпонентной жидкости в работе [73] была разработана численная схема смещенных сеток. Разработана среда моделирования, позволяющая проводить расчет и визуализацию трёхмерных режимов, продолжать их по параметрам задачи, исследовать переходы от стационарных к нестационарным движениям, вычислять спектр устойчивости стационарных режимов. В дальнейшем авторами было предложено множество других численных схем [74-76].

Отдельным разделом гидродинамики является вибрационная конвекция. В нём изучаются возникновение осреднённых течений в жидкостях под воздействием высокочастотных вибраций. Вибрации создают переменные поля инерционных сил, которые при наличии неоднородностей плотности приводят к возникновению механизма термовибрационной конвекции даже в отсутствие статической силы тяжести (в условиях невесомости).

В работе [77] с помощью метода осреднения были впервые выведены замкнутые уравнения вибрационной конвекции. Показано, что высокочастотные вибрации могут стабилизировать равновесие системы или, наоборот, вызывать неустойчивость в конфигурациях, которые в обычных условиях устойчивы (например, подогрев сверху).

В работе [78] экспериментально исследована термовибрационная конвекция жидкости в плоском горизонтальном слое, нагреваемом сверху и подверженном круговым поступательным вибрациям в горизонтальной плоскости. Показано, что круговые вибрации достаточной интенсивности приводят к пороговому возбуждению вибрационной конвекции жидкости, устойчиво стратифицированной в гравитационном поле. Установлено, что термовибрационная конвекция в плоском слое, нагреваемом сверху, развивается в виде двумерных конвективных валов, размер которых определяется толщиной слоя.

В пористой среде вибрации также порождают осредненную подъемную силу, однако закон Дарси накладывает ограничения на пульсационную составляющую скорости. Исследования показали, что в пористой среде вибрационный механизм эффективно перемешивает жидкость, а влияние вибраций на порог устойчивости зависит от ориентации вектора вибраций относительно градиента температуры.

В бинарных смесях вибрационное воздействие накладывается на эффект Соре, что приводит к необычным резонансным явлениям. В случае колебательной неустойчивости наличие двух типов инерции (тепловой и концентрационной) в сочетании с внешней периодической силой приводит к возникновению квазипериодических режимов. Также, вибрации могут изменять направление разделения компонентов. Например, если в обычных условиях тяжелый компонент скапливается внизу, то специфическая конфигурация вибраций может заставить его подниматься вверх (аномальное термодиффузионное разделение).

Монография [79] является расширением классической теории Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкого, систематизирующим знания о вибрационном воздействии. В

ней детально изложена теория осреднения для различных типов границ и сред, изложены условия устойчивости для слоёв, находящихся под действием вибраций произвольного направления, подробно разобраны задачи о вибрационной конвекции в условиях микрогравитации, а также дано теоретическое описание нелинейных структур, возникающих при высоких надкритичностях. Детально анализируется, как угол между вектором вибрации и градиентом температуры влияет на порог конвекции, а также исследуется случай вращательных вибраций (либрации). Рассматриваются негармонические вибрации, а также взаимодействие нескольких частот вибраций и возможность резонансного возбуждения мод, которые были бы устойчивы при монохроматическом воздействии. Работа продемонстрировала, что вибрации – это мощный инструмент управления теплообменом. С помощью подбора параметров вибраций можно подавлять или интенсифицировать конвекцию, а также создавать направленные потоки вещества.

В работе [80] рассматривается влияние вибраций на возникновение конвекции в пористой среде, насыщенной однокомпонентной жидкостью или бинарной смесью. Обнаружено, что в случае термоконцентрационной конвекции вибрации уменьшают волновое число критических возмущений. Выведено новое аналитическое соотношение для получения порога длинноволновой моды конвекции. Показано, как полученные результаты могут быть использованы для увеличения разделения компонентов смеси.

В работе [81] исследовалось влияние продольных высокочастотных вибраций малой амплитуды на конвективную устойчивость трёхкомпонентной смеси в горизонтальном слое. Найдено, что вибрации приводят к дестабилизации в случае нагрева снизу и к стабилизации в случае нагрева сверху. Также, вибрации влияют на диапазон параметров, где длинноволновая неустойчивость наиболее опасна. Обнаружены новые колебательные моды неустойчивости, которые приводят к существованию конвекции в условиях невесомости.

В серии работ исследовалось влияние вибраций на тепловую [82] и термоконцентрационную [83] конвекцию в двухслойной системе, состоящей из

слоя жидкости и пористой среды, насыщенной той же жидкостью. Исследовались высокочастотные малоамплитудные вибрации. Установлено, что вертикальные вибрации стабилизируют состояние равновесия при подогреве снизу. С ростом величины вибрационного воздействия, локальная конвекция в подслое жидкости сменяется крупномасштабной, охватывающей весь слой. При горизонтальных вибрациях стабилизация проявляется только при малых вибрационных ускорениях, а их дальнейший рост снижает порог устойчивости. Горизонтальные вибрации, в отличие от вертикальных, способны создавать конвекцию при нагреве двухслойной области сверху. В такой ситуации течение имеет исключительно термоконцентрационную вибрационную природу.

Настоящая глава посвящена изучению возникновения и нелинейных режимов вызванной эффектом Соре конвекции трёхкомпонентной жидкости в горизонтальном пористом слое, нагреваемом снизу. В Разделе 1.2 аналитически и численно исследуется линейная устойчивость состояния равновесия системы, находящейся в статическом поле тяжести, а также проводится численное исследование нелинейных режимов конвекции с использованием метода конечных разностей. Раздел 1.3 посвящён линейному и нелинейному исследованию влияния вибрации на данную систему. Вибрации предполагаются высокочастотными и малоамплитудными, их направление параллельно градиенту температуры.

1.2. Конвекция трёхкомпонентной смеси в горизонтальном пористом слое в статическом поле тяжести

1.2.1. Постановка задачи, основные уравнения и граничные условия

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой пористой среды, насыщенной трёхкомпонентной жидкостью (Рис. 1.1). В слое существуют установившиеся градиенты температуры и концентрации примесей. Границы слоя твердые, идеально теплопроводные, непроницаемые для вещества, на них

поддерживаются постоянные разные температуры. Вся система находится в статическом поле силы тяжести.

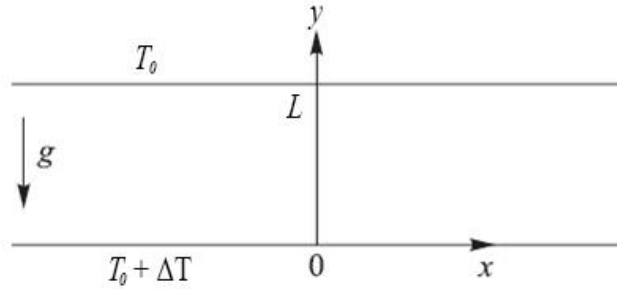


Рис. 1.1. Геометрия задачи

Предполагается, что отклонения температуры T и концентрации примесей C от средних значений достаточно малы. Тогда изменения плотности смеси во времени и пространстве также будут малыми. Считается, что плотность смеси линейно зависит от температуры и концентраций компонентов смеси:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_0) - \mathbf{B}(C - C_0)).$$

Плотность диффузионного потока массы растворённых компонентов можно записать в виде (смесь состоит из n компонентов, компонента n выбрана в качестве растворителя):

$$\mathbf{J}_i = -\rho_0 \left(\sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} \nabla C_j - D_{Ti} \nabla T \right), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Коэффициенты диффузии D и термодиффузии D_T , вообще говоря, зависят от температуры и концентрации. Однако при сделанных выше предположениях можно считать их постоянными величинами, определяющимися средними значениями температуры и концентрации.

Так как в однокомпонентной жидкости ($C_0 = 0$ или $C_0 = 1$) эффект термодиффузии отсутствует, коэффициент термодиффузии может быть записан в виде:

$$D'_T = C_0(1 - C_0)D_T$$

Это выражение широко используется при описании бинарных смесей. В отличие от коэффициентов диффузии, коэффициенты термодиффузии могут быть

как положительными, так и отрицательными. При $D_T < 0$ для примеси направление градиента температуры и термодиффузионного потока массы $(-\rho_0 D_T \nabla T)$ совпадают, в результате чего примесь перемещается в более нагретую область (нормальная термодиффузия). Если $D_T > 0$, то примесь будет перемещаться в более холодную область (анормальная термодиффузия).

Благодаря наличию термодиффузии, в области устанавливается градиент концентрации примеси, пропорциональный градиенту температуры:

$$\nabla C = -\frac{D_T}{D} \nabla T.$$

Во многих практических случаях термодиффузионное разделение компонент смеси мало и отклонение концентрации примесей от их среднего значения C_0 не превышает нескольких процентов. Тем не менее, этот эффект способен оказывать существенное влияние на порог конвекции и развитие конвективных режимов.

Уравнения Дарси-Буссинеска, описывающие конвективное движение многокомпонентной смеси с учётом эффекта Соре в пористой среде в поле тяжести имеют следующий вид [84]:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\nu}{K} \mathbf{V} + g(\beta_T(T - T_0) + \mathbf{B}(\mathbf{C} - \mathbf{C}_0))\mathbf{y}, \quad (1.1)$$

$$b \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)T = \chi \Delta T, \quad (1.2)$$

$$\phi \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{C} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{C} + \mathbf{C}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C}_0)\mathbf{D}_T \Delta T, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (1.4)$$

где \mathbf{V} – скорость фильтрации; t – время; P – давление; T – температура; $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n-1})$ – вектор концентраций; ϕ – пористость; ρ – плотность жидкости; ν – кинематическая вязкость жидкости; K – проницаемость пористой матрицы; g – ускорение свободного падения; \mathbf{y} – единичный вектор, направленный вверх; $\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_C$ – коэффициент теплового расширения; $\mathbf{I} = (1, \dots, 1)$ – вектор-столбец; $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(\beta_{C_1}, \dots, \beta_{C_{n-1}})$ – диагональная матрица коэффициентов

концентрационного расширения, $\beta_{C_i} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial C_i} \Big|_{T, C_j, j=1, \dots, n-1, j \neq i}$, $i = 1, \dots, n-1$ – индекс компоненты смеси (n – число компонент); $b = \frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f}$ – отношение объёмных теплоёмкостей; $(\rho c)_p$ – эффективная теплоёмкость пористой среды; $(\rho c)_f$ – теплоёмкость жидкой смеси; $\chi = \frac{\lambda^*}{(\rho c)_f}$ – эффективный коэффициент температуропроводности пористой среды, λ^* – эффективная теплопроводность пористой среды; \mathbf{D} – матрица коэффициентов молекулярной диффузии; \mathbf{D}_T – вектор коэффициентов термодиффузии.

Уравнение движения получается путём усреднения уравнения Навье-Стокса, описывающего истинное движение жидкости в порах. Скорость движения жидкости в пористой среде очень низка, поэтому, как это обычно делается в задачах конвекции в пористых средах, производную по времени и нелинейные члены в уравнении движения можно отбросить [18]. Основное отличие от обычных уравнений конвекции свободной жидкости состоит в том, что вместо ньютоновской силы вязкого трения теперь входит сила сопротивления Дарси, пропорциональная скорости. Такая замена приводит, в частности, к понижению порядка системы дифференциальных уравнений и сокращению количества необходимых граничных условий для скорости. Таким образом, на границе раздела пористой среды с твёрдым непроницаемым массивом должна обращаться в нуль только нормальная компонента скорости фильтрации. Касательная же компонента, вообще говоря, может быть отлична от нуля и вдоль границы может происходить фильтрация. Теплоперенос в пористой среде определяется эффективной теплопроводностью, которая зависит как от свойств самой пористой среды, так и от свойств насыщающей её жидкости.

Уравнения (1.1)-(1.4) записаны в предположении, что вязкость и коэффициенты переноса постоянны. Влияние бародиффузии и эффект Дюфура не учитываются, поскольку в жидких смесях эти эффекты пренебрежимо малы.

Диагонализовав матрицу коэффициентов молекулярной диффузии в исходных уравнениях, можно исключить эффекты перекрёстной диффузии, что

позволяет сократить число определяющих параметров задачи. Данное преобразование можно записать в виде [66]:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1}\hat{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{D}_T = \mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1}\hat{\mathbf{D}}_T, \quad (1.5)$$

где \mathbf{M} – матрица, столбцы которой являются собственными векторами ($m_i = (m_{i1}, \dots, m_{in-1})^T$) матрицы \mathbf{D} , $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_{n-1})$, $q_i = \beta_i^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j m_{ij}$. Данное преобразование позволяет свести систему уравнений (1)-(4) к системе с диагональной матрицей $\hat{\mathbf{D}}$, вектором концентрации $\hat{\mathbf{C}}$ и вектором коэффициентов термодиффузии $\hat{\mathbf{D}}_T$ («крышечка» обозначает диагонализированную переменную):

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\nu}{K} \mathbf{V} + g \left(\beta_T (T - T_0) + \mathbf{B}(\hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}}_0) \right) \boldsymbol{\gamma}, \quad (1.6)$$

$$b \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T, \quad (1.7)$$

$$\phi \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{D}} \Delta \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}}_0 (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}}_0) \hat{\mathbf{D}}_T \Delta T, \quad (1.8)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0. \quad (1.9)$$

Далее будем работать только с диагонализированными переменными и для удобства опустим запись «крышечек» над ними.

Обезразмерим полученные уравнения, введя следующие единицы измерения длины, скорости, времени, давления, температуры и концентрации:

$$y = L \cdot y_{ND}, \quad V = \frac{\chi}{L} \cdot V_{ND}, \quad t = \frac{L^2(\rho c)_p}{\lambda^*} \cdot t_{ND}, \quad P = \frac{\rho \chi \nu}{K} \cdot P_{ND},$$

$$T - T_0 = \Delta T \cdot T_{ND}, \quad \mathbf{C} - \mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_0 - \mathbf{I}) \Delta T \mathbf{D}_T (\mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{C}_{ND}.$$

Система уравнений (1.6)-(1.9) в безразмерной форме принимает вид:

$$0 = -\nabla P - \mathbf{V} + \text{Ra}(T + \boldsymbol{\psi} \mathbf{C}) \boldsymbol{\gamma}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \Delta T, \quad (1.11)$$

$$\text{Le} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{C} \right) = \Delta \mathbf{C} - \mathbf{I} \cdot \Delta T, \quad (1.12)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (1.13)$$

где $Ra = \frac{Kg\beta_T\Delta TL}{\nu\chi}$ – аналог числа Рэлея для пористой среды (в дальнейшем для краткости будет называться просто «число Рэлея»); $\varepsilon = \phi \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)_p}$ – нормализованная пористость; $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = -\mathbf{C}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C}_0)\beta_T^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}_T$ – вектор отношений разделения; $\mathbf{Le} = \chi(\mathbf{D})^{-1}$ – диагональная матрица чисел Льюиса, где $Le_{11} = \frac{\chi}{D_{11}}$, $Le_{22} = \frac{\chi}{D_{22}}$.

Отношение разделения ψ характеризует влияние термодиффузионного разделения на конвекцию смеси. Значение ψ зависит от концентрации примеси, поскольку при нулевой или 100% концентрации примеси эффект термодиффузии отсутствует. Для случая бинарной смеси отношение разделения ψ имеет вид:

$$\psi = -C_0(1 - C_0)\frac{\beta_C D_T}{\beta_T D}.$$

Коэффициент концентрационного расширения β_C для компоненты смеси положителен, если эта компонента лёгкая по сравнению с растворителем. Отношение разделения ψ не зависит от выбора растворителя, так как замена растворителя приводит к изменению для компонентов смеси знаков β_C и D_T на противоположные. Если $\beta_T > 0$ (что справедливо для большинства жидкостей), то положительные значения ψ соответствуют случаю, когда лёгкая примесь перемещается в более нагретую область (нормальная термодиффузия), что в случае нагрева снизу приводит к понижению устойчивости механического равновесия. Если $\psi < 0$, то лёгкая примесь перемещается в более холодную область (анормальная термодиффузия), что повышает устойчивость механического равновесия. При $\psi = -1$ градиенты плотности, вызванные неоднородностью температуры и концентрации, полностью компенсируют друг друга, плотность смеси становится постоянной и при любом градиенте температуры имеет место равновесие.

На границах слоя ставится условие непроницаемости, заданы постоянные разные температуры и считается выполненным условие отсутствия потока вещества. Эти условия в безразмерной форме имеют вид:

$$y = 0, 1 : \quad V_y = 0, \quad T = 1, 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} - \mathbf{I} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (1.14)$$

В настоящем исследовании рассматривается трёхкомпонентная смесь абсолютно смешиваемых углеводородов: додекан (компонент №1, $\rho = 750$ кг/м³), изобутилбензол (компонент №2, $\rho = 853$ кг/м³) и тетралин (компонент №3, $\rho = 973$ кг/м³). Эти компоненты типичны для смесей, залегающих в природных месторождениях углеводородов. В качестве растворителя выбирается наиболее тяжёлый компонент (тетралин). Физические свойства и безразмерные параметры данной смеси для случая с равными массовыми долями компонент при средней температуре 25°C приведены в Таблице 1.1 [85, 86]. Данная смесь использовалась в серии космических экспериментов (на международной космической станции) по определению коэффициентов переноса в условиях микрогравитации в рамках программы DCMIX1 [53–56].

Таблица 1.1. Размерные и безразмерные параметры смеси додекана, изобутилбензола и тетралина (1:1:1) при температуре $T_0 = 25^\circ\text{C}$ [85, 86]

Параметр	Значение	Параметр	Значение
ρ_0	843.5 кг/м ³	Sc_{11}	2281
β_T	$0.914 \cdot 10^{-3}$ К ⁻¹	Sc_{12}	35535
β_1	0.258	Sc_{21}	-14148
β_2	0.121	Sc_{22}	1377
ν	$1.528 \cdot 10^{-6}$ м ² /с	S_{T1}	$-1.15 \cdot 10^{-3}$ К ⁻¹
D_{11}	$6.70 \cdot 10^{-6}$ м ² /с	S_{T2}	$-0.95 \cdot 10^{-3}$ К ⁻¹
D_{12}	$0.43 \cdot 10^{-6}$ м ² /с	χ	10^{-7} м ² /с
D_{21}	$-1.08 \cdot 10^{-6}$ м ² /с	$\widehat{\psi}_1$	0.341
D_{22}	$11.10 \cdot 10^{-6}$ м ² /с	$\widehat{\psi}_2$	0.109
D_{T1}	$-0.81 \cdot 10^{-12}$ м ² /(с · К)	\widehat{Le}_1	147
D_{T2}	$-0.93 \cdot 10^{-12}$ м ² /(с · К)	\widehat{Le}_2	91

Значение коэффициента температуропроводности для данной смеси неизвестно. Использование типичного для жидких смесей значения $\chi = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ даёт $\text{Pr} = 15.28$ [85]. При данных массовых долях компонентов смеси эффект Соре для лёгких компонентов 1 и 2 является положительным, поэтому под действием градиента температуры их концентрация возрастает у нагретой границы.

1.2.2. Спектрально-амплитудная задача

Рассматриваемая задача имеет решение, соответствующее состоянию механического равновесия:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= 0, \quad T_0 = 1 - y, \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{I} \cdot \left(\frac{1}{2} - y\right), \\ P_0 &= \text{Ra} \left(-\frac{y^2}{2} (1 + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I}) + y \left(1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I}\right) + \text{const}\right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для линейного исследования устойчивости состояния механического равновесия (1.15) представим все поля в виде суммы основного состояния и малого возмущения:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}', \quad T = T_0 + T', \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}', \quad P = P_0 + P'. \quad (1.16)$$

Подставим поля в таком виде в уравнения (1.10)–(1.14) и линеаризуем полученные уравнения относительно малых возмущений. Затем, рассмотрим нормальные возмущения следующего вида:

$$(\mathbf{V}', T', \mathbf{C}') = (\varphi(y), \theta(y), \boldsymbol{\xi}(y)) \cdot e^{-\lambda t + ikx}. \quad (1.17)$$

Величины $\varphi, \theta, \boldsymbol{\xi}$ представляют собой амплитуды возмущений скорости, температуры и концентраций примесей ($\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ – вектор-столбец).

После подстановки (1.17) в линеаризованные уравнения, исключения давления и горизонтальной составляющей скорости, а также введения новой функции $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{I} \cdot \theta$, представляющей собой комбинацию возмущений концентрации и температуры, получаем систему уравнений для амплитуд возмущений следующего вида:

$$0 = \varphi'' - k^2\varphi + k^2\text{Ra}[(1 + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I})\theta + \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\eta}], \quad (1.18)$$

$$\lambda\theta - \varphi = \theta'' - k^2\theta, \quad (1.19)$$

$$\text{Le}[\varepsilon\lambda(\boldsymbol{\eta} + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varphi}] = \boldsymbol{\eta}'' - k^2\boldsymbol{\eta}. \quad (1.20)$$

Граничные условия для амплитуд возмущений имеют вид:

$$y = 0,1: \quad \varphi = 0, \quad \theta = 0, \quad \boldsymbol{\eta}' = 0. \quad (1.21)$$

Решение системы уравнений (1.18)–(1.20) с граничными условиями (1.21) приводит к задаче на собственные значения, в которой декремент затухания λ зависит от параметров задачи $\lambda = \lambda(\text{Ra}, \boldsymbol{\psi}, \varepsilon, k, \text{Le})$. В общем случае декремент λ является комплексным числом, то есть $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$. Для монотонных возмущений область устойчивости можно определить, полагая $\lambda = 0$, а для колебательных возмущений, полагая $\lambda_r = 0$ (λ_i представляет собой частоту колебательных возмущений).

1.2.3. Линейный анализ устойчивости

Задача о конвекции свободной однокомпонентной жидкости в горизонтальном слое была решена Релеем [7]. В этом случае после потери устойчивости равновесия возникают монотонные ячеистые моды неустойчивости. Для случая конвекции свободной бинарной смеси с учётом эффекта Соре были найдены дополнительные длинноволновая монотонная и ячеистая колебательная моды [18]. При конвекции свободной трёхкомпонентной смеси в горизонтальном слое обнаружена ещё одна мода неустойчивости – длинноволновая колебательная [59].

В работе [84] исследовалось возникновение индуцированной эффектом Соре конвекции трёхкомпонентной смеси додекана, изобутилбензола и тетралина в горизонтальном пористом слое с учётом эффектов перекрёстной диффузии. На Рис. 1 этой работы представлена карта устойчивости механического равновесия, на которой имеются длинноволновая и ячеистая моды монотонной неустойчивости. Авторами было также проведено исследование колебательных

мод неустойчивости в ходе которого была обнаружена ячеистая колебательная мода. Установлено, что с увеличением (по модулю) значения отношения разделения стабилизирующего компонента смеси критическое число Рэлея и частота колебаний растут, а волновое число уменьшается и выходит на значение, равное $k \approx 3.14$.

Длинноволновые возмущения соответствует ситуации, когда волновое число возмущений равно нулю ($k = 0$). Если волновое число больше нуля ($k > 0$), то имеют место ячеистые возмущения. При колебательных режимах конвекции направление вращения конвективных валов меняется с периодом λ_i , причём, это происходит одновременно для всех конвективных валов в рассматриваемой области. Соотношение периода колебаний и периода вращения конвективных валов (определяемого скоростью движения жидкости) зависит от параметров системы и в общем случае может быть любым.

Авторами вышеупомянутой работы [84] не была обнаружена длинноволновая колебательная мода. Наличие этой моды является особенностью, присущей трёхкомпонентным смесям [59], в которых одна из примесей является стабилизирующей ($\psi < 0$), а другая – дестабилизирующей ($\psi > 0$). Если при нагреве снизу при некоторых параметрах влияние стабилизирующей примеси слабее, чем влияние дестабилизирующей (слабая стабилизация), то следует ожидать появления длинноволновой колебательной моды неустойчивости. К ячеистой колебательной неустойчивости приводит сильный стабилизирующий эффект одной или обеих примесей.

В частности, поиском длинноволновой колебательной моды мотивированы исследования в данной главе. Для изучения длинноволновой неустойчивости механического равновесия смеси разложим все гидродинамические поля, число Рэлея и частоту вибраций в степенной ряд чётным степеням волнового числа:

$$(\varphi, \theta, \boldsymbol{\eta}, Ra, \lambda_i) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n, \theta_n, \boldsymbol{\eta}_n, Ra_n, \lambda_{i_n}) k^{2n}.$$

Нулевой порядок разложения даёт: $\varphi^{(0)} = 0$, $\theta^{(0)} = 0$, $\boldsymbol{\eta}^{(0)} = const$, $\lambda_i^{(0)} = 0$.

Из условий разрешимости уравнений первого порядка разложения получаются формулы для критических чисел Рэлея монотонной и колебательной неустойчивостей $Ra_m^{(0)}$ и $Ra_{os}^{(0)}$, а также для частоты критических возмущений при колебательной неустойчивости $\lambda_i^{(1)}$:

$$Ra_m^{(0)} = \frac{12}{Le_1\psi_1 + Le_2\psi_2}, \quad (1.22)$$

$$Ra_{os}^{(0)} = \frac{12(Le_1 + Le_2)}{Le_1Le_2(\psi_1 + \psi_2)}, \quad (1.23)$$

$$\lambda_i^{(1)2} = -\frac{Le_1^2\psi_1 + Le_2^2\psi_2}{Le_1^2Le_2^2(\psi_1 + \psi_2)\varepsilon^2}. \quad (1.24)$$

Как видно, при подогреве снизу длинноволновая колебательная неустойчивость возможна при положительных суммарных отношениях разделения $\psi_1 + \psi_2$, и отрицательных ψ_1 , удовлетворяющих условию $\psi_1 < -(Le_2/Le_1)^2\psi_2$. Формулы для критических значений (1.22)-(1.24) аналогичны таковым для случая свободной жидкости (Ra_{mf} , Ra_{osf} , λ_{if}) [59] с точностью до множителя:

$$Ra_{mf} = 60 \cdot Ra_m^{(0)}, \quad Ra_{osf} = 60 \cdot Ra_{os}^{(0)}, \quad \lambda_{if}^2 = \frac{\varepsilon^2 \chi^2}{\nu^2} \cdot \lambda_i^{(1)2}.$$

Применение преобразования (1.5) для диагонализации матрицы коэффициентов молекулярной диффузии даёт следующие значения безразмерных параметров [66]: $\psi_1 = 0.341$, $\psi_2 = 0.109$, $Le_1 = 147$, $Le_2 = 91$ (Таблица 1.1). Поскольку основной интерес представляет исследование системы при различных значениях концентрации примесей, будем варьировать значения отношений разделения ψ_1 и ψ_2 , что будет эквивалентно изменению пропорций растворённых веществ (додекана и изобутилбензола соответственно) в растворителе (тетралине). При этом числа Льюиса будем считать постоянными. В общем случае значение коэффициента термодиффузии для примеси сильно зависит от её свойств и от концентрации этой примеси в смеси, причём, в зависимости от концентрации, оно даже может менять знак. Нулевое значение ψ для примеси означает отсутствие данной примеси в смеси. В дальнейшем поведение

трёхкомпонентной смеси исследуется при фиксированных значениях параметров: $\psi_2 = 0.120$, $Le_1 = 147$, $Le_2 = 91$, $\varepsilon = 0.15$. Отношение разделение первой примеси будет варьироваться в следующем интервале: $\psi_1 \in [-0.15, 0]$. В данном случае для первой примеси имеет место аномальный эффект термодиффузии (являясь лёгкой компонентой, движется в нагретую область) и повышение её концентрации в смеси (увеличение $|\psi_1|$) приводит к стабилизации механического равновесия. Для второй примеси имеет место нормальный эффект термодиффузии (являясь лёгкой компонентой, движется в холодную область) и повышение её концентрации в смеси (увеличение $|\psi_2|$) приводит к дестабилизации механического равновесия.

Как следует из (1.23), для рассматриваемых значений параметров при подогреве снизу длинноволновая колебательная неустойчивость может существовать при $\psi_1 < -0.0460$. Зависимости $Ra_m^{(0)}$, $Ra_{os}^{(0)}$ и $\lambda_i^{(1)}$ от отношения разделения ψ_1 для данных значений параметров представлены на Рис. 1.2-1.3. Как видно, при нагреве снизу в диапазоне $\psi_1 \in [-0.046, 0]$ наиболее опасна монотонная длинноволновая мода, а в диапазоне $\psi_1 \in [-0.12, -0.0460]$ – колебательная длинноволновая мода.

Данная длинноволновая колебательная мода аналогична таковой для случая свободной жидкости (не в пористой среде) [59], однако переходы на эту моду с других мод происходят иначе. Далее эти переходы будут рассмотрены более подробно.

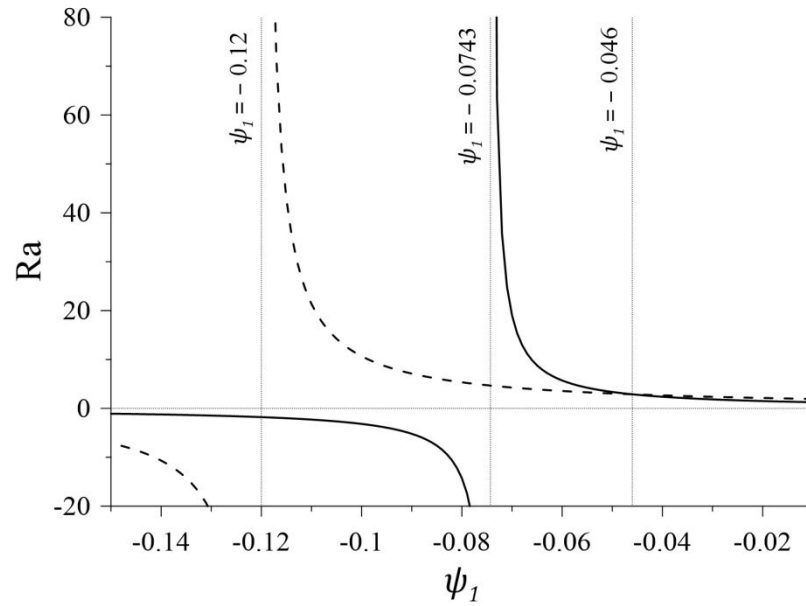


Рис. 1.2. Карта устойчивости системы, полученная с помощью длинноволнового анализа (сплошная кривая – монотонная длинноволновая мода, пунктирная кривая – колебательная длинноволновая мода)

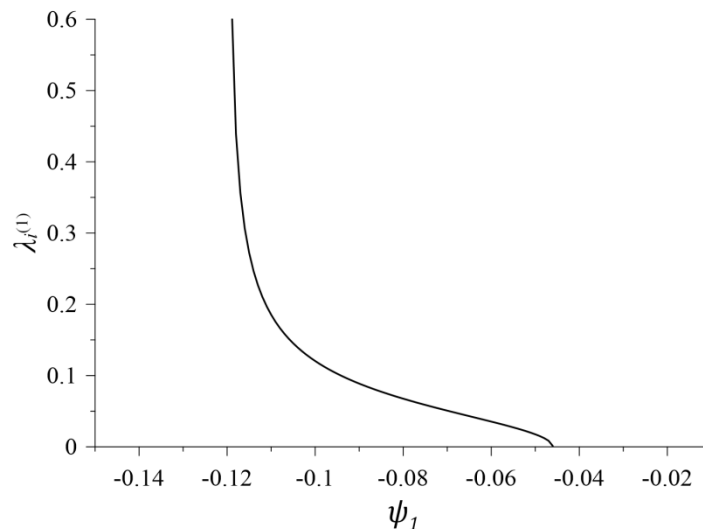


Рис. 1.3. Зависимость $\lambda_i^{(1)}$ от ψ_1 для длинноволновой колебательной моды (длинноволновый анализ)

Линейное исследование устойчивости равновесия для возмущений с ненулевым волновым числом производилось путем численного решения задачи (1.18)-(1.21) методом Рунге-Кутты 5-го порядка с последующим поиском нуля определителя матрицы фундаментальной системы решений с использованием двумерного метода секущих.

Расчеты проводились для $Ra > 0$ при фиксированных значениях параметров: $\psi_2 = 0.120$, $Le_1 = 147$, $Le_2 = 91$, $\varepsilon = 0.15$. Параметр ψ_1 варьировался в интервале $\psi_1 \in [-0.15, 0]$.

На Рис. 1.4 представлена полученная в расчётах карта устойчивости, на плоскости $Ra - \psi_1$ для рассматриваемого набора параметров. Как и в работе [84], карта режимов содержит монотонные длинноволновые и ячеистые моды. Отметим, что, хотя в работе [84] для расчетов использовались другие параметры, качественный вид карты устойчивости аналогичен полученной в наших расчётах. Однако в нашей работе обнаружена дополнительная мода неустойчивости: колебательная длинноволновая мода, которая отделяется от ветви монотонной длинноволновой моды, а затем переходит в ветвь колебательной ячеистой моды. Следует отметить, что существует точка, в которой ветвь колебательной ячеистой моды меняет характер наклона.

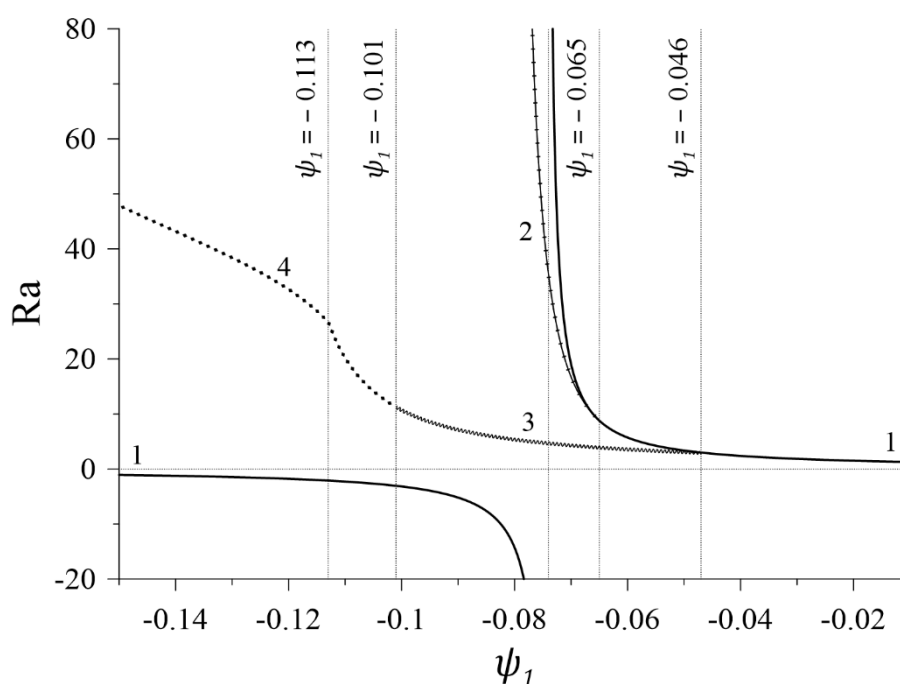


Рис. 1.4. Карта устойчивости системы (моды неустойчивости: 1 – монотонная длинноволновая, 2 – монотонная ячеистая, 3 – колебательная длинноволновая, 4 – колебательная ячеистая)

При малых (по модулю) значениях ψ_1 тип неустойчивости в большей степени определяется значением ψ_2 (подобно тому, как он определяется единственным отношением разделения в бинарной смеси).

Для $Ra > 0$ при $\psi_1 \in (-0.046, 0]$ наиболее опасными являются длинноволновые монотонные возмущения, при $\psi_1 \in (-0.101, -0.046)$ – длинноволновые колебательные возмущения, при $\psi_1 \in (-0.150, -0.101)$ – ячеистые колебательные возмущения.

Для $Ra < 0$ при $\psi_1 \in (-0.150, -0.074)$ наблюдается длинноволновая монотонная неустойчивость, при $\psi_1 \in (-0.074, 0]$ неустойчивость не наблюдается.

При $\psi_1 = -0.046$ от ветви длинноволновой монотонной моды отделяется ветвь длинноволновой колебательной моды, а при $\psi_1 = -0.065$ – ветвь ячеистой монотонной моды.

У ветви длинноволновой монотонной моды наблюдается асимптотическое поведение около $\psi_1 = -0.0743$. У ветви ячеистой монотонной моды также наблюдается поведение, похожее на асимптотическое. Как видно из Рис. 1.5, при уменьшении ψ_1 волновое число на этой ветви растёт.

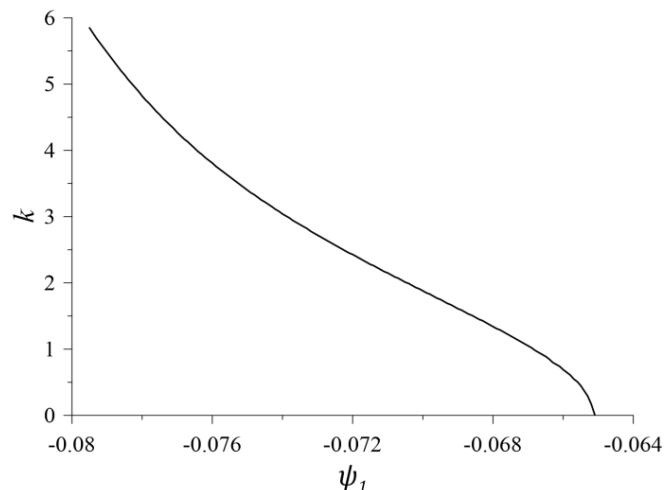


Рис. 1.5. Зависимость волнового числа от ψ_1 для ячеистой монотонной моды

Как видно из Рис. 1.6, частота колебаний на ветви длинноволновой колебательной моды монотонно растёт с ростом (по модулю) ψ_1 . Необходимо отметить, что для сравнения частоты колебаний, полученной методом

длинноволнового анализа (Рис. 1.3), и частоты, полученной в результате численного линейного анализа (Рис. 1.6), необходимо домножить значения первого графика на k^2 , использованное при численном линейном анализе (в данном случае использовалось значение $k = 0.001$). После домножения полученные графики полностью совпадают. При переходе на ветвь ячеистой колебательной моды частота колебаний резко возрастает (Рис. 1.9).

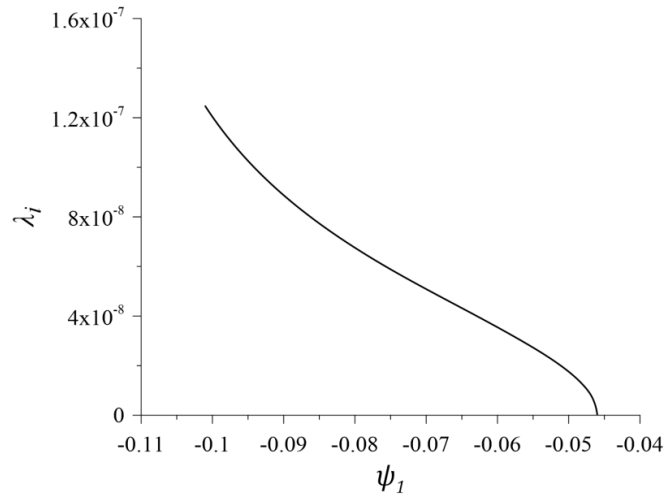


Рис. 1.6. Зависимость частоты колебаний от ψ_1 для длинноволновой колебательной моды

При $\psi_1 = -0.101$ колебательная неустойчивость меняет характер с длинноволновой на ячеистую. Как видно из Рис. 1.7, это связано с изменением поведения нейтральных кривых при $k \rightarrow 0$.

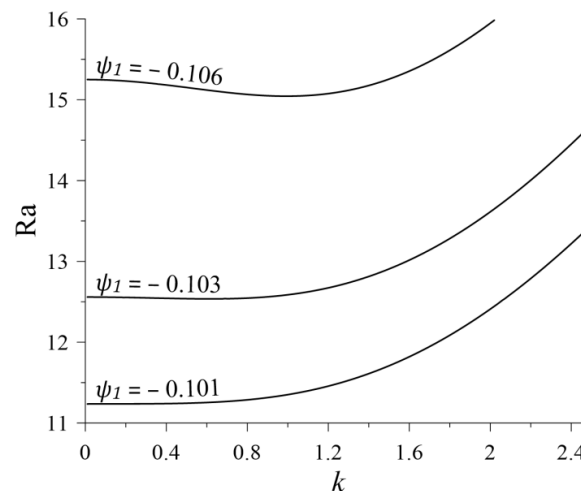


Рис. 1.7. Нейтральные кривые вблизи точки перехода от длинноволнового к ячеистому режиму колебательной неустойчивости

При $\psi_1 = -0.113$ у кривой ячеистой колебательной моды меняется характер наклона. Как видно из Рис. 1.8, это происходит из-за смены локального минимума нейтральных кривых в окрестностях точки $\psi_1 = -0.113$. При $\psi_1 > -0.113$ первый минимум располагается ниже второго, при $\psi_1 < -0.113$ второй минимум становится ниже первого.

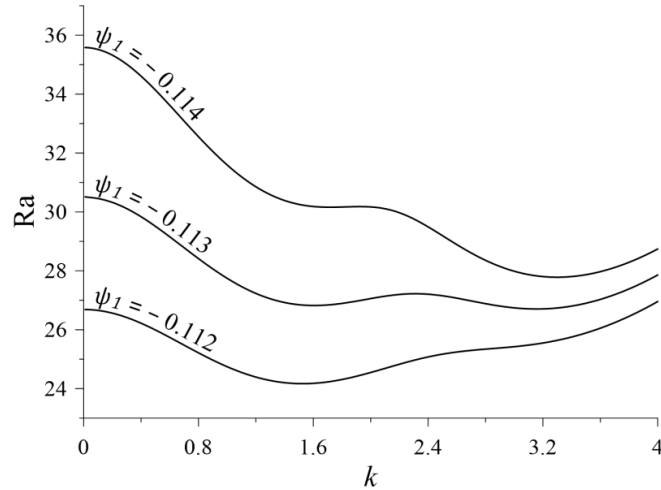


Рис. 1.8. Нейтральные кривые вблизи точки изменения характера наклона кривой колебательной моды

Помимо изменения наклона кривой ячеистой колебательной моды, переход через точку $\psi_1 = -0.113$ сопровождается скачкообразным изменением частоты колебаний и волнового числа (Рис. 1.9), что также связано с переходом на другой локальный минимум. При $\psi_1 < -0.113$ наблюдается монотонный рост частоты колебаний.

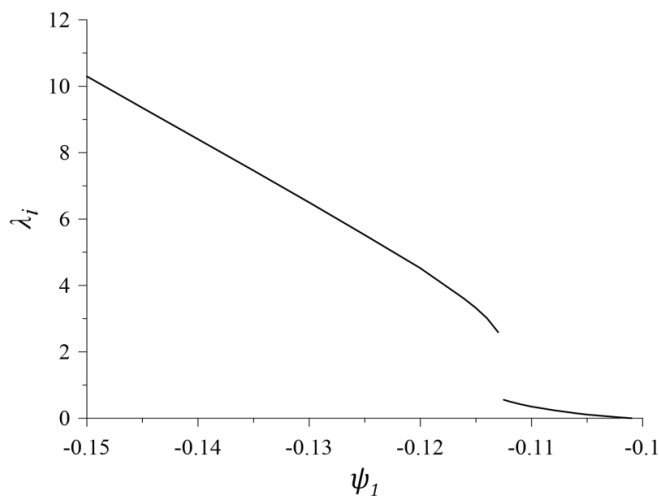


Рис. 1.9. Зависимость частоты колебаний от ψ_1 для ячеистой колебательной моды

На Рис. 1.10 представлена зависимость волнового числа от ψ_1 для ячеистой колебательной моды. У данной кривой при $\psi_1 < -0.101$ наблюдается рост, далее после скачка при $\psi_1 = -0.113$ кривая с увеличением (по модулю) ψ_1 постепенно выходит на постоянное значение.

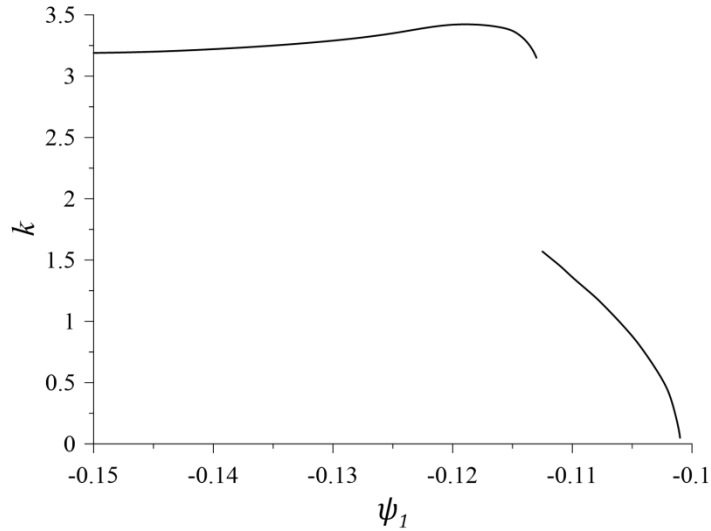


Рис. 1.10. Зависимость волнового числа от ψ_1 для ячеистой колебательной моды

На Рис. 1.11 представлены графики зависимости Ra/Ra_c (отношение критического числа Рэлея для трёхкомпонентной смеси к критическому числу Рэлея для однокомпонентной жидкости), критического волнового числа и частоты колебаний от суммарного отношения разделения для случаев свободной жидкости (графики взяты из монографии [59]) и жидкости в пористой среде. Как видно из Рис. 1.11б, в пористой среде при высоких значениях суммарного отношения разделения Ψ наиболее опасна монотонная длинноволновая мода. При уменьшении Ψ эта мода переходит в колебательную длинноволновую, которая затем переходит в колебательную ячеистую с плавным повышением волнового числа с нулевого значения (Рис. 1.11г). При некотором значении Ψ кривая колебательной ячеистой моды терпит излом, что сопровождается скачкообразным изменением волнового числа (Рис. 1.11г) и частоты колебаний (Рис. 1.11е).

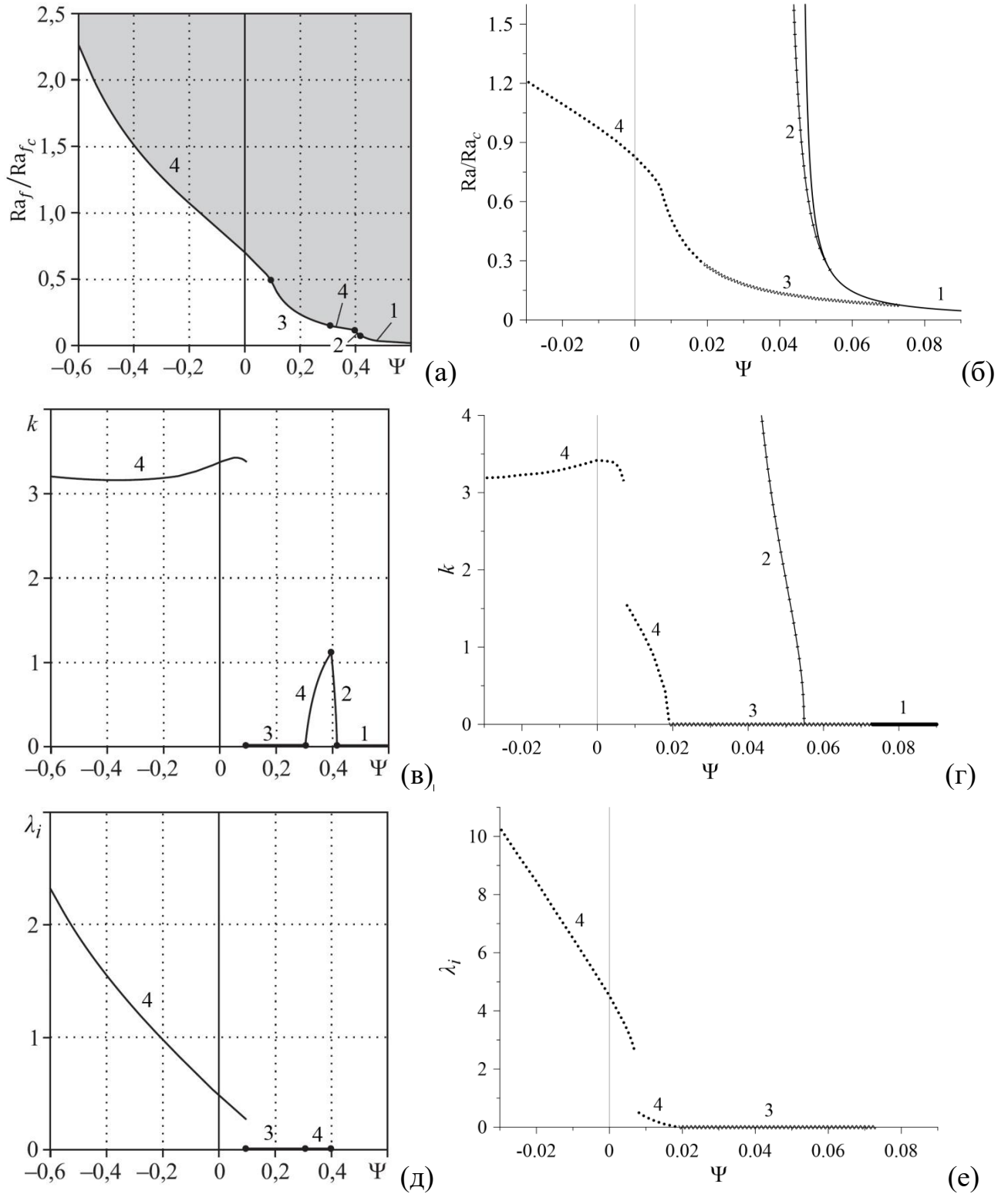


Рис. 1.11. Зависимость Ra/Ra_c (а, б), критического волнового числа (в, г) и частоты колебаний (д, е) от $\Psi = \psi_1 + \psi_2$ для свободной жидкости (а, в, д: $\psi_1 = 0.4, Le_1 = 10, Le_2 = 100$; графики взяты из монографии [59]) и жидкости в пористой среде (б, г, е: $\psi_2 = 0.12, Le_1 = 147, Le_2 = 91, \varepsilon = 0.15$) (моды неустойчивости: 1 – монотонная длинноволновая, 2 – монотонная ячеистая, 3 – колебательная длинноволновая, 4 – колебательная ячеистая)

В случае свободной жидкости [59] при высоких значениях суммарного отношения разделения Ψ также наиболее опасна монотонная длинноволновая мода (Рис. 1.11а). Однако при уменьшении Ψ она переходит в ячеистую монотонную моду, далее происходит переход на ячеистую колебательную моду, далее переход на длинноволновую колебательную моду и далее снова переход на ячеистую колебательную моду. Причём, переход от длинноволновой колебательной моды к ячеистой колебательной сопровождается резким скачком волнового числа (Рис. 1.11в), а после перехода на кривой ячеистой колебательной моды не наблюдается изломов (Рис. 1.11а).

В случае свободной жидкости существует диапазон параметров Ψ между длинноволновыми монотонной и колебательной модами, в котором наиболее опасна монотонная ячеистая мода (Рис. 1.11а). Это может быть объяснено тем, что ветвь длинноволновой монотонной моды переходит в ветвь ячеистой монотонной моды раньше (при более высоких значениях Ψ), чем в ветвь длинноволновой колебательной моды. Однако наличие диапазона параметров Ψ между длинноволновыми монотонной и колебательной модами, в котором наиболее опасна ячеистая колебательная мода, является, по видимому, особенностью свободной жидкости, которая не наблюдается в пористой среде. Также для случаев свободной жидкости и жидкости в пористой среде отличается переход между колебательной длинноволновой и ячеистой модами. В частности, из-за этого на кривой колебательной ячеистой моды для свободной жидкости не наблюдается излома.

Проведём оценку, каким перепадам температур для реальных систем соответствуют полученные значения критического числа Рэлея. Рассмотрим пористый слой, заполненный водой: $L = 100$ м, $K = 10^{-11}$ м², $g = 9.8$ м/с², $\beta_T = 3 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹, $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\chi = 3.6 \cdot 10^{-7}$ м²/с. Для данных параметров при значении критического числа Рэлея, соответствующему порогу конвекции для однокомпонентной жидкости ($Ra_{cr} = 4\pi^2$), перепад температуры между

стенками равняется примерно 4.8 K. Это соответствует градиенту температуры 0.048 K/м, что очень близко к типичному геотермальному градиенту.

1.2.4. Нелинейные конвективные режимы

Постановка задачи и граничные условия

Рассмотрим теперь данную задачу в нелинейной постановке. Решалась система уравнений (1.10)-(1.13). Расчеты проводились в двумерной постановке для вытянутой по горизонтали прямоугольной полости с отношением сторон 5:1. На всех границах ставились условия непроницаемости и отсутствия потока вещества. На горизонтальных границах ставились условия (1.14), на вертикальных (теплоизолированных) границах следующие условия:

$$x = 0, 5 : \quad V_x = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0. \quad (1.25)$$

Введём функцию тока для \mathbf{V} , определяемую соотношениями $V_x = \partial\Psi/\partial y$, $V_y = -\partial\Psi/\partial x$. Система уравнений (1.10)-(1.13) в терминах функций тока принимает вид ($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$):

$$\Delta\Psi = -\text{Ra} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \psi \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \Delta T, \quad (1.27)$$

$$\text{Le} \left(\varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \Delta C - \mathbf{I} \cdot \Delta T. \quad (1.28)$$

Граничные условия:

$$x = 0, 5: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad (1.29)$$

$$y = 0: \quad \Psi = 0, \quad T = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial y} - \mathbf{I} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (1.30)$$

$$y = 1: \quad \Psi = 0, \quad T = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} - \mathbf{I} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (1.31)$$

Метод решения

Задача решалась методом конечных разностей. Для производных по пространству были использованы центральные разности (за исключением пристеночных узлов, в которых использовались односторонние разности), для производной по времени – односторонняя разность. Уравнение Пуассона (1.26) решалось методом последовательной верхней релаксации.

Использовалась равномерная сетка. Шаг сетки составлял $1/20$ по вертикали и $1/100$ по горизонтали. Такое разрешение сетки позволяет максимально снизить ресурсоёмкость численного метода, при этом сохраняя качественную структуру течения. В Таблице 1.2 представлены данные исследования чувствительности решения к шагу сетки. Как видно, при выбранном шаге сетки порог конвекции также может быть найден с высокой точностью.

Таблица 1.2. Исследование чувствительности решения к шагу вычислительной сетки при $\psi_1 = -0.055$

Число узлов по оси y	Критическое число Рэлея, полученное в результате нелинейных расчётов
15	3.238
20	3.264
25	3.277

Все расчёты проводились для положительных значений числа Рэлея. Моделирование проводилось до выхода на стационарный режим: режим монотонного движения, либо режим стационарных колебаний. На каждом временном шаге использовался критерий сходимости для функции тока Ψ . В случае монотонного режима расчёты проводились, пока относительные невязки не станут меньше, чем 10^{-8} .

При всех исследуемых ψ_1 для нахождения структур течения около порога конвекции в качестве начальных условий использовались малые возмущения состояния равновесия в виде малого (порядка 10^{-5}) значения функции тока Ψ в

одном из центральных узлов сетки. В дальнейших расчётах для исследования гистерезиса при изменении числа Рэлея в качестве начальных условий использовался установившийся конвективный режим на исследуемой ветви карты режимов при близком значении Ra .

Рассматриваемые параметры системы

Для моделирования нелинейных режимов конвекции были выбраны следующие параметры:

$$\psi_2 = 0.120 \quad Le_1 = 147 \quad Le_2 = 91 \quad \varepsilon = 0.15$$

$$\psi_1 = \{-0.055, -0.080, -0.110\}$$

Данные значения параметра ψ_1 были выбраны потому, что они являются характерными точками на карте устойчивости системы (Рис. 1.4), в которых можно наблюдать колебательные моды. Все расчёты проводились для положительных значений числа Рэлея.

При $\psi_1 = -0.055$ в бесконечном горизонтальном слое, согласно результатам линейного анализа устойчивости, должна реализовываться длинноволновая колебательная мода. Отметим, что над ветвью длинноволновой колебательной моды имеется ветвь длинноволновой монотонной моды. При этом значении ψ_1 можно пронаблюдать, как будет вести себя система при взаимодействии разных мод неустойчивости.

При $\psi_1 = -0.080$ должна реализовываться длинноволновая колебательная мода. Над ветвью этой моды ветви других мод отсутствуют.

При $\psi_1 = -0.110$ должна реализовываться ячеистая колебательная мода. Над этой ветвью ветви других мод также отсутствуют.

Численные результаты

Используемые значения параметра ψ_1 для удобства визуализированы на Рис. 1.12. На дальнейших рисунках с картами режимов нумерация кривых и их визуальный стиль также будут соответствовать кривым на Рис. 1.12.

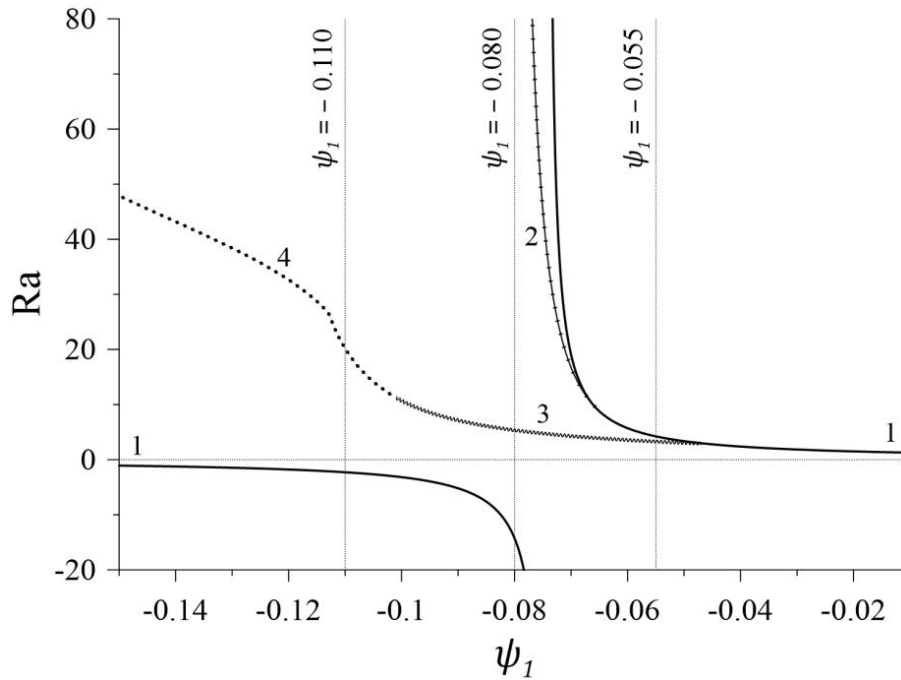


Рис. 1.12. Карта устойчивости системы с отмеченными характерными точками (моды неустойчивости: 1 – монотонная длинноволновая, 2 – монотонная ячеистая, 3 – колебательная длинноволновая, 4 – колебательная ячеистая)

На Рис. 1.13 представлены зависимости модуля максимального значения функции тока в полости $\text{Max}|\Psi|$ и кинетической энергии течения от числа Рэлея для $\psi_1 = -0.055$. Кривая 3 соответствует стационарным колебаниям, кривая 1 – монотонному режиму. Оба режима имеют длинноволновую структуру. Порог конвекции, полученный для данного значения ψ_1 в нелинейных расчётах, оказался близким к порогу, найденному при линейном анализе устойчивости (отличие от линейной теории 3.3%).

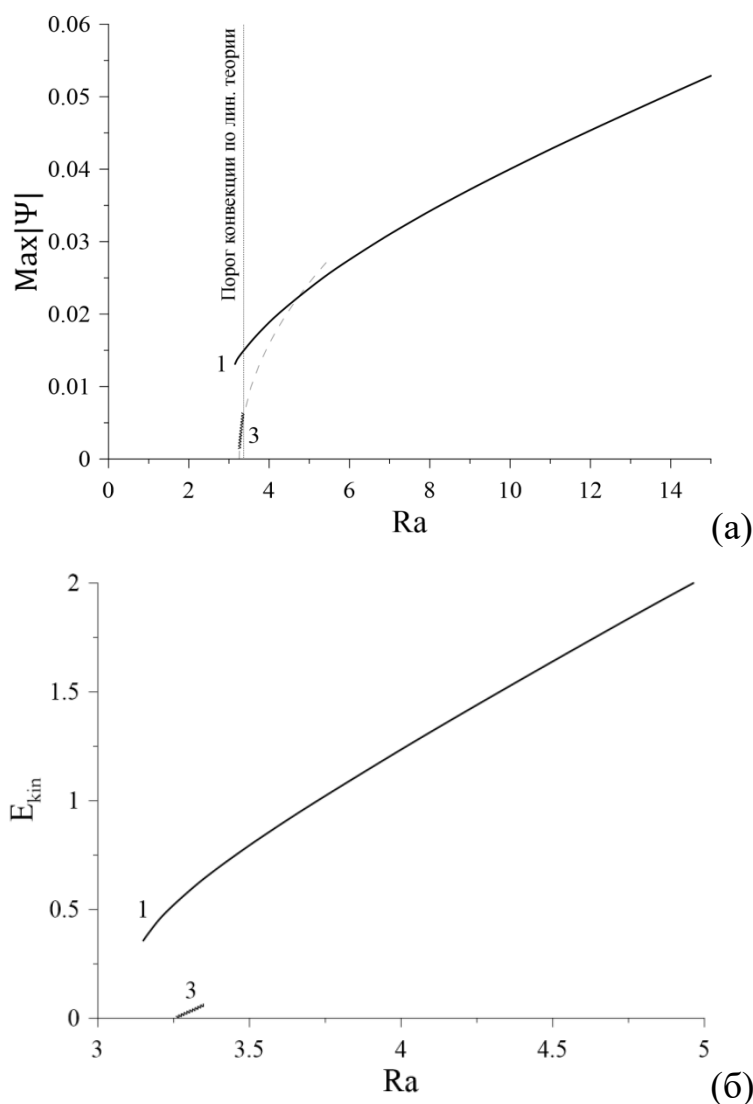


Рис. 1.13. Зависимости $\text{Max}|\Psi|$ (а) и кинетической энергии течения (б) от числа Рэлея при $\psi_1 = -0.055$ (штриховая кривая – корневой закон вблизи порога конвекции)

Расчеты показали, что при $Ra \approx 3.26$ механическое равновесие становится неустойчивым и возникает режим стационарных колебаний длинноволновой структуры (один конвективный вихрь на всю полость). При дальнейшем увеличении числа Рэлея этот режим сохраняется примерно до $Ra \approx 3.40$. При $Ra \approx 3.40$ происходит переход от стационарных колебаний длинноволновой структуры к стационарному монотонному движению длинноволновой структуры. Если, находясь на этой ветви решений, постепенно понижать число Рэлея, то при значении, примерно равном $Ra \approx 3.10$, конвекция начинает затухать. Таким образом, в системе наблюдается гистерезис.

В случае возникновения конвекции путем прямой бифуркации наблюдается корневая зависимость максимального значения функции тока $\text{Max}|\Psi|$ от Ra и линейная зависимость кинетической энергии от Ra . С учетом этого, найдя несколько точек вблизи порога конвекции, можно определить порог конвекции путем экстраполяции. На Рис. 1.14 представлен фрагмент Рис. 1.13а вблизи порога конвекции. Стрелками обозначены возможные переходы между режимами при изменении числа Рэлея. Для ветви длинноволнового колебательного режима корневой закон выполняется в диапазоне $Ra \in (3.26; 3.32)$, то есть почти на всём её протяжении, что говорит о возбуждении конвекции путём прямой бифуркации при данном значении ψ_1 .

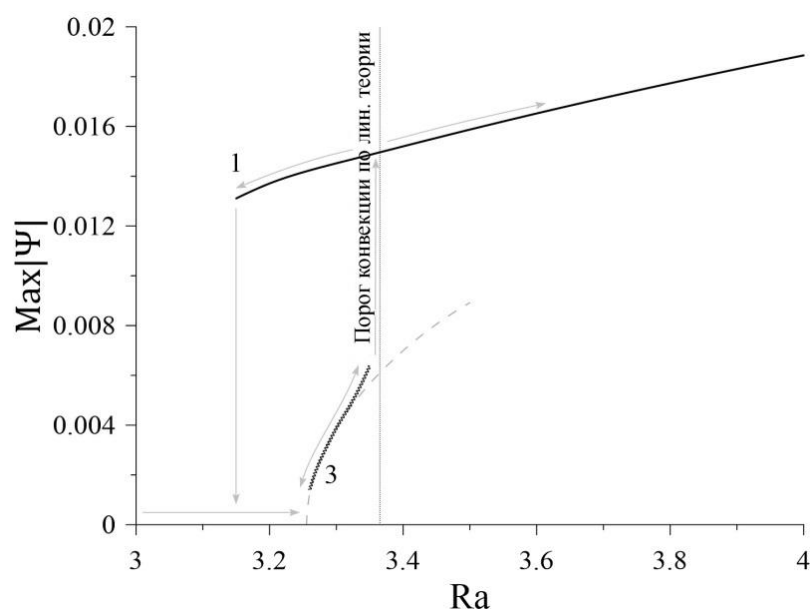


Рис. 1.14. Зависимости $\text{Max}|\Psi|$ от числа Рэлея при $\psi_1 = -0.055$ (вблизи порога конвекции)

На Рис. 1.15 представлен фрагмент карты устойчивости системы около исследуемого значения $\psi_1 = -0.055$. Как видно, в данной точке кривые длинноволнового монотонного (кривая 1) и длинноволнового колебательного (кривая 3) режимов находятся близко друг к другу, что обуславливает возможность перехода системы между этими конвективными режимами.

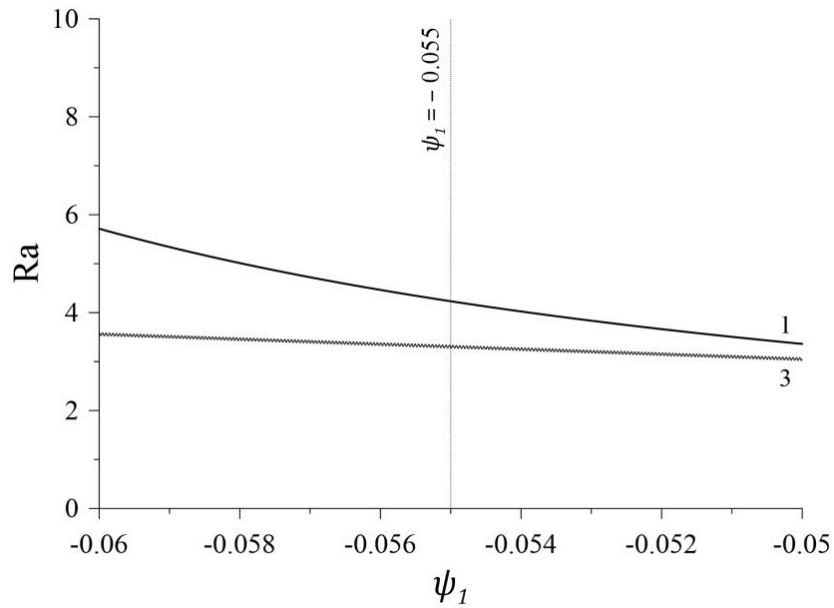


Рис. 1.15. Фрагмент карты устойчивости системы около $\psi_1 = -0.055$

Как видно из Рис. 1.16, с ростом Ra частота колебаний монотонно падает. Такая тенденция наблюдается и при других значениях ψ_1 .

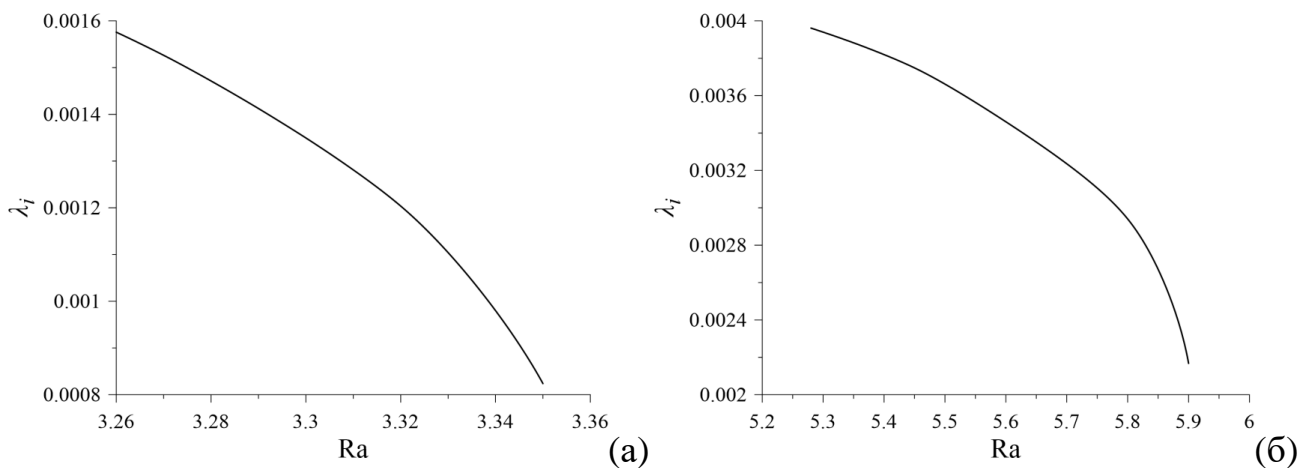


Рис. 1.16. Зависимость частоты колебаний от числа Рэлея при длинноволновом колебательном режиме (а: $\psi_1 = -0.055$, б: $\psi_1 = -0.080$)

На Рис. 1.17 представлены зависимости $\text{Max}|\Psi|$ и кинетической энергии течения от числа Рэлея при $\psi_1 = -0.080$. При $Ra \approx 5.26$ механическое равновесие становится неустойчивым и возникает режим длинноволновых стационарных колебаний, который существует примерно до $Ra \approx 5.95$. Порог конвекции, найденный в нелинейных расчётах, также с хорошей точностью согласуется с порогом, найденным с помощью линейной теории. Если находясь

на ветви длинноволнового колебательного режима постепенно повышать число Рэлея, то при $Ra \approx 5.95$ происходит переход к длинноволновому монотонному режиму. Если, находясь на ветви этого режима, постепенно понижать число Рэлея, то при $Ra \approx 5.90$ произойдёт обратный переход к режиму длинноволновых стационарных колебаний.

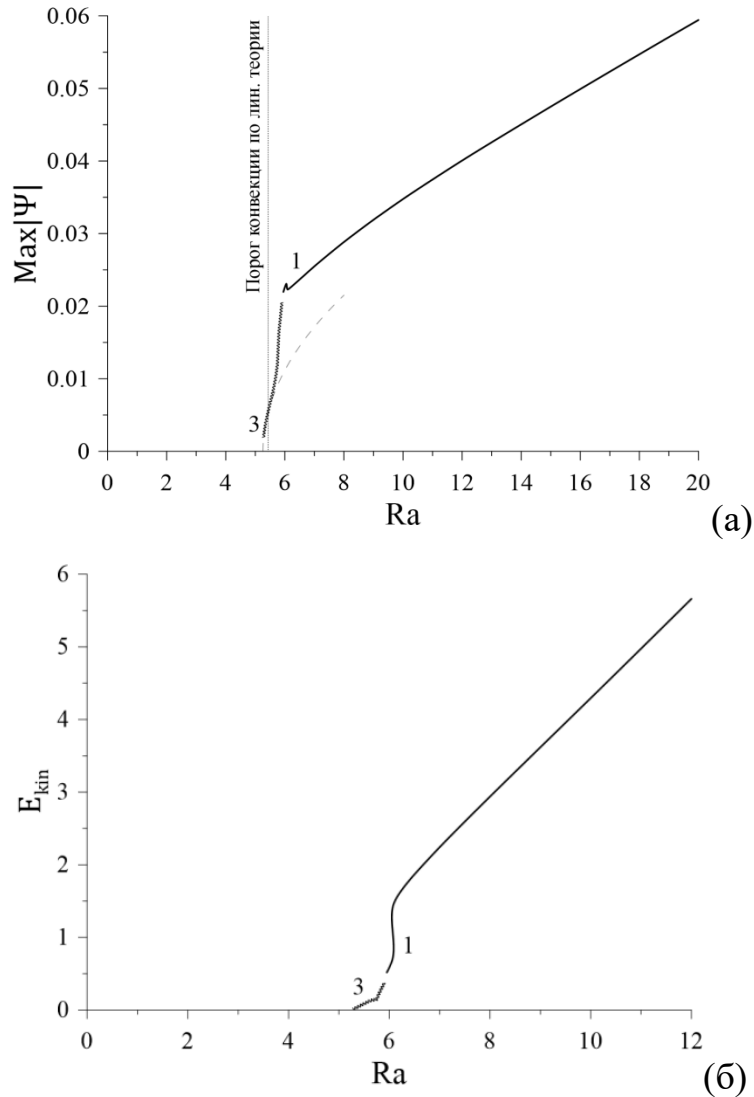


Рис. 1.17. Зависимости $\text{Max}|\Psi|$ (а) и кинетической энергии течения (б) от числа Рэлея при $\psi_1 = -0.080$ (моды неустойчивости: 1 – монотонная длинноволновая, 3 – колебательная длинноволновая)

При малых надкритичностях зависимость $\text{Max}|\Psi|$ от числа Рэлея для режима длинноволновых стационарных колебаний имеет корневой характер (Рис. 1.17а), что свидетельствует о том, что конвекция при данном значении ψ_1 возбуждается путём прямой бифуркации. Однако при $Ra \approx 5.65$ характер загиба

кривой резко меняется. Это связано с тем, что при данном значении числа Рэлея происходит переход от гармонических колебаний к релаксационным (Рис. 1.18).

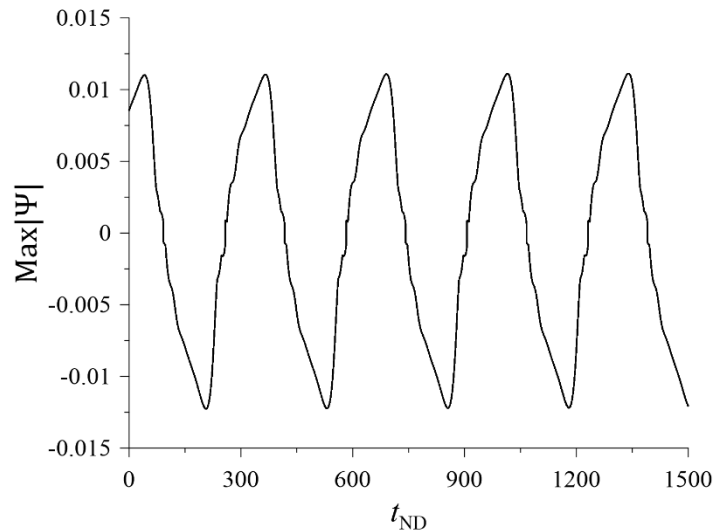


Рис. 1.18. Релаксационные колебания $\text{Max}|\Psi|$ при $\psi_1 = -0.080$, $Ra = 5.75$

При повышенных надкритичностях существуют и другие конвективные режимы с более высоким количеством валов. В частности, если находясь на ветви монотонной длинноволновой моды продолжать повышать число Рэлея, то при значении, примерно равном $Ra \approx 37.7$, происходит переход на пятивихревую монотонную моду, которая существует в диапазоне от $Ra \approx 11.80$ и далее. Если находясь на ветви этой моды понижать число Рэлея, то при $Ra \approx 11.75$ происходит переход на трёхвихревую монотонную моду, которая существует в диапазоне $Ra \in (8.60; 39.45)$. Ниже этого значения происходит переход на длинноволновую монотонную моду, а выше – обратно на пятивихревую монотонную моду. Таким образом, при $\psi_1 = -0.080$ для некоторых конвективных режимов наблюдается существенный гистерезис.

На Рис. 1.19 представлены зависимости $\text{Max}|\Psi|$ и кинетической энергии движения от числа Рэлея для $\psi_1 = -0.110$. При данном значении ψ_1 порог конвекции, полученный в нелинейных расчётах, близок к порогу, найденному при линейном анализе устойчивости. Как видно из графиков, при данном значении ψ_1 наблюдается сильный гистерезис, благодаря которому конвективное течение

может существовать даже в области чисел Рэлея, значительно меньших порога конвекции.

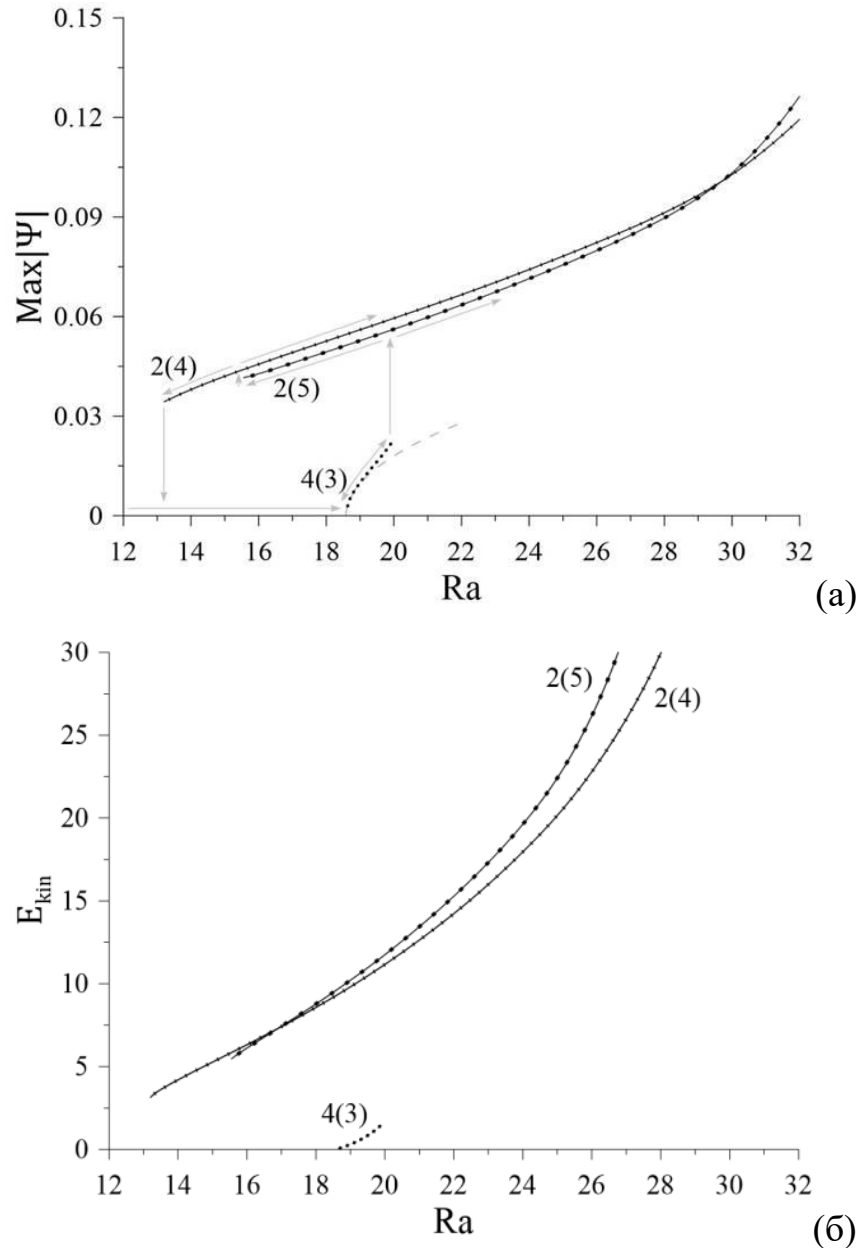


Рис. 1.19. Зависимости $\text{Max}|\Psi|$ (а) и кинетической энергии течения (б) от числа Рэлея при $\psi_1 = -0.110$ (моды неустойчивости: 2(4) – монотонная четырёхвихревая, 2(5) – монотонная пятивихревая, 4(3) – колебательная трёхвихревая)

При значении $Ra \approx 18.58$ механическое равновесие становится неустойчивым и реализуется трёхвихревой колебательный режим, который наблюдается примерно до $Ra \approx 20.00$. При дальнейшем повышении числа Рэлея

при значении примерно $Ra \approx 20.05$ система переходит от трёхвихревого колебательного режима к пятивихревому стационарному режиму, который существует от $Ra \approx 15.55$ и далее. Если находясь на этой ветви понижать число Рэлея, то при значении примерно $Ra \approx 15.50$ происходит переход к четырёхвихревому стационарному режиму, который существует в диапазоне $Ra \in (13.20; 39.00)$. Ниже этого значения конвекция затухает, выше – переходит обратно на стационарный пятивихревой режим.

Исходя из того, что при малых надкритичностях зависимость $\text{Max}|\Psi|$ от числа Рэлея для трёхвихревого колебательного режима имеет корневой характер (Рис. 1.19а), можно сделать вывод, что конвекция при данном значении ψ_1 возбуждается путём прямой бифуркации.

1.3. Влияние вибраций на возникновение и нелинейные режимы конвекции трёхкомпонентной смеси в горизонтальном пористом слое

1.3.1. Постановка задачи, основные уравнения и граничные условия

Рассмотрим влияние вибраций на возникновение и нелинейные режимы конвекции. Вся система находится в поле силы тяжести, а также под действием вибраций. Вибрации предполагаются высокочастотными и малоамплитудными, ось вибраций вертикальна. При наличии вибраций в уравнение движения добавляется сила инерции.

Уравнения, описывающие конвективное движение многокомпонентной смеси с учётом эффекта Соре в пористой среде в поле тяжести и вибраций в системе отсчёта, связанной с колеблющимся слоем, имеют следующий вид [83]:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\nu}{K} \mathbf{V} + (\beta_T(T - T_0) + \mathbf{B}(\mathbf{C} - \mathbf{C}_0))(g\boldsymbol{\gamma} - a\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{n}), \quad (1.32)$$

$$b \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)T = \chi \Delta T, \quad (1.33)$$

$$\phi \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{C} = \mathbf{D}\Delta \mathbf{C} + \mathbf{C}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C}_0)\mathbf{D}_T \Delta T, \quad (1.34)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (1.35)$$

где a – амплитуда вибраций; ω – частота вибраций; \mathbf{n} – единичный вектор оси вибраций. Остальные обозначения остаются такими же, как в Разделе 1.2.1.

Для данной системы так же, как и для системы без вибраций, выполняются операции по диагонализации матрицы коэффициентов молекулярной диффузии (Раздел 1.2.1).

1.3.2. Оценка размерных параметров системы для проверки применимости метода осреднения

Для решения системы уравнений (1.32)–(1.35) используется метод осреднения [77]. При этом уравнения упрощаются в предположении высокой частоты вибраций и малости их амплитуды. Для того чтобы это было справедливо, необходимо, чтобы период вибраций был мал по сравнению с характерными гидродинамическими временами задачи. Вибрационный временной масштаб можно записать, как:

$$\tau_{vib} = \frac{1}{\omega}.$$

Применение метода осреднения для уравнений, описывающих конвекцию в пористой среде, имеет свои особенности. Как показано в [87], в случае пористой среды, в отличие от случая свободной жидкости, в уравнении для пульсационной скорости необходимо сохранить вязкое слагаемое $-\nu \mathbf{V}/K$, что связано с малостью проницаемости реальных пористых сред, в результате чего пористый скелет сильно влияет на движение жидкости через него и вязкость играет значительную роль, приводя к необходимости учёта эффективного сопротивления среды. В случае свободной жидкости влияние вязкости может быть пренебрежимо мало по сравнению с инерционными эффектами. В случае же пористой среды отношение диссипативного члена к ускорению имеет порядок $\phi\nu/(\omega K)$ и может стать малым только на частотах $\phi\nu/K \ll \omega$, то есть для реальных пористых сред и жидкостей типа воды – в килгерцовом диапазоне, тогда как для свободной жидкости высокочастотный предел достигается уже на

частотах в несколько герц (для характерных размеров задачи в несколько сантиметров, и чем больше размер полости, тем ниже частота).

$$\tau_{vib} \ll \tau_{visc}, \quad \tau_{visc} = \frac{L^2}{\nu} \rightarrow \omega \gg \frac{\nu}{L^2},$$

$$\tau_{vib} \ll \tau_{viscP}, \quad \tau_{viscP} = \frac{K}{\phi\nu} \rightarrow \omega \gg \frac{\phi\nu}{K}.$$

где τ_{visc} , τ_{viscP} – характерные вязкостные временные масштабы для свободной жидкости и жидкости в пористой среде соответственно. Эти условия должны выполняться, для того, чтобы можно было отбросить вязкостное слагаемое в уравнении для пульсационной скорости.

В формальной процедуре усреднения, выполняемой в виде асимптотического разложения по обратной частоте, это можно учесть, зафиксировав отношение $\Omega = \omega K/\nu$, то есть, позволив проницаемости стремиться к нулю при стремлении частоты к бесконечности [88]. В настоящей работе диссипативный член не будет отбрасываться, что позволит значительно расширить область применимости рассматриваемых уравнений в сторону более низких частот вибраций.

Чтобы пренебречь диффузионными членами в уравнении энергии и уравнении для концентрации, должны выполняться следующие условия [80]:

$$\tau_{vib} \ll \tau_{cond}, \quad \tau_{cond} = \frac{bL^2}{\chi} \rightarrow \omega \gg \frac{\chi}{bL^2},$$

$$\tau_{vib} \ll \tau_{conc}, \quad \tau_{conc} = \frac{L^2}{D} \rightarrow \omega \gg \frac{D}{L^2},$$

$$\tau_{vib} \ll \tau_{concT}, \quad \tau_{concT} = \frac{L^2}{D_T} \rightarrow \omega \gg \frac{D_T}{L^2}.$$

Необходимо также, чтобы член $\rho_0\beta_T\Delta T a\omega^2$ в уравнении для пульсационной скорости являлся доминирующей силой плавучести, что справедливо, когда:

$$\tau_{vib} \ll \tau_{buoy}, \quad \tau_{buoy} = \sqrt{\frac{\phi g \beta_T \Delta T}{bL}} \rightarrow \omega \gg \sqrt{\frac{bL}{\phi g \beta_T \Delta T}}.$$

Требование малости амплитуды вибраций накладывает следующее ограничение:

$$a \ll \text{Min} \left| \frac{L}{\beta_T \Delta T}, \frac{L}{\beta_C \Delta C} \right|.$$

Параметр Буссинеска ($\beta_T \Delta T$), как правило, мал и для слоя воды толщиной $L = 0.01$ м при разнице температур между стенками $\Delta T = 10$ К ограничение на амплитуду вибраций получается порядка $a \ll 3.3$ м. Концентрационное условие, как правило, даёт ещё более высокую оценку. Отметим, что требование малости амплитуды вибраций в рассматриваемой постановке задачи вообще не является необходимым, поскольку нелинейные слагаемые будут отброшены.

Проведём оценку для пористого слоя, заполненного водой. Рассмотрим следующие параметры системы: $L = 0.01$ м, $\phi = 0.15$, $K = 10^{-10}$ м², $\chi = 3.6 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\nu = 10^{-6}$ м/с², $b = 1$, $\beta_T = 3 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹, $g = 9.8$ м/с², $D = 11.1 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $D_T = -0.93 \cdot 10^{-12}$ м²/(с · К), $\Delta T = 10$ К. Для данных параметров системы характерные времена получаются следующими:

$$\tau_{cond} \approx 280, \tau_{conc} \approx 9, \tau_{conct} \approx 10^8, \tau_{buoy} \approx 0.7,$$

где τ_{cond} , τ_{conc} , τ_{conct} , τ_{buoy} – характерные тепловой, диффузионный, термодиффузионный временные масштабы и временной масштаб гравитационной плавучести соответственно. Это означает, что принятые предположения будут справедливы для частот ω порядка 5 рад/с или около одного герца ($\omega = 2\pi f$). Если ставить условие, необходимое для того, чтобы отбросить вязкое слагаемое в уравнении для пульсационной скорости, то при значении $K \sim 10^{-12}$ м², характерном для геологических пористых сред, минимальные допустимые частоты вибраций будут лежать в ультразвуковом диапазоне ($f \sim 10^4 - 10^5$ Hz).

Амплитуду вибраций можно выразить из вибрационного числа Рэлея:

$$a = \sqrt{\frac{2Ra_\nu \nu \chi}{K\phi}} \cdot \frac{1}{\omega \beta_T \Delta T}.$$

Для представленных выше параметров системы и значений

$Ra_\nu = 1$, $\omega = 1000$ величина амплитуды получается равной $a \approx 0.07$ м.

Оценить средний диаметр пор в пористой среде можно с помощью упрощённой модели Козени-Кармана, основанной на предположении, что

пористая среда состоит из системы цилиндрических капилляров одинакового сечения [89]. Для такой системы имеет место соотношение:

$$K = \frac{\phi R^2}{8} \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{8K}{\phi}} \quad \rightarrow \quad d = 2R = 4\sqrt{\frac{2K}{\phi}},$$

где R – это средний радиус поры, а d – средний диаметр поры.

Таким образом, при пористости $\phi = 0.15$ и проницаемости $K = 10^{-10} \text{ м}^2$ средний диаметр поры составляет $d = 0.15 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, а при проницаемости $K = 10^{-12} \text{ м}^2$ получается $d = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

1.3.3. Метод осреднения

Разделяя скорость, давление, температуру и концентрацию примесей на медленно меняющиеся средние за период вибраций части и быстро меняющиеся пульсационные части

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}', \quad T = \bar{T} + T', \quad P = \bar{P} + P', \quad \mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}} + \mathbf{C}', \quad (1.36)$$

и подставляя разложение (1.36) в систему (1.32)–(1.35), получим уравнения для пульсационных компонент в виде:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P' - \frac{\nu}{K} \mathbf{V}' + (\beta_T (\bar{T} - \bar{T}_0) - \mathbf{B}(\mathbf{C}' - \mathbf{C}'_0)) a \omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{n}, \quad (1.37)$$

$$b \frac{\partial T'}{\partial t} = -(\mathbf{V}' \nabla) \bar{T}, \quad (1.38)$$

$$\phi \frac{\partial \mathbf{C}'}{\partial t} = -(\mathbf{V}' \nabla) \mathbf{C}', \quad (1.39)$$

$$\text{div } \mathbf{V}' = 0. \quad (1.40)$$

В полученных уравнениях нелинейные слагаемые отбрасываются по причине малости пульсационных компонент. Пульсационные поля осциллируют с высокой частотой и их среднее значение за период вибраций равно нулю. Использование для температуры средних величин \bar{T} объясняется тем, что пульсации T' исчезают при осреднении, а макроскопический теплоперенос описывается медленной компонентой \bar{T} .

Как уже отмечалось выше, в пористой среде, в отличие от случая свободной жидкости, необходимо учитывать вязкость в уравнениях для пульсаций. Принимая во внимание разложение Гельмгольца вектора средней температуры на соленоидальную и потенциальную части $\bar{T}\mathbf{n} = \mathbf{w}/\delta + \nabla\varphi$, получаем пульсационные скорость и температуру (введение параметра δ позволяет учесть вязкость жидкости). Используя их, усредняем полную систему уравнений (1.32)–(1.35) по периоду вибраций. Далее обезразмерим полученные уравнения, введя следующие единицы измерения длины, скорости, времени, давления, температуры и концентрации:

$$y = L \cdot y_{ND}, \quad V = \frac{\chi}{L} \cdot V_{ND}, \quad t = \frac{L^2(\rho c)_p}{\lambda^*} \cdot t_{ND}, \quad P = \frac{\rho \chi v}{K} \cdot P_{ND},$$

$$T - T_0 = \Delta T \cdot T_{ND}, \quad \mathbf{C} - \mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0(\mathbf{C}_0 - \mathbf{I})\Delta T \mathbf{D}_T(\mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{C}_{ND}.$$

Уравнения, полученные путем осреднения с использованием указанных выше предположений [87, 88], в безразмерной форме имеют вид:

$$0 = -\nabla \bar{P} - \bar{\mathbf{V}} + \text{Ra}(\bar{T} + \boldsymbol{\psi}\bar{\mathbf{C}})\boldsymbol{\gamma} + \frac{\text{Ra}_v}{b^2\varepsilon}(\mathbf{w} \cdot \nabla) \left[\left(\bar{T} + \frac{\boldsymbol{\psi}}{\varepsilon}\bar{\mathbf{C}} \right) \mathbf{n} - \frac{\mathbf{w}}{\varepsilon\delta} \right], \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\bar{T} = \Delta \bar{T}, \quad (1.42)$$

$$\text{Le} \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{C}} \right) = \Delta \bar{\mathbf{C}} - \mathbf{I} \cdot \Delta \bar{T}, \quad (1.43)$$

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla(\delta(\bar{T} + \boldsymbol{\psi}\bar{\mathbf{C}})) \times \mathbf{n}, \quad (1.44)$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{V}} = 0, \quad (1.45)$$

$$\text{div } \mathbf{w} = 0, \quad (1.46)$$

где $\text{Ra}_v = \text{R}^2 \text{Ra}^2 = \frac{K\phi(a\omega\beta_T\Delta T)^2}{2\nu\chi}$ – вибрационное число Рэлея ($\text{R}^2 = \frac{\phi\nu\chi}{2K} \left(\frac{a\omega}{gL} \right)^2$); \mathbf{w} –

соленоидальная часть вектора средней температуры; $\delta = \frac{\Omega^2/\phi}{1+\Omega^2/\phi^2}$ – параметр,

позволяющий учесть вязкость жидкости; $\Omega = \frac{\omega K}{\nu}$ – безразмерная частота

вибраций. Остальные обозначения остаются такими же, как в Разделе 1.2.2.

На границах слоя ставится условие непроницаемости, заданы постоянные разные температуры и считается выполненным условие отсутствия потока вещества. Эти условия в безразмерной форме имеют вид:

$$y = 0, 1 : \quad V_y = 0, \quad T = 1, 0, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} - \mathbf{I} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (1.47)$$

Полученная система уравнений (1.41)-(1.47) переходит в систему для описания термоконцентрационной конвекции (без вибраций, Раздел 1.2.2), если принять $Ra_v = 0$. Если принять $\delta = 1$ (пренебречь влиянием вязкости жидкости), то данная система переходит в систему, полученную в работе [80], где вязкость в уравнениях для пульсационной скорости и температуры не учитывалась. Если принять $\psi = 0$, то система (1.41)-(1.47) переходит в систему для описания термовибрационной конвекции однокомпонентной жидкости [90].

1.3.4. Спектрально-амплитудная задача

В рассматриваемом случае вибраций, параллельных градиенту температуры, возможно состояние механического равновесия, в котором и средняя и пульсационная скорости равны нулю:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 = 0, \quad T_0 = 1 - y, \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{I} \cdot \left(\frac{1}{2} - y\right), \quad \mathbf{w} = 0, \\ P_0 = Ra \left(-\frac{y^2}{2} (1 + \psi \cdot \mathbf{I}) + y \left(1 + \frac{1}{2} \psi \cdot \mathbf{I}\right) + const\right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Для линейного исследования устойчивости состояния механического равновесия (1.48) представим все поля в виде суммы основного состояния и малого возмущения:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}', \quad T = T_0 + T', \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}', \\ P = P_0 + P', \quad w = w_0 + w'. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Подставим поля в таком виде в уравнения (1.41)–(1.47) и линеаризуем полученные уравнения относительно малых возмущений. Затем, рассмотрим нормальные возмущения следующего вида:

$$(V'_y, T', \mathbf{C}', w') = (\varphi(y), \theta(y), \boldsymbol{\xi}(y), f(y)) \cdot e^{-\lambda t + ikx}. \quad (1.50)$$

Величины $\varphi, \theta, \boldsymbol{\xi}, f$ представляют собой амплитуды возмущений скорости, температуры, концентраций примесей ($\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ – вектор-столбец) и соленоидальной части вектора температуры.

После подстановки (1.50) в линеаризованные уравнения, исключения давления и горизонтальной составляющей скорости, а также введения новой функции $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\theta}$, представляющей собой комбинацию возмущений концентрации и температуры, получаем систему уравнений для амплитуд возмущений следующего вида:

$$0 = \varphi'' - k^2 \varphi + k^2 \text{Ra}[(1 + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I})\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\eta}] - k^2 \frac{\text{Ra}_v}{b^2 \varepsilon} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I}}{\varepsilon}\right) f, \quad (1.51)$$

$$\lambda \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\theta}'' - k^2 \boldsymbol{\theta}, \quad (1.52)$$

$$\text{Le}[\varepsilon \lambda (\boldsymbol{\eta} + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varphi}] = \boldsymbol{\eta}'' - k^2 \boldsymbol{\eta}, \quad (1.53)$$

$$f'' - k^2 f = -k^2 \delta [(1 + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I})\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\eta}]. \quad (1.54)$$

Граничные условия для амплитуд возмущений имеют вид:

$$y = 0, 1: \quad \varphi = 0, \quad \boldsymbol{\theta} = 0, \quad f = 0, \quad \boldsymbol{\eta}' = 0. \quad (1.55)$$

Решение системы уравнений (1.51)–(1.54) с граничными условиями (1.55) так же, как и в случае без вибраций (Раздел 1.2.2), приводит к задаче на собственные значения.

1.3.5. Линейный анализ устойчивости

Для данной задачи также проводился длинноволновый анализ, в результате которого было установлено, что на длинноволновую неустойчивость равновесия вибрации не влияют.

Аналогично Разделу 1.2.3, линейное исследование устойчивости равновесия для возмущений с ненулевым волновым числом производилось путем численного решения задачи (1.51)–(1.55) методом Рунге-Кутты 5-го порядка с последующим поиском нуля определителя матрицы фундаментальной системы решений с использованием двумерного метода секущих.

Значения вибрационного числа Рэлея рассматривались $\text{Ra}_v = 1.5, 7.5$. Значение параметра δ зависит от частоты вибрационного воздействия и от вязкости жидкости. Анализ показал, что $\delta \in [0; \phi)$. Причём, при $\Omega = \omega K / \nu$

порядка 1 и больше, $\delta \rightarrow \phi$. В дальнейших расчётах примем $\delta = 0.15$. Значение b принималось равным 1.

Расчеты, проведенные при отличных от нуля значениях Ra_v , показали, что вибрации приводят к увеличению по модулю значений отношения разделения, при которых ветви длинноволновых мод (монотонной и колебательной) переходят в ветви ячеистых мод: в случае монотонной моды для $Ra_v = 0$ переход происходит при $\psi_1 = -0.0651$, для $Ra_v = 1.5$ при $\psi_1 = -0.0666$, а для $Ra_v = 7.5$ при $\psi_1 = -0.0688$ (Рис. 20). В случае колебательной моды для $Ra_v = 0$ переход происходит при $\psi_1 = -0.100$, для $Ra_v = 1.5$ при $\psi_1 = -0.103$, а для $Ra_v = 7.5$ при $\psi_1 = -0.107$ (Рис. 1.21). На длинноволновую моду ($k = 0$) вибрации не влияют.

При отличных от нуля значениях Ra_v все кривые ячеистых монотонных мод лежат между двумя предельными кривыми (Рис. 1.20): $Ra_v = 0$ (классическая конвекция Соре под действием статической силы тяжести) и $k = 0$ (длинноволновая мода). Таким образом, вертикальные вибрации повышают порог конвекции, вместе с этим сужая диапазон существования ячеистых монотонных возмущений.

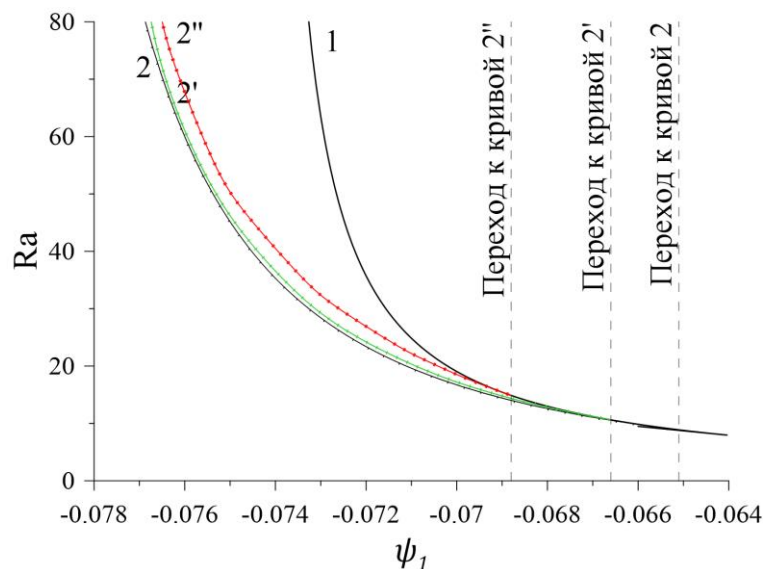


Рис. 1.20. Карта устойчивости системы для монотонных мод (моды неустойчивости: 1 – монотонная длинноволновая, 2 – монотонная ячеистая $Ra_v = 0$, 2' – монотонная ячеистая $Ra_v = 1.5$, 2'' – монотонная ячеистая $Ra_v = 7.5$)

Вибрации также влияют на порог ячеистой колебательной неустойчивости (Рис. 1.21). При всех исследованных значениях Ra_v кривая длинноволновой колебательной моды очень плавно переходит в кривые ячеистых колебательных мод, однако при дальнейшем увеличении (по модулю) ψ_1 на кривых этих мод возникает перегиб (в случае с ненулевым Ra_v – скачок), в котором кривая меняет характер наклона. Это, также как и в случае без вибраций, связано со сменой локального минимума на нейтральных кривых. Такой скачок имеет место для всех исследованных значений Ra_v , однако при более высоких значениях Ra_v он немного смещается в сторону более высоких (по модулю) ψ_1 : для $Ra_v = 0$ точка перегиба $\psi_1 = 0.1127$, для $Ra_v = 1.5$ точка скачка $\psi_1 = 0.1143$, для $Ra_v = 7.5$ точка скачка $\psi_1 = 0.1153$.

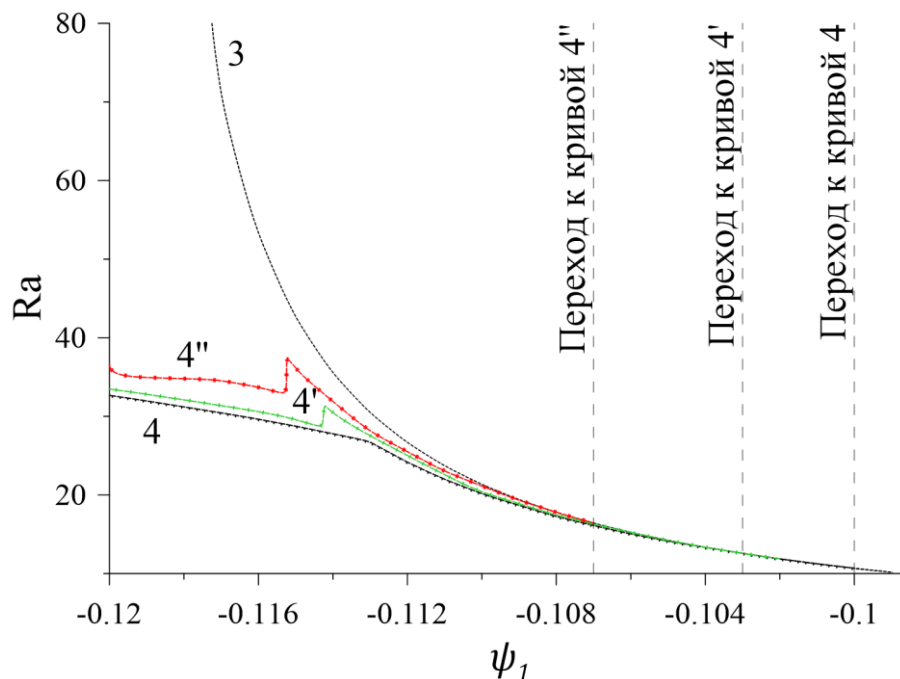


Рис. 1.21. Карта устойчивости системы для колебательных мод (кривые неустойчивости: 3 – колебательная длинноволновая, 4 – колебательная ячеистая $Ra_v = 0$, 4' – колебательная ячеистая $Ra_v = 1.5$, 4'' – колебательная ячеистая $Ra_v = 7.5$)

На Рис. 1.22 представлена полная карта устойчивости системы, включающая в себя моды при ненулевом вибрационном числе Рэлея Ra_v .

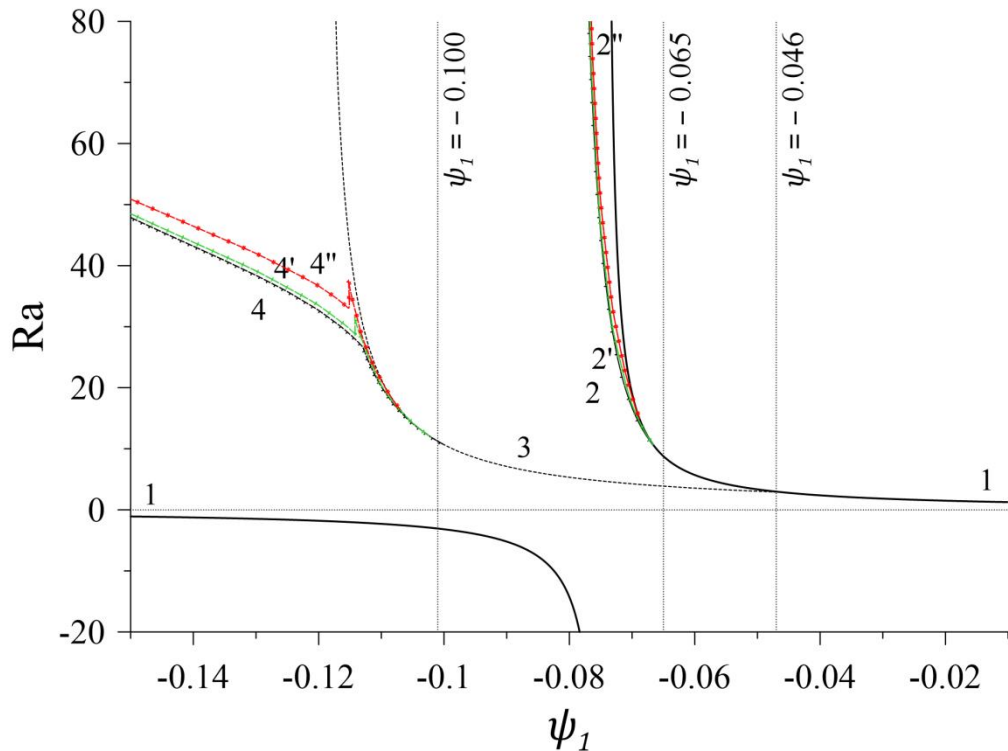


Рис. 1.22. Карта устойчивости системы (моды неустойчивости: 1 – монотонная длинноволновая, 2 – монотонная ячеистая $Ra_v = 0$, 2' – монотонная ячеистая $Ra_v = 1.5$, 2'' – монотонная ячеистая $Ra_v = 7.5$, 3 – колебательная длинноволновая, 4 – колебательная ячеистая $Ra_v = 0$, 4' – колебательная ячеистая $Ra_v = 1.5$, 4'' – колебательная ячеистая $Ra_v = 7.5$)

На Рис. 1.23 показано влияние вибраций на критическое волновое число для ячеистой монотонной моды при разных значениях Ra_v . Как видно, вибрации сужают диапазон существования ячеистой монотонной моды. Однако при увеличении (по модулю) ψ_1 влияние вибраций на волновое число становится всё менее значительным.

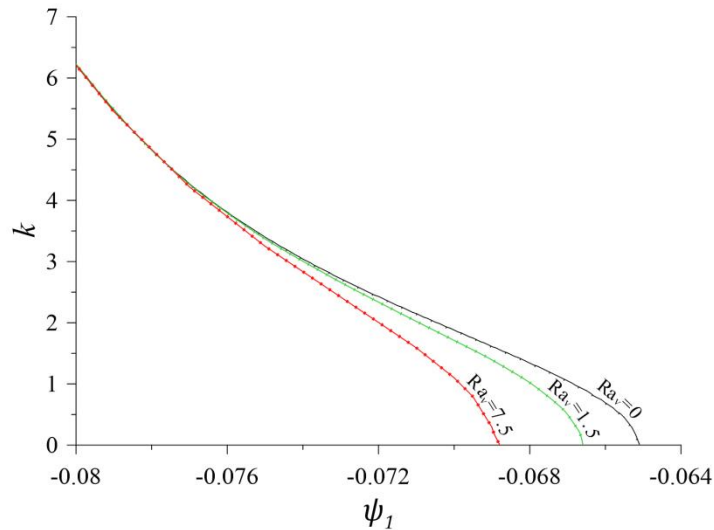


Рис. 1.23. Зависимость волнового числа от ψ_1 для ячеистой монотонной моды

На Рис. 1.24 показано влияние вибраций на критическое волновое число для ячеистой колебательной моды при разных значениях Ra_v . Как видно, наличие вибраций сужает диапазон существования ячеистой колебательной моды и так же, как и в случае монотонной моды, при увеличении (по модулю) ψ_1 влияние вибраций на волновое число становится всё менее значительным.

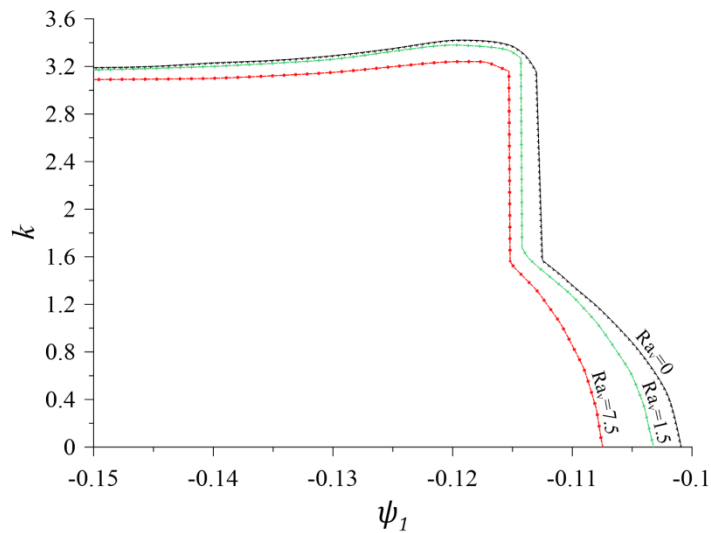


Рис. 1.24. Зависимость волнового числа от ψ_1 для ячеистой колебательной моды

Из Рис. 1.25 видно, что частота колебаний на ветвях ячеистой колебательной моды при всех исследованных значениях Ra_v до и после точки перегиба (скачка) монотонно растёт с ростом (по модулю) ψ_1 , причём после точки

перегиба (скачка) рост линейный. Наличие вибраций уменьшает частоту колебаний во всём диапазоне существования возмущений

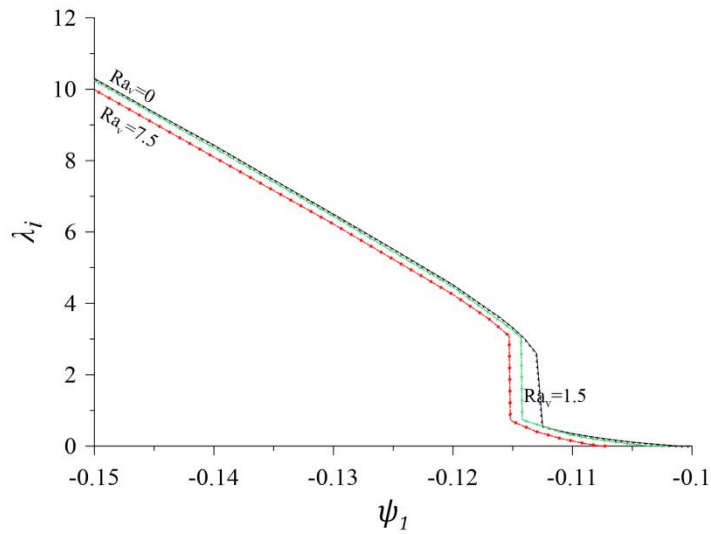


Рис. 1.25. Зависимость частоты колебаний от ψ_1 для ячеистой колебательной моды

Как отмечалось выше, на устойчивость системы влияют значения пористости ϕ , вязкость жидкости ν , а также частота вибраций ω . Помимо того, что эти величины входят в вибрационное число Рэлея, они также входят и в другие члены, влияющие на конвективную устойчивость. Вязкость жидкости ν влияет на значение $\delta = (\Omega^2/\phi)/(1 + \Omega^2/\phi^2)$, где $\Omega = \omega K/\nu$. Рассмотрим зависимость δ от Ω и ϕ (Рис. 1.26).

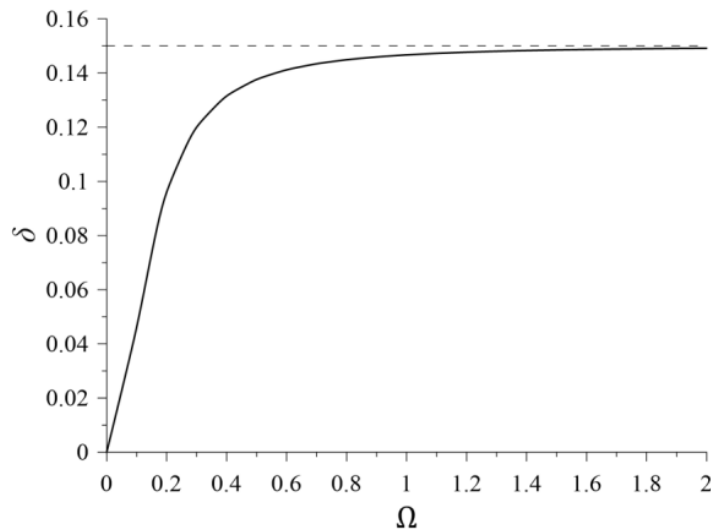


Рис. 1.26. Зависимость δ от безразмерной частоты колебаний Ω для $\phi = 0.15$

Как видно, значения δ лежат в пределах от 0 до ϕ , причём, при $\Omega \approx 1$ и более высоких уже достигается значение δ , близкое к максимальному.

В целом можно сказать, что на монотонную моду неустойчивости вибрации влияют достаточно слабо. На колебательную моду влияние вибраций более значительное. Причём, с увеличением (по модулю) ψ_1 их влияние усиливается.

1.3.6. Нелинейные конвективные режимы

Постановка задачи, граничные условия и метод решения

Рассмотрим теперь данную задачу в нелинейной постановке. Для изучения нелинейных режимов конвекции решалась система уравнений (1.41)-(1.46). Расчеты проводились в двумерной постановке для вытянутой по горизонтали прямоугольной полости с отношением сторон 5x1. На всех границах ставились условия непроницаемости и отсутствия потока вещества. На горизонтальных границах ставились условия (1.47), на вертикальных (теплоизолированных) границах следующие условия:

$$x = 0, 5 : \quad V_x = 0, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0. \quad (1.56)$$

Введём функцию тока для \mathbf{V} , определяемую соотношениями $V_x = \partial\Psi/\partial y$, $V_y = -\partial\Psi/\partial x$, а также функцию тока для \mathbf{w} , определяемую соотношениями $w_x = \partial\Phi/\partial y$, $w_y = -\partial\Phi/\partial x$. Система уравнений (1.41)-(1.46) в терминах функций тока принимает вид ($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$):

$$\Delta\Psi = -\text{Ra} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \psi \frac{\partial c}{\partial x} \right) - F(\text{Ra}_v, \delta, b, \varepsilon), \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \Delta T, \quad (1.58)$$

$$\text{Le} \left(\varepsilon \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \Delta c - \mathbf{I} \cdot \Delta T, \quad (1.59)$$

$$\Delta\Phi = -\delta \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \psi \frac{\partial c}{\partial x} \right), \quad (1.60)$$

где $F(\text{Ra}_v, \delta, b, \varepsilon)$ – нелинейная функция, отвечающая за учёт вибраций (нижний индекс при Φ обозначает дифференцирование ($\Phi_x = \partial\Phi/\partial x$)):

$$F = \frac{\text{Ra}_v}{b^2 \varepsilon^2 \delta} (\Phi_y \Phi_{xyy} - \Phi_x \Phi_{yyx} - \Phi_y \Phi_{xxx} + \Phi_x \Phi_{xxy}) - \frac{\text{Ra}_v}{b^2 \varepsilon} \left[\Phi_{xy} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \psi \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \Phi_y \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \psi \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) - \Phi_{xx} \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon} \psi \frac{\partial C}{\partial y} \right) - \Phi_x \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\varepsilon} \psi \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \right) \right]. \quad (1.61)$$

Граничные условия:

$$x = 0, 5: \quad \Psi = 0, \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad (1.62)$$

$$y = 0: \quad \Psi = 0, \quad \Phi = 0, \quad T = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial y} - \mathbf{I} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (1.63)$$

$$y = 1: \quad \Psi = 0, \quad \Phi = 0, \quad T = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} - \mathbf{I} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (1.64)$$

Использовался метод решения аналогичный методу, рассматриваемому в Разделе 1.2.4. Уравнения (1.57) и (1.60) решались методом последовательной верхней релаксации. Шаг сетки составлял $1/35$ по вертикали и $1/175$ по горизонтали. Разрешение было повышено относительно задачи без вибраций (Раздел 1.2.4) для достижения максимальной точности определения параметров системы, так как между исследуемыми значениями Ra_v не ожидаются большие отличия в критическом числе Рэлея.

Рассматриваемые параметры системы

Согласно результатам линейного исследования системы (Раздел 1.3.5), вибрации влияют только на ячеистые монотонную и колебательную моды. Ограничимся рассмотрением параметров, при которых ожидается значительное влияние вибраций. Вибрации влияют на критическое число Рэлея, критическое волновое число и частоту колебаний (для колебательной неустойчивости). Принимая во внимание эти данные (Рис. 1.20, 1.21, 1.23, 1.24, 1.25), рассмотрим такие параметры системы, при которых для исследуемой геометрии задачи влияние вибраций должно быть наиболее выраженным: $\psi_1 = -0.070$ и $\psi_1 =$

–0.108. При данных значениях ψ_1 , согласно линейной теории, изменение Ra_v приведёт к наиболее значительному изменению критического числа Рэлея Ra и критического волнового числа k .

При $\psi_1 = -0.070$, согласно линейной теории, должна реализовываться ячеистая монотонная мода. Для случая без вибраций ($Ra_v = 0$) критическое число Рэлея равно $Ra = 16.71$, а критическое волновое число принимает значение $k = 1.88$, что для рассматриваемой геометрии полости (5:1) находится на границе между пятивихревым и шестивихревым режимами. При $Ra_v = 7.5$ критическое число Рэлея равно $Ra = 18.53$, а критическое волновое число принимает значение $k = 1.10$, что соответствует трёхвихревому режиму. Необходимо учитывать, что для данного значения ψ_1 наиболее опасной модой является длинноволновая колебательная, которая при росте надкритичности переходит в монотонные моды. Данные переходы были подробно исследованы в Разделе 1.2.4, а теперь рассмотрим, как вибрации будут влиять на ветви ячеистых монотонных мод.

При $\psi_1 = -0.108$, согласно линейной теории, должна реализовываться ячеистая колебательная мода. Для случая без вибраций ($Ra_v = 0$) критическое число Рэлея равно $Ra = 17.26$, а критическое волновое число принимает значение $k = 1.19$, что соответствует трёхвихревому режиму для рассматриваемой геометрии полости (5:1). При $Ra_v = 7.5$ критическое число Рэлея равняется $Ra = 17.79$, а критическое волновое число принимает значение $k = 0.31$, что соответствует одновихревому режиму.

Остальные параметры системы используются такие же, как в Разделе 1.3.5. Вибрационное число Рэлея Ra_v рассматривается либо нулевым (вибрации отсутствуют), либо максимальным из исследованных, чтобы влияние вибраций было наиболее выражено. Таким образом, для моделирования нелинейных режимов конвекции используются следующие параметры:

$$\psi_2 = 0.120 \quad Le_1 = 147 \quad Le_2 = 91 \quad \varepsilon = 0.15 \quad \delta = 0.15 \quad b = 1$$

$$\psi_1 = \{-0.070, -0.108\} \quad Ra_v = \{0, 7.5\}$$

Численные результаты

На Рис. 1.27 представлены зависимости модуля максимального значения функции тока в полости $\text{Max}|\Psi|$ и кинетической энергии течения от числа Рэлея Ra для $\psi_1 = -0.108$ и различных значений Ra_v . Согласно линейной теории, при $Ra_v = 0$ должен реализовываться трёхвихревой колебательный режим, а при $Ra_v = 7.5$ – одновихревой колебательный. Как показали нелинейные расчёты, в системе действительно реализуются предсказанные линейной теорией режимы. Критическое число Рэлея также с хорошей точностью соответствует предсказаниям линейной теории: в нелинейном счёте при $Ra_v = 0$ порог конвекции соответствует $Ra = 16.737$ (отличие от линейной теории 3.0%), при $Ra_v = 7.5$ порог конвекции соответствует $Ra = 17.418$ (отличие от линейной теории 2.1%). Причём, как и предсказывает линейная теория, данные режимы являются наиболее опасными, а также имеет место корневой закон зависимости интегральной характеристики течения $\text{Max}|\Psi|$ от надкритичности, что говорит о возбуждении конвекции путём прямой бифуркации.

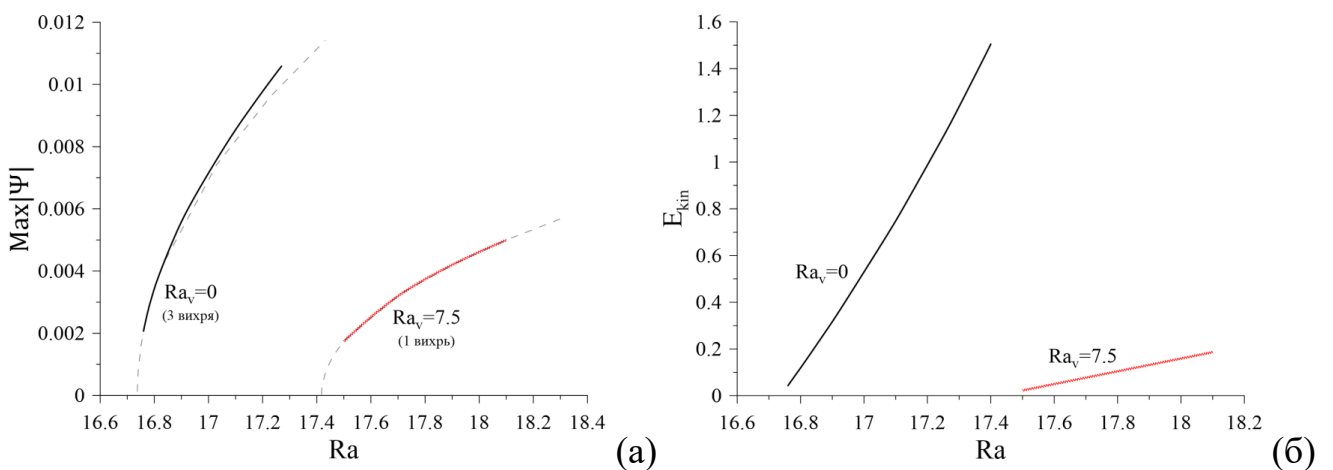


Рис. 1.27. Зависимость $\text{Max}|\Psi|$ (а) и кинетической энергии течения (б) от числа Рэлея Ra при $\psi_1 = -0.108$ (штриховая линия – корневой закон вблизи порога конвекции)

На Рис. 1.28 представлены зависимости модуля максимального значения функции тока в полости $\text{Max}|\Psi|$ и кинетической энергии течения от числа Рэлея Ra для $\psi_1 = -0.070$ и различных значений Ra_v . Согласно линейной теории, при

данном значении ψ_1 наиболее опасной модой является длинноволновая колебательная, однако при более высоких надкритичностях могут реализовываться ячеистые монотонные моды. В частности, при $Ra_v = 0$ должен реализовываться пяти или шестивихревой монотонный режим, а при $Ra_v = 7.5$ – трёхвихревой монотонный режим.

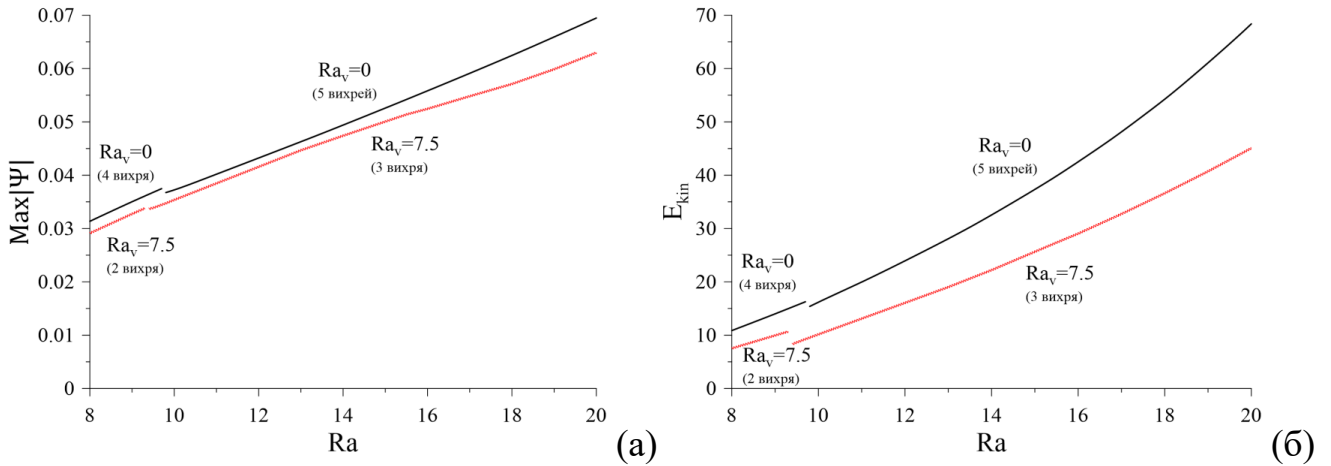


Рис. 1.28. Зависимость $Max|\Psi|$ (а) и кинетической энергии течения (б) от числа Рэлея Ra при $\psi_1 = -0.070$

Как показали нелинейные расчёты, при повышенных надкритичностях в системе действительно реализуются предсказанные линейной теорией режимы с ожидаемым количеством валов. Предсказанные режимы существуют в широком диапазоне чисел Рэлея и при приближении к порогу конвекции переходят в режимы с меньшим количеством валов, что соответствует общей тенденции увеличения количества конвективных валов при увеличении надкритичности. При $Ra_v = 0$ переход между четырёхвихревым и пятивихревым режимом происходит в точке $Ra = 9.75$. При $Ra_v = 7.5$ переход между двухвихревым и трёхвихревым режимом происходит в точке $Ra = 9.35$. Данные переходы не сопровождаются гистерезисом.

Линейная теория хорошо предсказывает порог конвекции для наиболее опасной моды, однако точка перехода от наиболее опасной моды (в данном случае – длинноволновой колебательной) к находящейся над ней модой на карте режимов линейная теория может предсказать только при близком расположении

данных мод, как было показано в Разделе 1.2.4. Это связано с тем, что длинноволновая колебательная мода существует лишь в очень узком диапазоне чисел Рэлея, а далее, при повышении надкритичности, переходит в монотонные моды. Тем не менее, как было показано, линейная теория правильно предсказывает волновое число наиболее опасных возмущений даже для случая повышенных надкритичностей.

В связи с тем, что скорости естественных течений жидкостей в пористых средах чрезвычайно низкие (для реальных геологических пористых сред с проницаемостью порядка 10^{-12} м² скорости конвективных течений составляют порядка 10^{-8} м/с и ниже), конвективный массоперенос в таких средах может быть сопоставим с диффузионным. При этом если термодиффузия стремится разделить компоненты смеси на фракции, то конвекция наоборот – стремится их смешать. Возникает вопрос о том, какие конвективные структуры могут образовываться и как они влияют на распределение концентрации примесей. На Рис. 1.29 представлены поля Ψ , Φ , температуры и концентрации примесей для одновихревого режима (вертикальная ось – y , горизонтальная ось – x). На Рис. 1.30 и Рис. 1.31 представлены данные поля для трёхвихревого и пятивихревого режимов. Стационарное распределение концентрации в состоянии механического равновесия соответствует её вертикальному градиенту, а зависимость концентрации от вертикальной координаты y задаётся формулой (1.48). В масштаб обезразмеривания для концентрации входит коэффициент термодиффузии D_T , который может иметь как положительные, так и отрицательные значения. При построении полей концентраций в размерном виде, его знак будет определять направление градиента поля концентрации. Как видно из Рис. 1.29-1.31, несмотря на низкую интенсивность, конвекция сильно влияет на распределение концентраций примесей по слою, нарушая вертикальную стратификацию плотности примесей, связанную с термодиффузией.

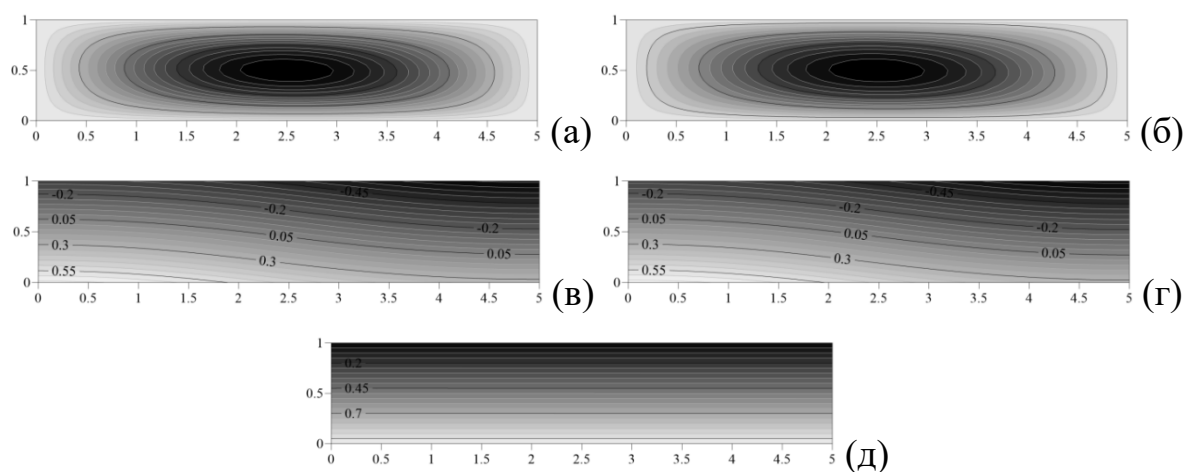


Рис. 1.29. Поля Ψ (а), Φ (б), концентрации первой (в) и второй (г) компоненты примеси и температуры (д) при $\psi_1 = -0.108$, $Ra_v = 7.5$, $Ra = 18.1$ (одновихревой режим)

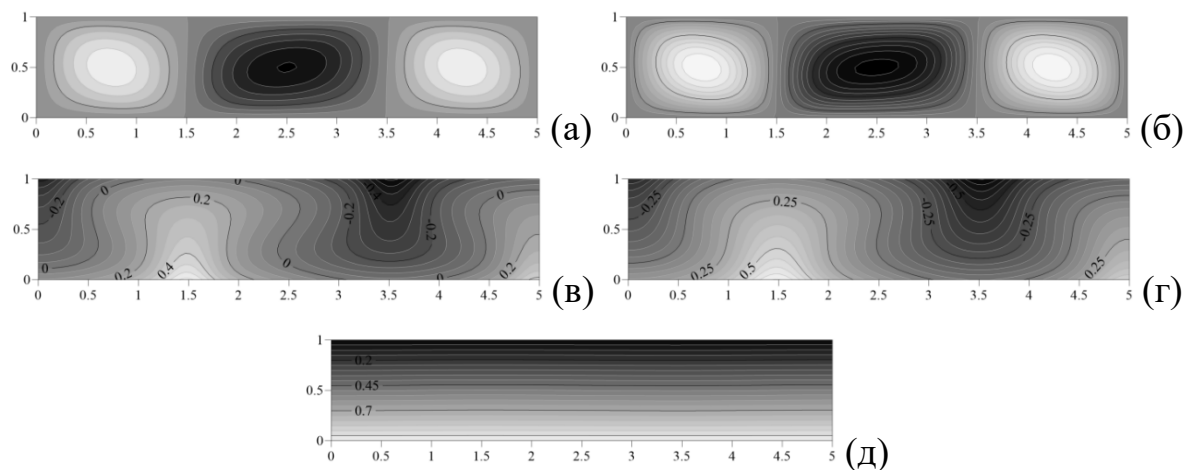


Рис. 1.30. Поля Ψ (а), Φ (б), концентрации первой (в) и второй (г) компоненты примеси и температуры (д) при $\psi_1 = -0.070$, $Ra_v = 7.5$, $Ra = 10$ (трёхвихревой режим)

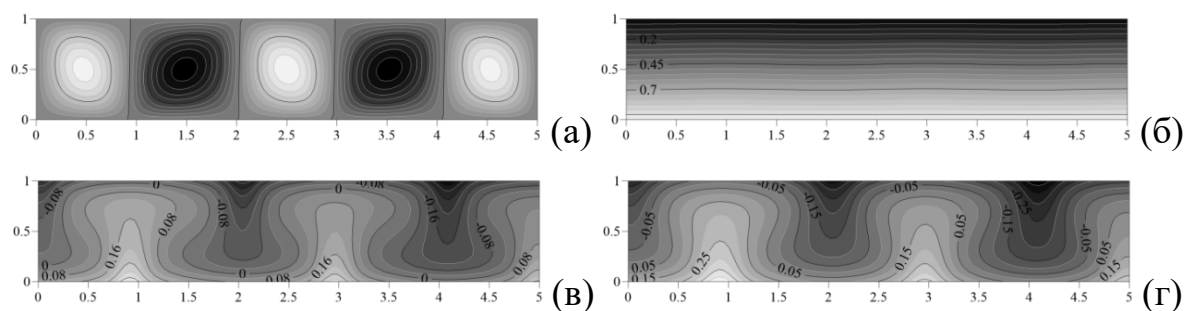


Рис. 1.31. Поля Ψ (а), температуры (б), концентрации первой (в) и второй (г) компоненты примеси при $\psi_1 = -0.070$, $Ra_v = 0$, $Ra = 13.5$ (пятивихревой режим)

Отметим, что в зависимости от начальных условий в системе могут реализовываться и другие конвективные режимы (с другим количеством валов), помимо тех, что были представлены на графиках. Таким образом, как и для случая без вибраций, в системе имеет место множество конвективных режимов, переходы между которыми, как правило, сопровождаются гистерезисом. Наличие вертикальных вибраций не нарушает эту тенденцию и не приводит к качественным изменениям структуры течений и распределения концентраций примесей по слою.

1.4. Заключение по главе

Исследованы линейная устойчивость механического равновесия и нелинейные режимы конвекции трёхкомпонентной смеси в горизонтальном пористом слое, подогреваемом снизу. С помощью численного решения линейной задачи устойчивости получена полная карта устойчивости механического равновесия на плоскости число Рэлея – отношение разделения. Границы устойчивости для длинноволновых возмущений и частота критических возмущений, полученные в результате численного линейного исследования, согласуются с результатами, полученными из длинноволнового анализа.

Обнаружена длинноволновая колебательная мода неустойчивости, существующая при отрицательных отношениях разделения. Определён диапазон параметров, в котором эта мода является наиболее опасной.

Выполнено численное решение полной нелинейной задачи методом конечных разностей. В частности, при значении $\psi_1 = -0.055$, когда согласно линейному анализу устойчивости наиболее опасными являются длинноволновые колебательные возмущения, при потере устойчивости механического равновесия возникает режим стационарных колебаний длинноволновой структуры, причем этот режим ответвляется от состояния механического равновесия в результате прямой бифуркации. Порог конвекции и частота колебаний вблизи порога хорошо согласуются с данными линейного анализа устойчивости. При надкритичности

около 3.4% происходит переход к длинноволновому монотонному режиму. Исследование эволюции этого режима при уменьшении числа Релея показало наличие гистерезиса. Аналогичное возбуждение конвекции наблюдается и при $\psi_1 = -0.080$. При $\psi_1 = -0.110$ численное решение полной нелинейной задачи методом конечных разностей подтвердило, что при потере устойчивости механического равновесия возникает ячеистый колебательный режим. Количество вихрей в рассматриваемой области согласуется с предсказанным линейной теорией волновым числом наиболее опасных возмущений. При дальнейшем увеличении надкритичности система переходит на монотонные режимы с выраженным гистерезисом.

Исследовано влияния высокочастотных вертикальных вибраций малой амплитуды в рамках модели, учитывающей вязкость в уравнениях для пульсаций. Показано, что вибрации приводят к сдвигу точек перехода длинноволновых мод в ячеистые, расширяя диапазон существования длинноволновых мод. При увеличении (по модулю) отношения разделения ψ_1 влияние вибраций на волновое число становится всё менее значительным. Вибрации также повышают порог конвекции для ячеистых возмущений и уменьшают частоту колебательных возмущений.

Нелинейное исследование методом конечных разностей показало, что, как и в случае без вибраций, при повышенных надкритичностях может реализовываться множество конвективных режимов с различным количеством валов в пределах рассматриваемой области, которое растёт с ростом надкритичности. Переходы между режимами также могут сопровождаться сильным гистерезисом.

Конвекция сильно влияет на распределение концентрации примесей по слою. С увеличением интенсивности течения влияние на распределение концентрации усиливается.

Глава 2. ТРЁХМЕРНЫЕ РЕЖИМЫ КОНВЕКЦИИ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ В НАКЛОННОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

2.1. Введение

В отличие от классической задачи Рэлея-Бенара, в бесконечном плоском слое, наклонённом под углом к горизонту, в случае постоянных разных температур на границах при любой разности температур возникает стационарное течение. Ключевым моментом является зависимость условий потери устойчивости этого течения от угла наклона слоя. Одной из первых работ в этом направлении была статья [91], в которой исследовались течения в наклонной полости с верхней и нижней (в случае горизонтальной ориентации полости) стенками, поддерживаемыми при постоянных разных температурах.

В работе [92] проведён линейный анализ устойчивости плоскопараллельного течения в бесконечно-протяжённом наклонном слое с постоянными разными температурами на границах. Показано, что в зависимости от угла наклона слоя неустойчивость может быть вызвана либо тепловым механизмом (как в задаче Рэлея-Бенара), либо гидродинамическим (связанным с формой профиля скорости основного течения).

В общем случае конвективные валы могут быть по-разному ориентированы вдоль слоя. Для горизонтального слоя все ориентации валов эквивалентны, но наклон слоя разрушает это вырождение. Возникает вопрос о том, какая ориентация валов является для системы наиболее предпочтительной.

Детальное теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости течения в наклонном слое выполнено в работе [93]. Были выделены такие структуры течения, как: продольные валы (оси которых направлены вдоль основного течения) и поперечные валы (оси которых перпендикулярны основному течению). Исследование нелинейных режимов и энергетический анализ устойчивости конвективных течений в наклонном слое представлены в работе [94].

Задача о конвекции в наклонном слое пористой среды (аналог задачи Дарси-Рэлея) имеет важное прикладное значение для геофизики [95] и термоизоляции. В промышленных приложениях можно повысить эффективность теплообменников, наклонив их под некоторым углом к горизонту, что вызовет конвекцию в наклонном слое [96]. Другие важные области – перенос загрязняющих веществ, добыча нефти и пищевая промышленность [97, 98].

В случае наклонного пористого слоя с постоянными разными температурами на границах основное течение также существует при любой разности температур между границами, но профиль скорости и условия устойчивости существенно отличаются от случая свободной жидкости из-за закона Дарси. Решение задачи в такой постановке было получено в работе [99]. Предполагалось, что слой имеет бесконечную длину и ограничен двумя непроницаемыми, идеально теплопроводными твёрдыми границами. В результате неустойчивости возникает вторичное течение в виде продольных валов. Аналогичная проблема экспериментально исследовалась в работе [100]. Найдено, что при углах наклона слоя менее примерно 15° течение является гексагональным. При больших углах наклона слоя в результате неустойчивости возникают валы с осями, ориентированными в направлении основного потока (продольные валы). Предпочтение гексагональной структуры в слое, близком к горизонтальному, объясняется нелинейными эффектами, такими как температурная зависимость вязкости и тепловой диффузии [101, 102] или изменение средней температуры [103].

Нелинейные эффекты в пористых средах могут также приводить к возникновению колебательных режимов конвекции и сложным бифуркационным диаграммам, где стационарные режимы сменяются периодическими. Одним из первых детальных нелинейных исследований устойчивости и надкритических режимов в наклонном слое пористой среды стала работа [104].

В работе [105] в рамках модели Бринкмана исследовалась тепловая конвекция в жидкости, насыщающей наклонный пористый слой со свободными от напряжений границами. Численные и аналитические результаты показали, как

и ожидалось, стабилизирующий эффект Банкмановского слагаемого. Было установлено, что продольные возмущения являются наиболее опасными при любых углах наклона слоя и любых числах Дарси.

В упомянутых выше работах [91-96, 99-100, 102-105] проблема тепловой конвекции в наклонном слое пористой среды, насыщенной жидкостью, исследовалась для случая, когда границы слоя поддерживаются при постоянных различных температурах. Как уже отмечалось, в этом случае состояние равновесия (бесконвективное) невозможно и при любых перепадах температуры существует стационарное течение. При увеличении перепада температуры это течение теряет устойчивость и возникает вторичное течение, которое накладывается на основное.

Другим типом граничных условий является условие строго вертикального градиента температуры, предполагающее линейное изменение температуры вдоль границ слоя.

Линейный анализ устойчивости состояния равновесия наклонного слоя жидкости, находящегося под действием вертикального градиента температуры, был проведен Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицким в [14]. В этой работе рассматривались двумерные возмущения. Показано, что существует критический угол наклона слоя, при котором ячеистая неустойчивость сменяется длинноволновой. Позднее в [106] ими была рассмотрена устойчивость относительно пространственных возмущений. Установлено, что наиболее опасными возмущениями являются продольные валы (в данном случае это валы с осями, направленными вдоль слоя и перпендикулярными оси, относительно которой имеет место наклон слоя), что согласуется с экспериментальными результатами [107], которые свидетельствуют о том, что кризис равновесия в наклонном слое почти во всей области углов наклона слоя связан с развитием продольных возмущений.

Устойчивость равновесия наклонного пористого слоя, насыщенного жидкостью, при вертикальном градиенте температуры рассматривалась в работе [108]. Анализировалась линейная устойчивость равновесия для случая двумерных

возмущений. Показано, что для любой ориентации слоя, за исключением строго вертикальной (нулевой угол наклона), наиболее опасными являются возмущения с ненулевым волновым числом, и только для вертикального слоя неустойчивость имеет длинноволновый характер. При отличных от нуля углах наклона слоя длинноволновая неустойчивость существует, но не является наиболее опасной.

Можно ожидать, что и в случае пористой среды наиболее опасными являются трёхмерные возмущения. Этот вопрос будет рассматриваться в Главе 2, посвящённой изучению трёхмерных режимов конвекции в наклонном пористом слое под действием вертикального градиента температуры. В Разделе 2.2 аналитически и численно исследуется линейная устойчивость состояния равновесия. Раздел 2.3 посвящён численному исследованию трёхмерных нелинейных режимов конвекции с использованием программного пакета Ansys Fluent. В Разделе 2.4 полная трёхмерная задача сводится к двумерной в плоскости xu с аналитическим выражением для z -компоненты скорости, что упрощает задачу и позволяет провести детальное изучение структуры конвективных течений.

2.2. Возникновение и нелинейные режимы конвекции в наклонном пористом слое под действием вертикального градиента температуры

2.2.1. Постановка задачи, определяющие уравнения и граничные условия

Рассмотрим тепловую конвекцию в бесконечно длинном слое пористой среды, насыщенной однокомпонентной жидкостью, наклонённом под углом α к вертикали (Рис. 2.1). Вся система находится в поле силы тяжести. Предполагается, что в слое возможно равновесие, то есть условия подогрева обеспечивают вертикальность и постоянство градиента температуры в жидкости. Границы слоя твёрдые и идеально теплопроводные.

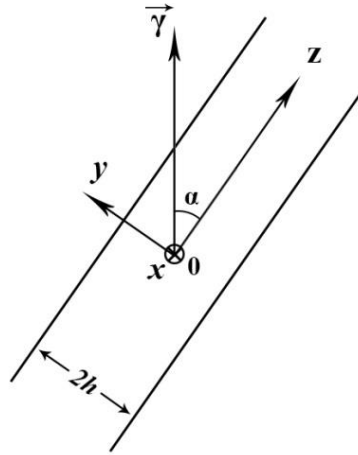


Рис. 2.1. Геометрия задачи

Для описания тепловой конвекции в насыщенном жидкостью пористом слое используется модель Дарси-Буссинеска [18]:

$$-\nabla P - \rho \frac{\nu}{K} \mathbf{V} + \rho g \beta_T T \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (2.1)$$

$$(\rho c)_p \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2.3)$$

где \mathbf{V} – скорость фильтрации; t – время; P – давление; T – температура; ρ – плотность жидкости; ν – кинематическая вязкость жидкости; K – проницаемость пористой матрицы; g – ускорение свободного падения; $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вверх; $\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ – коэффициент теплового расширения; $(\rho c)_p$ – эффективная теплоёмкость пористой среды; $(\rho c)_f$ – теплоёмкость жидкости; $\chi = \frac{\lambda^*}{(\rho c)_f}$ – эффективный коэффициент температуропроводности пористой среды; λ^* – эффективная теплопроводность пористой среды;

Как и в Разделе 1.2.1, уравнения записаны в предположении, что вязкость постоянна, а производная по времени и нелинейные члены в уравнении движения отбрасываются [18].

На границах слоя ставится условие непроницаемости и поддерживается линейное распределение температуры, соответствующее строго вертикальному градиенту:

$$V_n = 0, \quad \nabla T \times \boldsymbol{\gamma} = 0. \quad (2.4)$$

Введем следующие единицы измерения длины, скорости, времени, давления и температуры:

$$y = h \cdot y_{ND}, \quad V = \left(\frac{g\beta AK\chi}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot V_{ND}, \quad t = \frac{h^2(\rho c)_p}{\lambda^*} \cdot t_{ND},$$

$$P = \left(\frac{g\beta Ah^2\chi\nu\rho^2}{K} \right)^{1/2} \cdot P_{ND}, \quad T = Ah \cdot T_{ND}.$$

Система уравнений (2.1)-(2.3) в безразмерной форме приобретает вид:

$$-\nabla P - \mathbf{V} + RT\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + R(\mathbf{V} \cdot \nabla)T = \Delta T, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2.7)$$

где $R^2 = Ra = \frac{g\beta Ah^2K}{\nu\chi}$, Ra – аналог числа Рэлея для пористой среды (далее будем называть его просто «число Рэлея»). Рассматриваемая задача допускает решение, соответствующее состоянию механического равновесия:

$$\mathbf{V}_0 = 0, \quad \nabla T_0 = -\boldsymbol{\gamma}, \quad \nabla P_0 = RT_0\boldsymbol{\gamma}. \quad (2.8)$$

2.2.2. Линейная устойчивость состояния механического равновесия

Линейная устойчивость состояния механического равновесия наклонного насыщенного жидкостью пористого слоя, находящегося под действием вертикального градиента температуры, для случая двумерных возмущений была изучена в работе [108]. Показано, что критическое число Рэлея не зависит от угла наклона слоя. Ячеистые возмущения наиболее опасны при любых ориентациях слоя, кроме вертикальной. По мере стремления угла наклона слоя к вертикали, волновое число критических возмущений стремится к нулю. Показано, что для любой ориентации слоя структура критических возмущения такова, что границы между конвективными валами строго вертикальны, а расстояние между валами в горизонтальном направлении (не в продольном) не зависит от угла наклона слоя и

равно одной или двум толщинам слоя. Конвективные валы разных направлений циркуляции жидкости эквивалентны.

Двумерные нелинейные конвективные режимы, возникающие после потери устойчивости равновесия, исследовались в работе [1]. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами линейного исследования [108]. Подтверждены предсказания о том, что в отличие от случая обычной жидкости, длинноволновые возмущения наиболее опасны только в случае вертикального слоя, тогда как при любом другом угле наклона слоя наиболее опасны ячеистые возмущения. Вблизи порога устойчивости для любой ориентации слоя, кроме вертикальной, границы между конвективными валами строго вертикальны, а расстояние между валами в горизонтальном направлении не зависит от угла наклона слоя и равно толщине слоя или двум толщинам слоя. Однако уже при небольшой надкритичности нарушается эквивалентность валов с разными направлениями циркуляции и границы между валами перестают быть строго вертикальными. Также, при повышении надкритичности монотонный режим сменяется режимом гармонических колебаний. При дальнейшем росте надкритичности колебания становятся релаксационными.

Рассмотрим линейную устойчивость состояния равновесия для случая трёхмерных возмущений. Известно [109], что в случае горизонтального слоя, как для обычной жидкости, так и для насыщенной жидкостью пористой среды, происходит вырождение: при критическом значении числа Рэлея возможны возмущения с различными комбинациями k_x и k_z . Наклон слоя разрушает это вырождение. Для обычной жидкости при любом угле наклона слоя наиболее опасными возмущениями являются валы с осями, параллельными оси z (продольные валы) [106].

Для проведения линейного исследования устойчивости состояния (2.8) представим все поля в виде суммы основного состояния и малого возмущения:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}', \quad T = T_0 + T', \quad P = P_0 + P'. \quad (2.9)$$

Подставим поля в таком виде в уравнения (2.5)-(2.7) и выполним линеаризацию по возмущениям. Выразим поле скорости через его компоненты во всех уравнениях и запишем уравнение движения (2.5) в виде проекций на оси координат. Исключим V_x , V_z и P из полученных уравнений и введём нормальные возмущения (2.10), периодические в направлениях x и z :

$$(V'_y, T') = (\varphi(y), \theta(y)) \cdot e^{i(k_x x + k_z z)}, \quad (2.10)$$

где k_x и k_z – волновые числа в направлениях x и z соответственно.

В результате приходим к системе уравнений для амплитуд возмущений y -компоненты скорости $\varphi(y)$ и температуры $\theta(y)$ в виде:

$$\Delta\varphi + i\zeta k R \theta' \cos(\alpha) - k^2 R \theta \sin(\alpha) = 0, \quad (2.11)$$

$$\Delta\theta - R\varphi \sin(\alpha) + iR \frac{\zeta}{k} \varphi' \cos(\alpha) + R^2 (1 - \zeta^2) \theta \cos^2(\alpha) = 0, \quad (2.12)$$

где $\Delta = \partial_{yy}^2 - k^2$, $k = (k_x^2 + k_z^2)^{1/2}$, $\zeta = k_z/k$ – параметр трёхмерности ($\zeta = 0$ соответствует продольным валам, а $\zeta = 1$ – поперечным). Штрих обозначает производную по y .

Граничные условия для φ и θ :

$$y = \pm 1: \quad \varphi = 0, \quad \theta = 0. \quad (2.13)$$

Рассмотрим сначала линейную устойчивость к возмущениям в виде валов с осями, параллельными оси z (продольные валы, $\zeta = 0$). В этом случае уравнения (2.11)-(2.12) сводятся к системе:

$$\Delta\varphi - k^2 R \theta \sin(\alpha) = 0, \quad (2.14)$$

$$\Delta\theta - R\varphi \sin(\alpha) + R^2 \theta \cos^2(\alpha) = 0. \quad (2.15)$$

Решение уравнений (2.14)-(2.15) имеет следующий вид:

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^4 a_j \exp(iq_j y), \quad \theta(y) = \sum_{j=1}^4 b_j \exp(iq_j y). \quad (2.16)$$

Используя граничные условия, получаем систему из 4 линейных однородных алгебраических уравнений для коэффициентов. Условие равенства

нулю определителя этой системы даёт зависимость критического числа Рэля Ra от волнового числа k и угла наклона слоя α в явном виде:

$$Ra = \frac{(\pi^2 + 4k^2)^2}{4(\pi^2 \cos^2(\alpha) + 4k^2)}. \quad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что при $\alpha > \pi/4$ реализуется неустойчивость к возмущениям с ненулевой длиной волны, а минимум нейтральной кривой соответствует:

$$k_m = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-\cos(2\alpha)}, \quad Ra_m = \pi^2 \sin^2(\alpha). \quad (2.18)$$

При $\alpha < \pi/4$ реализуется длинноволновая неустойчивость, а критическое число Рэля равно:

$$Ra_0 = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\alpha)}. \quad (2.19)$$

Для произвольных значений ζ задача (2.11)-(2.13) решалась численно путём построения фундаментальной системы решений, состоящей из четырёх дифференциальных уравнений первого порядка, для реализации которой применялся метод Рунге–Кутты 5-го порядка. Поиск нуля определителя матрицы фундаментальной системы решений осуществим методом секущих.

На Рис. 2.2 показаны зависимости минимального критического числа Рэля от угла наклона слоя для различных значений параметра трёхмерности ζ . Напомним, что $\zeta = 0$ соответствует возмущениям в виде продольных валов, а $\zeta = 1$ – возмущениям в виде поперечных валов (конвективные валы с осями, направленными вдоль слоя и параллельными оси, относительно которой имеет место наклон слоя). Как видно, абсолютный минимум критического числа Рэля соответствует возмущениям с $\zeta = 0$. Более того, эти возмущения являются наиболее опасными во всём диапазоне углов наклона слоя. Пунктирной линией разделены области, где наиболее опасными являются длинноволновые и ячеистые возмущения. Выше этой кривой реализуются ячеистые возмущения, ниже – длинноволновые.

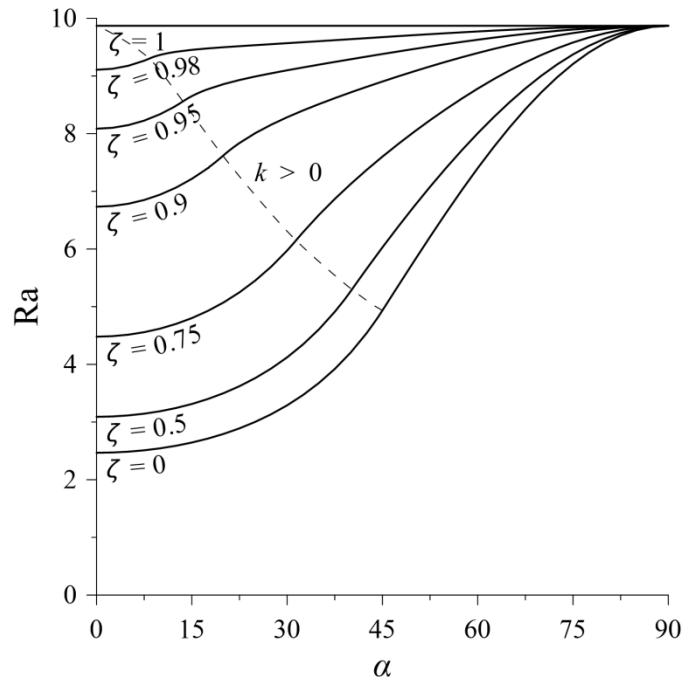


Рис. 2.2. Зависимость минимального критического числа Рэля от угла наклона слоя

На Рис. 2.3 показана зависимость критического волнового числа от угла наклона слоя для различных значений параметра ζ . Напомним, что возмущения с $\zeta = 0$ являются наиболее опасными. Видно, что длинноволновые возмущения наиболее опасны при $\alpha < 45^\circ$, а при $\alpha > 45^\circ$, за неустойчивость ответственны ячейчатые возмущения. Для $\zeta = 1$ (поперечные валы) может реализовываться только ячейчатая неустойчивость. По мере увеличения α (приближения слоя к горизонтальному) разница волновых чисел между валами различной ориентации уменьшается. Для горизонтального слоя все ориентации валов становятся эквивалентными.

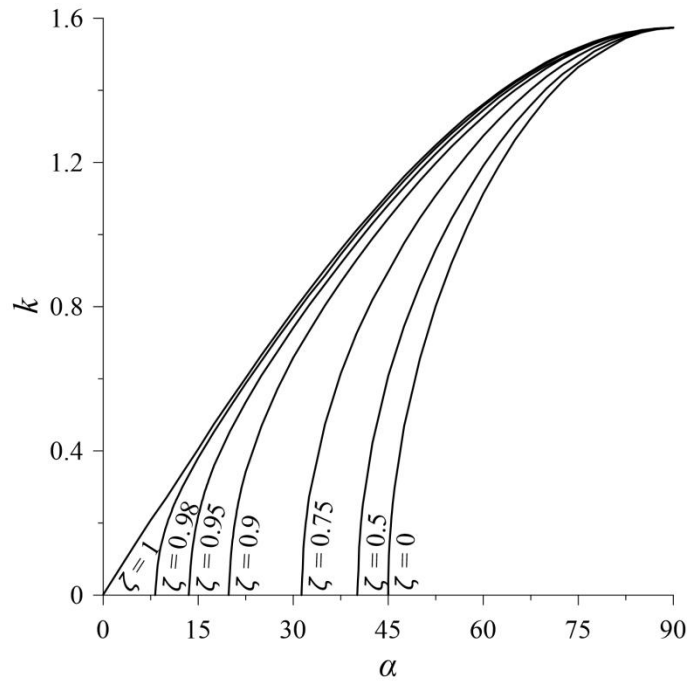


Рис. 2.3. Зависимость критического волнового числа от угла наклона слоя

На Рис. 2.4 показана зависимость критического угла наклона слоя, при котором происходит переход от длинноволновых возмущений к ячеистым, от параметра ζ (эта кривая показана на Рис. 2.2 пунктирной линией, представленной в других координатах). Поперечные валы ($\zeta = 1$) могут быть длинноволновыми только в случае вертикального слоя ($\alpha = 0$). При любом другом угле наклона слоя поперечные возмущения являются ячеистыми.

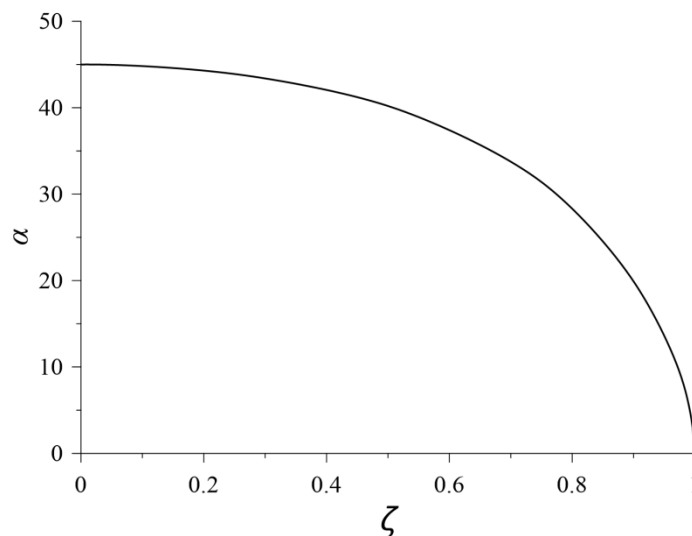


Рис. 2.4. Зависимость критического угла наклона слоя, при котором происходит переход к возмущениям с конечной длиной волны, от параметра ζ

В отличие от свободной жидкости (Рис. 2.5) [106], в пористой среде переход к ячеистым возмущениям происходит при меньших углах наклона слоя α . Также отличаются значения критического числа Рэля и поведение кривых для плоских возмущений ($\zeta = 1$).

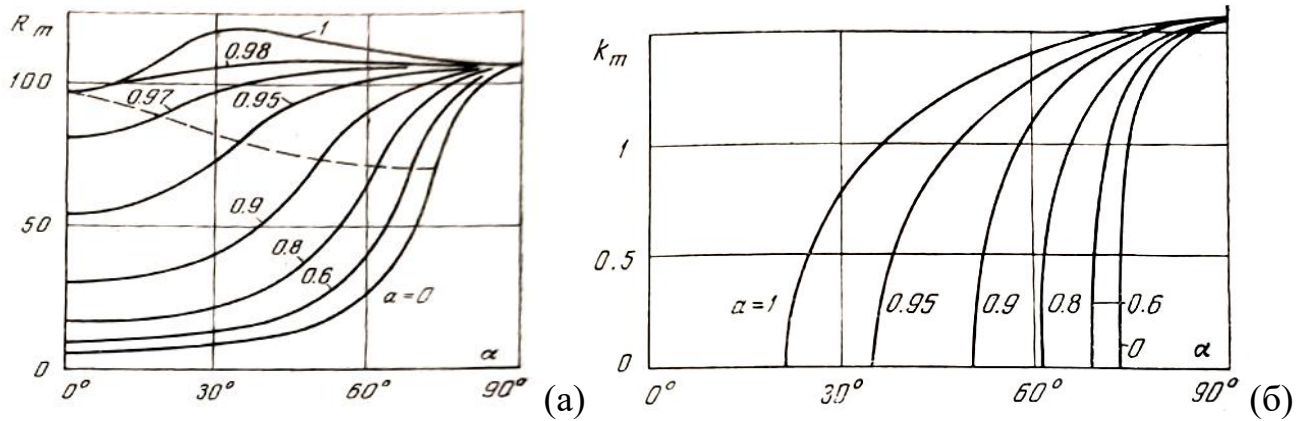


Рис. 2.5. Зависимости критического числа Рэля (а) и волнового числа (б) от угла наклона слоя для свободной жидкости (графики взяты из работы [106])

2.3. Нелинейные режимы конвекции

2.3.1. Параметры задачи и расчётная сетка

Для доказательства того, что в системе действительно реализуются продольные возмущения, были проведены нелинейные трёхмерные расчеты с использованием программного пакета Ansys Fluent, основанного на методе конечных объёмов. Для зависимости плотности от температуры используется приближение Буссинеска. Использовался стационарный подход со схемой связи давления и скорости. Пространственная дискретизация выполняется на основе схемы «PRESTO» (PREssure STaggering Option) для давления. Для уравнений импульса и энергии используется схема второго порядка с учетом направления потока. На каждом временном шаге проверяется критерий сходимости для компонент скорости: абсолютные невязки должны быть меньше 10^{-3} (для уравнения энергии – меньше 10^{-6}).

Расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед и имеет размер $10 \times 100 \times 100$ м (хуз). На всех границах ставится условие

непроницаемости. Распределение температуры на границах (Рис. 2.6), перпендикулярных оси y (верхняя и нижняя границы) и перпендикулярных оси z , соответствует вертикальному градиенту температуры (температура уменьшается вверх). На границах, перпендикулярных оси x , установлено условие отсутствия теплового потока. Рассматривались различные углы наклоны слоя. Вектор силы тяжести направлен вниз и при угле наклона слоя $\alpha = 90^\circ$ (горизонтальный слой) совпадает с осью y .

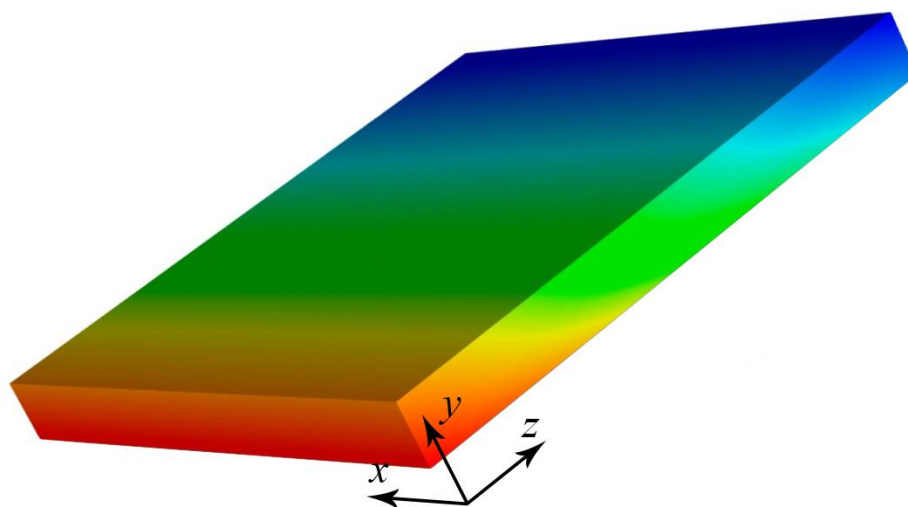


Рис. 2.6. Распределение температуры на границах слоя ($\alpha = 65^\circ$)

Физические параметры жидкости и пористой матрицы соответствуют воде и песчанику. Для расчётов используются следующие параметры:

$\beta_T = 3.02 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ – коэффициент теплового расширения;

$\nu = 7.99 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ – коэффициент кинематической вязкости;

$\chi = 1.44 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ – коэффициент тепловой диффузии жидкости;

$\rho_p = 2.30 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность пористой матрицы;

$c_p = 800 \text{ Дж/К}$ – теплоемкость пористой матрицы;

$\lambda^* = 0.500 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ – теплопроводность пористой матрицы;

$\phi = 0.600$ – пористость пористой матрицы;

$K = 1.00 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ – проницаемость пористой матрицы.

Моделирование конвекции проводилось с использованием начальных условий в виде малых возмущений состояния равновесия во всей расчетной

области. Расчеты выполнялись как для адиабатических боковых стенок, так и с условием вертикального градиента температуры на боковых стенках.

Для определения порога конвекции рассчитывались значения максимальной скорости потока для нескольких значений числа Рэлея, близких к порогу конвекции. Затем полученные значения экстраполировались до нулевого значения скорости потока в предположении корневой зависимости максимума модуля скорости потока от числа Рэлея.

Использовалась прямоугольная сетка с разрешением $25 \times 125 \times 125$ узлов. Было проведено предварительное исследование чувствительности результатов расчётов к шагу сетки. Как видно из Таблицы 2.1, решение практически перестает зависеть от разрешения сетки, когда число узлов вдоль оси y достигает 25 (при дальнейшем измельчении сетки характеристики потока изменяются не более чем на 3%). Порог конвекции имеет еще меньшую чувствительность к сетке – при дальнейшем измельчении сетки он меняется не более чем на 0.25%. Плотность узлов вдоль осей x и z была в два раза ниже плотности узлов вдоль оси y . Итоговое разрешение сетки выбрано исходя из соображений ускорения вычислений при сохранении достаточной точности получаемых данных. Изменений в структуре потока при варьировании шага сетки обнаружено не было.

Таблица 2.1. Исследование чувствительности решения к шагу вычислительной сетки при $\alpha = 65^\circ$

Количество узлов вдоль оси y	y -компонента скорости потока, м/с	Критическое число Рэлея, полученное в трёхмерных нелинейных расчетах
15	$3.03 \cdot 10^{-8}$	7.67
20	$2.86 \cdot 10^{-8}$	7.70
25	$2.78 \cdot 10^{-8}$	7.72
30	$2.73 \cdot 10^{-8}$	7.73
35	$2.69 \cdot 10^{-8}$	7.74

2.3.2. Результаты расчётов

Расчеты показали, что при всех исследованных углах наклона слоя, за исключением $\alpha = 90^\circ$ (горизонтальный слой), независимо от начальных условий устанавливается конвективное движение в виде валов с осями, параллельными оси z . На Рис. 2.7 показаны линии тока для угла наклона слоя $\alpha = 65^\circ$. Валы, оси которых перпендикулярны плоскости yz , в дальнейшем будем называть поперечными ($\zeta = 1$), а валы, оси которых перпендикулярны плоскости xz – продольными ($\zeta = 0$). Как видно, оси полученных в расчётах валов перпендикулярны плоскости xz . Таким образом, результаты трёхмерных нелинейных расчетов подтверждают, что вследствие потери устойчивости в системе действительно реализуется течение в виде продольных валов.

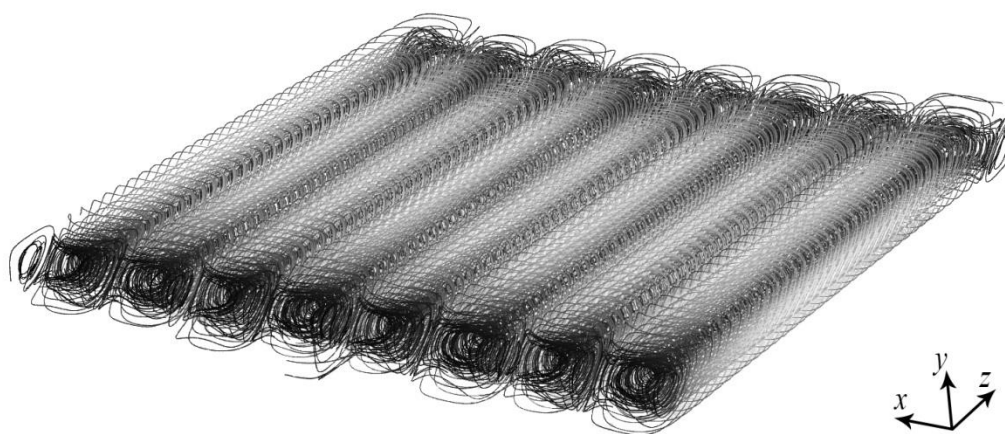


Рис. 2.7. Линии тока для угла наклона слоя $\alpha = 65^\circ$ и $Ra = 7.72$ (диапазон скоростей от $9.29 \cdot 10^{-11}$ до $3.47 \cdot 10^{-8}$ м/с)

В Таблице 2.2 приведены результаты нелинейных расчётов, проведённых на сетке с разрешением $25 \times 125 \times 125$ узлов. Как видно, нелинейные численные расчеты дают значения критического числа Рэлея, близкие к линейным результатам. Под $\delta_{Ra} = \left| \frac{Ra_{\text{fluent}}}{Ra_{\text{лин}}} - 1 \right| \cdot 100\%$ понимается разница (в процентах) между критическим числом Рэлея, предсказанным линейной теорией и полученным в нелинейных расчётах. Реализующееся количество вихрей также согласуется с линейной теорией.

Таблица 2.2. Зависимость критических Ra и k от угла наклона слоя (сравнение линейной теории и нелинейных расчетов в пакете Ansys Fluent)

α	$Ra_{\text{лин}}$	Ra_{Fluent}	$\delta_{Ra}, \%$	$k_{\text{лин}}$	k_{Fluent}
72.5	8.98	8.35	7.0	1.425	1.414
65.0	8.11	7.55	6.9	1.262	1.257
52.5	6.21	5.92	4.7	0.802	0.785

На Рис. 2.8 показана зависимость максимальной скорости потока от числа Рэлея, полученная в нелинейных трёхмерных расчетах. Как видно, примерно до полуторакратной надкритичности зависимость хорошо описывается корневым законом, что говорит о возбуждении конвекции путём прямой бифуркации.

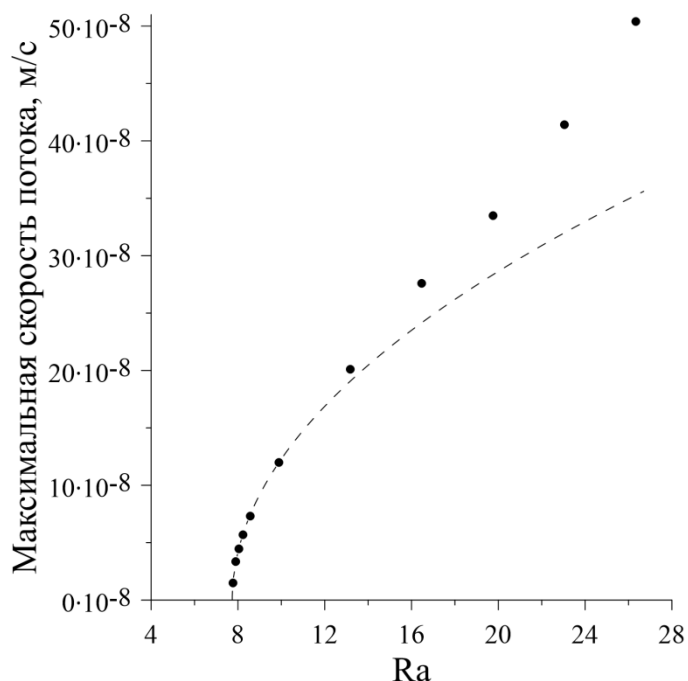


Рис. 2.8. Зависимость максимальной скорости потока от числа Рэлея для $\alpha = 65^\circ$ (точки – полученные данные, пунктирная линия – закон квадратного корня вблизи порога конвекции)

Установлено также наличие ненулевой составляющей скорости течения вдоль оси z (Рис. 2.9). Траектории частиц жидкости представляют собой эллипсы, лежащие в плоскости, параллельной вертикальному вектору γ . Вектор нормали к

плоскости этих эллипсов направлен в сторону оси z , но смещён от неё на определённый угол. С ростом надкритичности этот угол увеличивается.

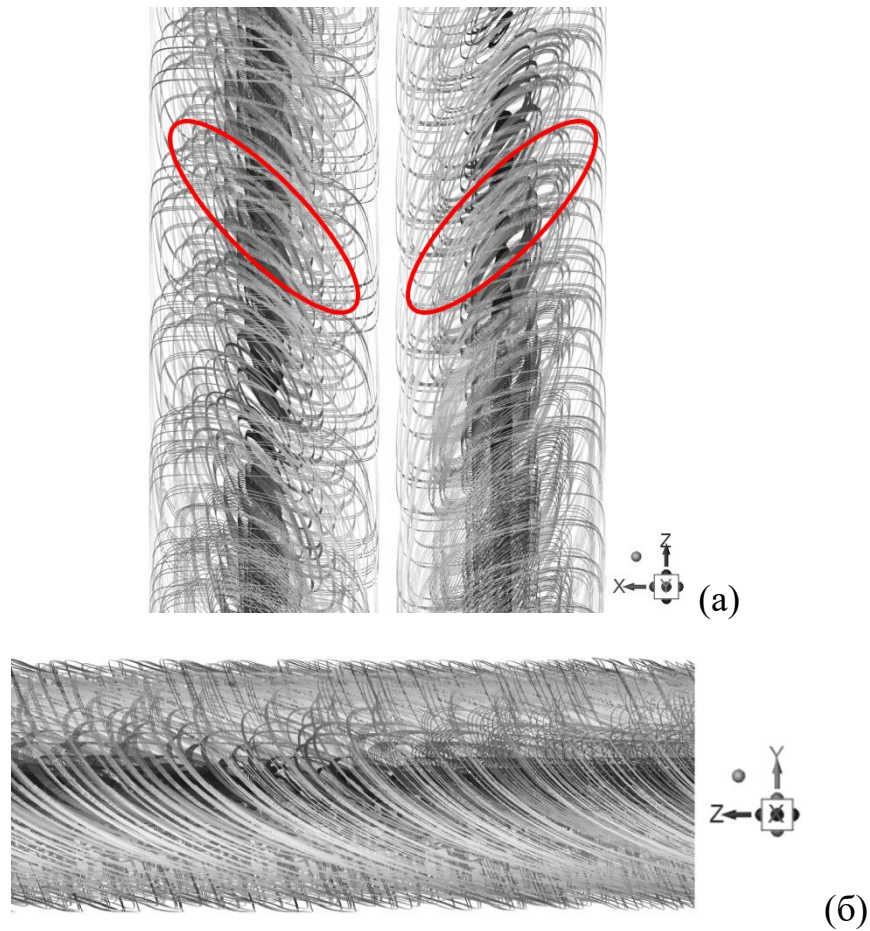


Рис. 2.9. Траектории движения частиц жидкости в плоскости xz (а) и yz (б)

2.4. Нелинейные режимы для продольных мод конвекции

2.4.1. Сведение трёхмерной постановки задачи к двумерной

Постановка задачи, основные уравнения и граничные условия остаются такими же, как в Разделе 2.2.1.

На Рис. 2.10б показана ячейка бесконечно-протяженного (по осям x и z) слоя, в которой схематически изображена структура рассматриваемых конвективных потоков – продольных валов.

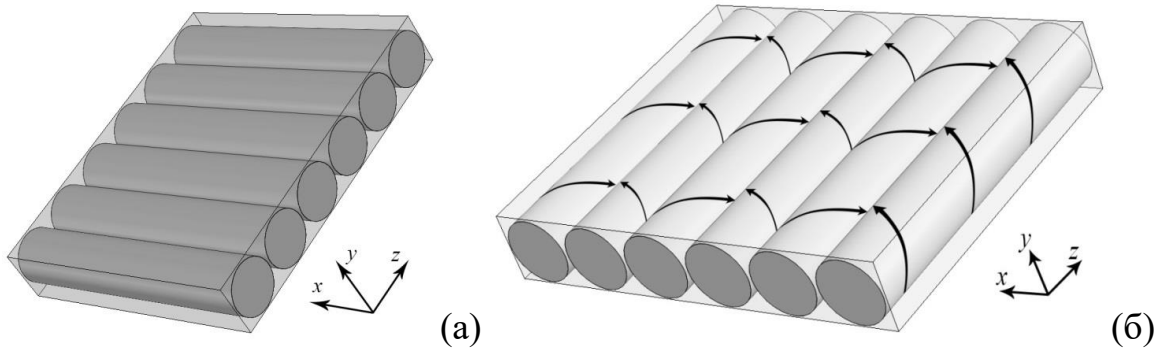


Рис 2.10. Схематическое изображение структуры поперечных (а) и продольных (б) валов в конвективной ячейке

Рассмотрим нелинейные режимы конвекции в области, представляющей собой поперечное сечение I ячейки бесконечно-протяженного слоя (Рис. 2.11).

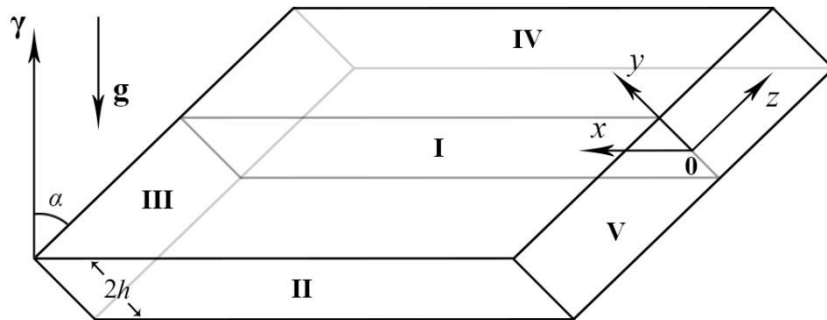


Рис 2.11. Ячейка бесконечно-протяженного слоя (I – исследуемое сечение; II и IV – бесконечно-протяженные границы; III и V – периодические границы; верхняя и нижняя границы (параллельны плоскости xz) – непроницаемые, идеально теплопроводные, распределение температуры на них соответствует вертикальному градиенту)

Перепишем уравнения (2.5)-(2.7), выделив в температуре и давлении части, соответствующие вертикальному градиенту и отклонению от него:

$$T = T_0 + T', \quad P = P_0 + P'.$$

Принимая во внимание уравнения равновесия, получаем:

$$-\nabla P' - \mathbf{V} + RT'\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + R(\mathbf{V} \cdot \nabla)T' - R\mathbf{V}\boldsymbol{\gamma} = \Delta T', \quad (2.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (2.22)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$V_n = 0, \quad T' = 0. \quad (2.23)$$

Применив оператор $\text{rot}_z \text{rot}$ к уравнению (2.20), получаем:

$$\Delta V_z = R \cos(\alpha) \Delta T'. \quad (2.24)$$

Далее, применив оператор rot_z к уравнению (2.20), получаем:

$$\Delta \Psi = -R \sin(\alpha) \frac{\partial T'}{\partial x}, \quad v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2.25)$$

С учетом (2.25) уравнение энергии (2.21) переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + R \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T'}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T'}{\partial y} \right) - R \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \sin(\alpha) + v_z \cos \alpha \right) = \Delta T'. \quad (2.26)$$

Как было показано в Разделе 2.2.2, наиболее опасными в этой задаче при любом угле наклона слоя являются продольные возмущения ($\zeta = k_z/k = 0$). Для этих возмущений V_z можно найти в явном виде. Применим оператор rot_x к уравнению (2.20):

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = R \left(\frac{\partial T'}{\partial y} \cos(\alpha) - \frac{\partial T'}{\partial z} \sin(\alpha) \right). \quad (2.27)$$

При $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ имеем:

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} = R \frac{\partial T'}{\partial y} \cos(\alpha). \quad (2.28)$$

Теперь применим оператор rot_y к уравнению (2.20):

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} = -R \frac{\partial T'}{\partial x} \cos(\alpha). \quad (2.29)$$

При $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ имеем:

$$\frac{\partial V_z}{\partial x} = R \frac{\partial T'}{\partial x} \cos(\alpha). \quad (2.30)$$

Уравнения (2.28) и (2.30) имеют совместное решение:

$$V_z = RT' \cos(\alpha) + f(t). \quad (2.31)$$

Функция $f(t)$ определяется из условия отсутствия полного потока жидкости в направлении оси z :

$$\int_{-1}^1 \langle v_z \rangle_x dy = 0, \quad \langle v_z \rangle_x \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L v_z dx \right), \quad (2.32)$$

$$f(t) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \langle RT' \cos(\alpha) \rangle_x dy, \quad (2.33)$$

$$\langle RT' \cos(\alpha) \rangle_x \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L RT' \cos(\alpha) dx \right),$$

$$V_z = R \cos(\alpha) \left(T' - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \langle T' \rangle_x dy \right). \quad (2.34)$$

Таким образом, граничные условия принимают вид:

$$y = \pm 1: \quad \Psi = 0, \quad T' = 0. \quad (2.35)$$

На боковых границах ставятся условия периодичности.

Использованное преобразование позволяет свести трёхмерную задачу к двумерной и получить аналитическое выражение для z -компоненты скорости. Это значительно упрощает задачу и позволяет провести всестороннее численное исследование поведения системы при различных параметрах.

2.4.2. Результаты расчётов

Задача (2.25), (2.26), (2.34) решалась численно методом конечных разностей с использованием явной схемы второго порядка точности по пространственным переменным. Использовалась равномерная сетка с квадратными ячейками и пространственным шагом $1/30$ (по оси y). В Таблице 2.3 представлены данные исследования чувствительности критического числа Рэлея к шагу вычислительной сетки. Как видно из таблицы, разрешение сетки, использованное в расчетах, позволяет с высокой точностью рассчитать критическое число Рэлея и является достаточным для моделирования структур течений, реализуемых в данной задаче для исследуемых параметров. Основные расчеты проводились для полости с соотношением сторон $6:1$ (xy), количество узлов сетки составляло 180×30 (xy). На вертикальных границах ставилось условия периодичности,

горизонтальные границы считались твердыми ($\Psi = 0$) и идеально теплопроводными.

Таблица 2.3. Исследование чувствительности решения к шагу вычислительной сетки при $\alpha = 40^\circ$

Количество узлов вдоль оси y	Критическое число Рэля, полученное в результате нелинейных расчётов
20	4.3553
25	4.3584
30	4.3601
35	4.3610
40	4.3613

На Рис. 2.12 показана зависимость критического числа Рэля от угла наклона слоя, полученная в результате нелинейных расчётов (Раздел 2.4.2), и сравнение этих результатов с линейной теорией (Раздел 2.2.2). Для определения порога конвекции для каждого значения угла наклона слоя α было найдено значение максимума модуля функции тока $\text{Max}|\Psi|$ при нескольких числах Рэля, близких к порогу конвекции. Затем полученная зависимость была экстраполирована до нулевого значения $\text{Max}|\Psi|$ в предположении, что выполняется закон квадратного корня. Это предполагает, что конвекция в системе возбуждается посредством прямой бифуркации. Забегая вперед можно сказать, что это действительно имеет место для всех углов наклона слоя. Как видно из Рис. 2.12, в результате нелинейных расчётов были получены значения критического числа Рэля, близкие к значениям, полученным из линейной теории устойчивости, для всех углов наклона слоя.

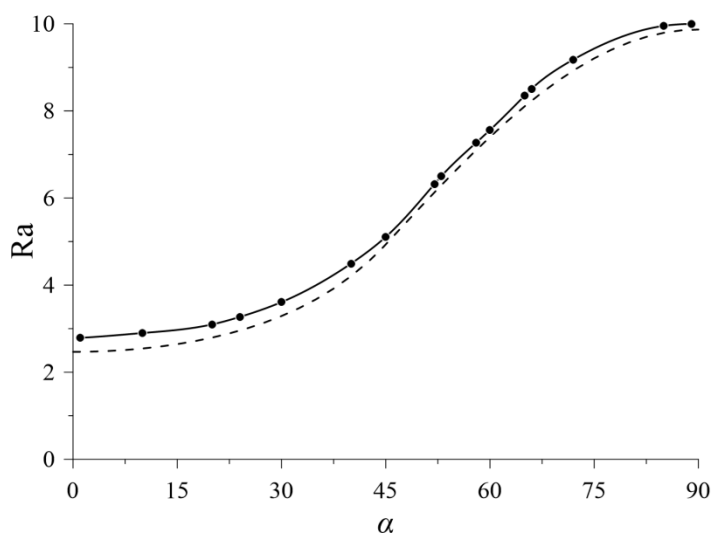


Рис. 2.12. Зависимость критического числа Рэля от угла наклона слоя (пунктирная кривая – линейная теория, сплошная кривая – данные нелинейных расчетов)

На Рис. 2.13 показаны зависимости интегральных характеристик течения $\text{Max}|\Psi|$ и $\text{Max}|V_z|$ от числа Рэля при $\alpha = 40^\circ$. Как видно, вблизи порога устойчивости (до надкритичности около 15 – 20%) эта зависимость хорошо описывается корневым законом, что говорит о возбуждении конвекции путём прямой бифуркации. При других углах наклона слоя наблюдается аналогичная зависимость.

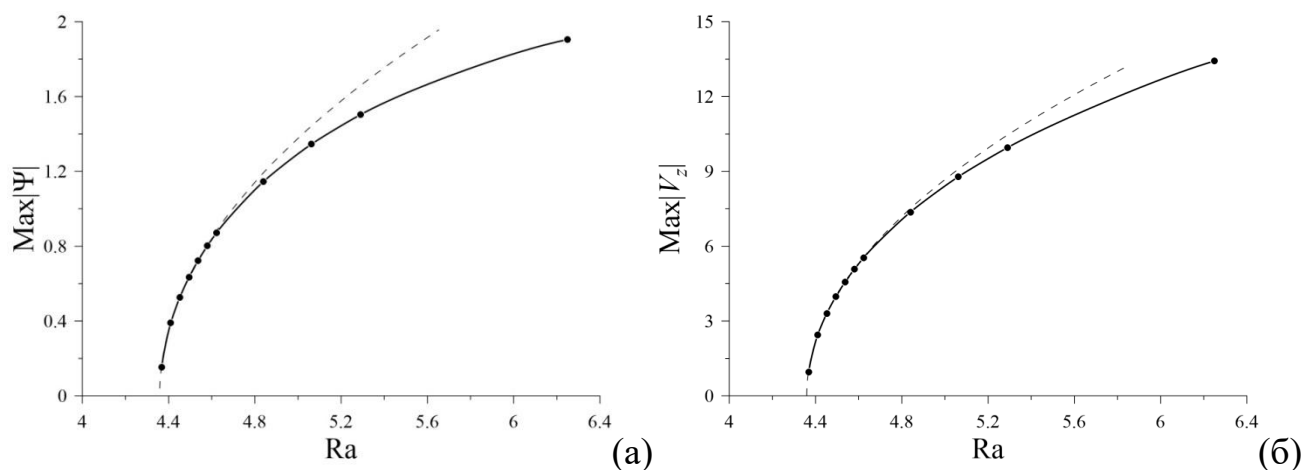


Рис. 2.13. Зависимость $\text{Max}|\Psi|$ (а) и $\text{Max}|V_z|$ (б) от числа Рэля при $\alpha = 40^\circ$ (сплошная кривая – полученные данные, пунктирная кривая – закон квадратного корня вблизи порога конвекции)

На Рис. 2.14 показана зависимость критического волнового числа от угла наклона слоя, полученная при линейном исследовании (сплошная кривая) и её сравнение с результатами нелинейных расчётов. В нелинейных расчетах при использовании периодических условий на боковых границах возможна реализация конвективных мод только с целым числом длин волн, т.е. четным числом вихрей. Как показали расчеты, при углах наклона слоя $\alpha < 53^\circ$ реализуется 2-вихревая структура (максимально возможная длина волны для периодических граничных условий), при $\alpha > 53^\circ$ происходит переход к 4-вихревому режиму, при $\alpha > 66^\circ$ – переход к 6-вихревому режиму. Угол $\alpha = 90^\circ$ соответствует горизонтальному слою. Таким образом, число вихрей, реализуемых в нелинейных расчетах, соответствует линейной теории.

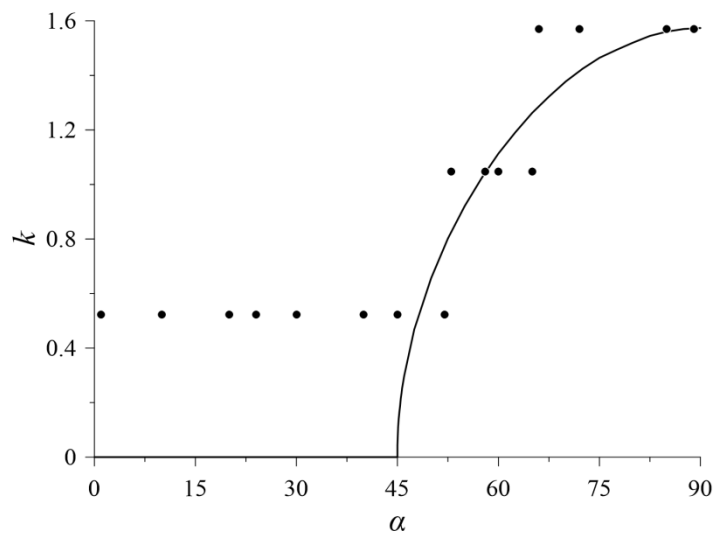


Рис. 2.14. Зависимость критического волнового числа от угла наклона слоя (сплошная кривая – линейная теория для бесконечно-протяженной полости, точки – данные нелинейных расчетов)

Поля компонент температуры T' аналогичны полям компонент скорости V_z , отличаясь главным образом количественными значениями. Полное температурное поле $T = T_0 + T'$ также включает компоненту, соответствующую равновесному вертикальному градиенту температуры T_0 , конкретные значения которого зависят от значения числа Рэлея, угла наклона слоя и параметров системы, содержащихся в числе Рэлея. Далее для визуализации температурных полей будут

использоваться параметры, типичные для горных пород, насыщенных углеводородами.

Как отмечено в Разделе 2.3.2, оси конвективных валов параллельны оси z , причём вдоль оси z существует ненулевая компонента скорости. На Рис. 2.15-2.17 показаны поля функции тока Ψ , компонент скорости V_z и температуры (в проекции на плоскость xu) для различных углов наклона слоя при низких надкритичностях. Как видно, вдоль оси z действительно имеется ненулевая скорость потока жидкости. Структура поля скорости соответствует предсказанной в Разделе 2.3.2. Как видно из Рис. 2.15-2.17, с увеличением α (приближением слоя к горизонтальному) перепад температуры между верхней и нижней границами в рассматриваемом сечении возрастает, а влияние конвективных потоков на распределение температуры ослабевает.

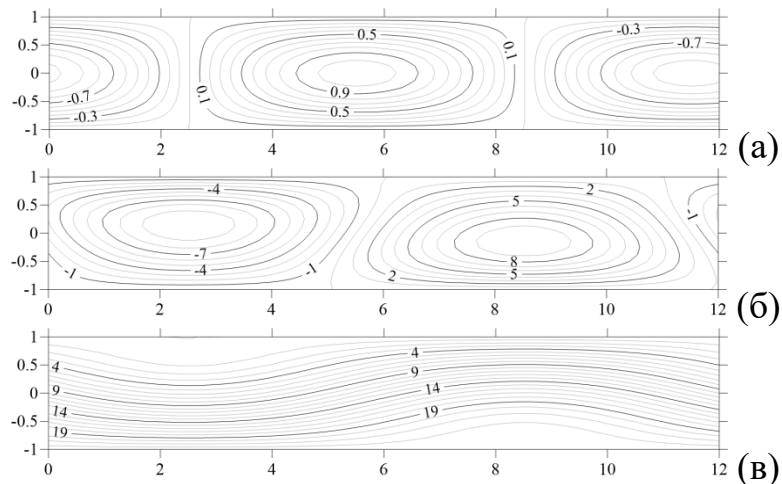


Рис. 2.15. Поля Ψ (а), V_z (б) и T (в) для $\alpha = 30^\circ$, $Ra = 3.80$ (проекция xu)

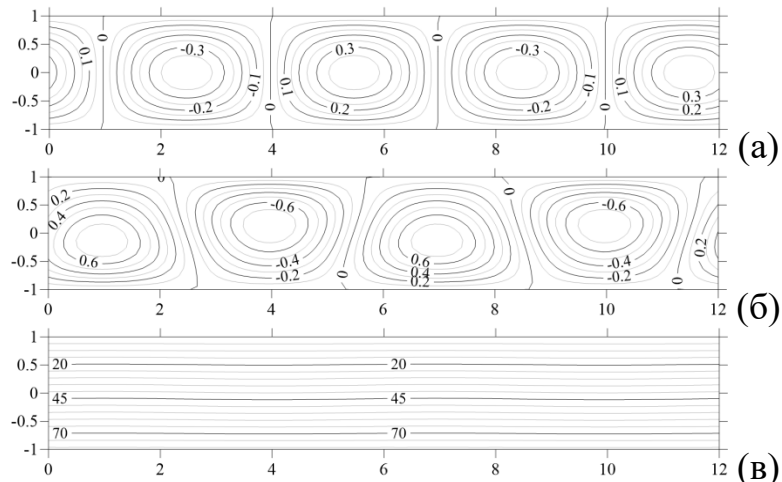


Рис. 2.16. Поля Ψ (а), V_z (б) и T (в) для $\alpha = 60^\circ$, $Ra = 7.84$ (проекция xu)

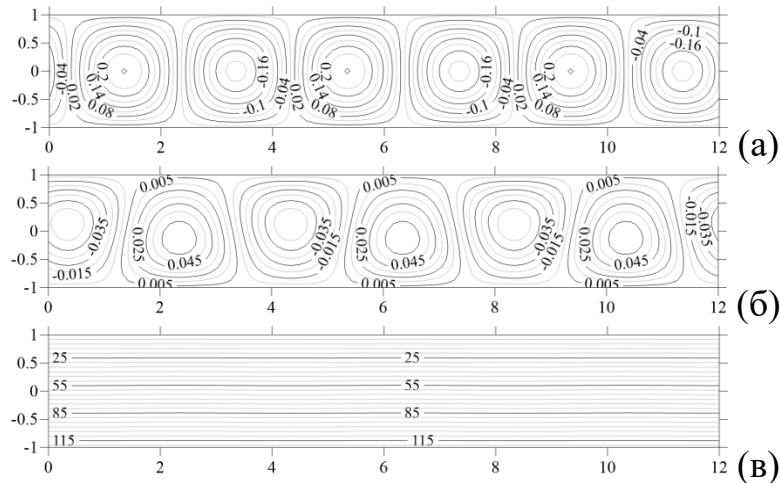


Рис. 2.17. Поля Ψ (а), V_z (б) и T (в) для $\alpha = 85^\circ$, $Ra = 10.24$ (проекция xu)

Расчеты также проводились для полости с соотношением сторон 10:1, а также с использованием твердых непроницаемых теплоизолированных боковых границ. На Рис. 2.18 показаны поля функции тока Ψ и компонент скорости V_z для угла наклона слоя $\alpha = 30^\circ$ в полости с соотношением сторон 10:1 при использовании периодических условий на боковых границах. Как и при соотношении сторон 6:1 реализуется двухвихревой режим, что соответствует максимально возможной длине волны.

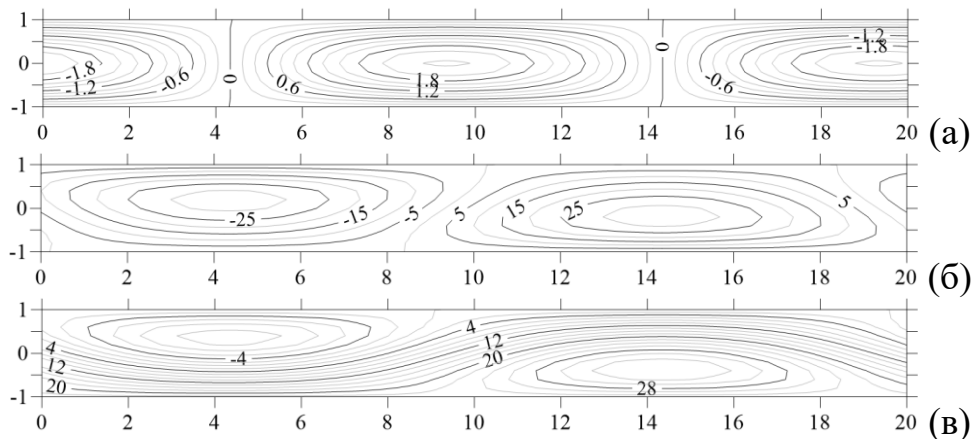


Рис. 2.18. Поля Ψ (а), V_z (б) и T (в) для $\alpha = 30^\circ$, $Ra = 3.80$ (проекция xu , область 10:1, периодические границы)

Для полости с твердыми боковыми границами максимальная длина волны возмущений должна соответствовать одному вихрю на всю полость. Как видно из Рис. 2.19, при таких граничных условиях большая часть полости занята одним вихрем, но вместе с ним на боковых границах возникают небольшие вихри,

направление вращения которых противоположно направлению вращения основного вихря.

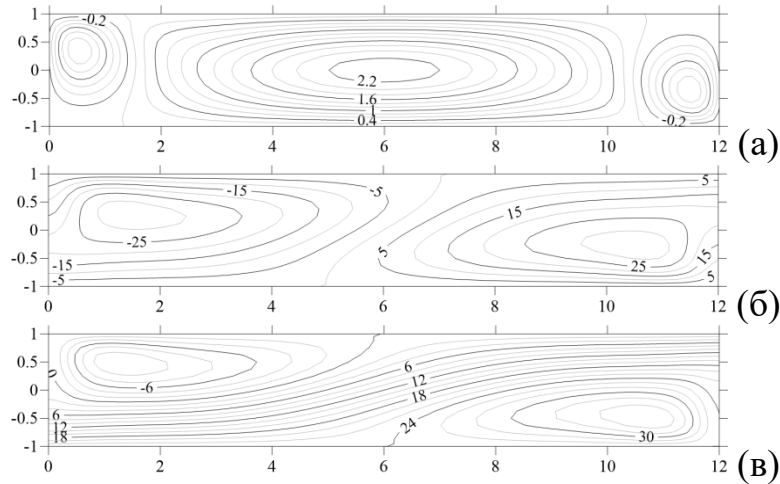


Рис. 2.19. Поля Ψ (а), V_z (б) и T (в) для $\alpha = 30^\circ$, $Ra = 4.00$ (проекция xu , область 6:1, твёрдые границы)

При углах наклона слоя, соответствующих многоячейковой конвекции, на границах слоя боковые вихри не образуются, а реализуемое количество валов соответствует линейной теории. В частности, на Рис. 2.20 показаны поля функции тока Ψ и компонент скорости V_z для угла наклона слоя $\alpha = 60^\circ$ в полости с соотношением сторон 10:1 и твёрдыми боковыми границами.

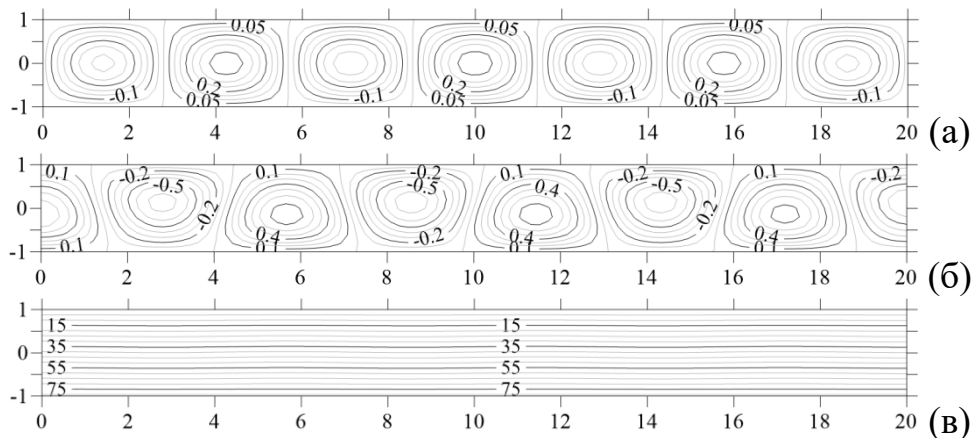


Рис. 2.20. Поля Ψ (а), V_z (б) и T (в) для $\alpha = 60^\circ$, $Ra = 7.84$ (проекция xu , область 10:1, твёрдые границы)

2.5. Заключение по главе

Проведённый ранее в других работах линейный анализ устойчивости равновесия наклонного слоя пористой среды, насыщенной жидкостью, под действием вертикального градиента температуры расширен на трёхмерный случай. Показано, что во всём диапазоне углов наклона слоя наиболее опасны трёхмерные возмущения, имеющие форму продольных валов. Определена зависимость волнового числа критических возмущений от угла наклона слоя.

Существование продольных валов подтверждено трёхмерными нелинейными расчётами в программном пакете Ansys Fluent. Численные данные по критическому числу Рэлея и критическому волновому числу согласуются с результатами линейного анализа устойчивости.

Также, трёхмерные численные расчёты показали наличие ненулевой составляющей скорости течения жидкости вдоль оси z (оси продольных валов). При этом траектории движения жидких частиц внутри каждого конвективного вихря представляют собой эллипсы, лежащие в плоскости, нормаль к которой перпендикулярна вектору гравитации и наклонена под некоторым углом к оси z . По мере увеличения надкритичности этот угол увеличивается.

С помощью численного решения двумерной задачи для продольных конвективных структур в плоскости xu детально изучена структура конвективных течений. Подтверждено существование ненулевой скорости потока жидкости вдоль оси z и исследована структура этого поля скорости. Найдено, что при всех углах наклона слоя имеет место прямая бифуркация. Значения критического числа Рэлея и критического волнового числа, полученные в нелинейных расчетах для различных углов наклона слоя, с хорошей точностью согласуются с линейной теорией.

Глава 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ КОНВЕКЦИИ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ СИСТЕМАХ, ИМИТИРУЮЩИХ ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ СКЛАДКИ

3.1. Введение

Задачи конвекции многокомпонентных жидкостей в пористых средах особенно актуальны, если речь идёт об описании движения нефти в недрах земли. Нефть является чрезвычайно многокомпонентной смесью. В подземных залежах она находится в условиях постоянного геотермального градиента в породах, являющихся пористой средой. На данный момент теорий для описания смесей с таким большим количеством компонент не существует. Наличие такой теории позволило бы предсказывать, в частности, распределение отдельных фракций нефти в нефтеносных слоях. Геометрия таких слоёв бывает довольно сложной, и её учёт может дать нетривиальное пространственное распределение компонентов нефти. Даже в месторождениях «тяжёлой» нефти присутствуют лёгкие фракции (представляющие наибольшую ценность), которые могут концентрироваться в определённых областях нефтеносных слоёв под действием диффузионных, термодиффузионных и конвективных процессов, вызванных наличием геотермального градиента. За время формирования нефтеносных пластов эти процессы могут внести существенный вклад в распределение отдельных фракций нефти по нефтеносному пласту. Знание расположения областей с наиболее ценными фракциями позволит вначале добывать именно их, оптимизируя процессы добычи.

Реальные геологические структуры представляют собой слоистые образования горных пород, отличающихся пористостью и проницаемостью. Если слои подвергаются пластической деформации, они сминаются в складки. Складка называется антиклинальной (Рис. 3.1), если изгиб слоёв обращен выпуклостью вверх (в ядре залегают более древние породы, на крыльях – более молодые) и синклиальной – выпуклой вниз (тогда ядро состоит из более молодых пород, а крылья – из более древних) [110-112].

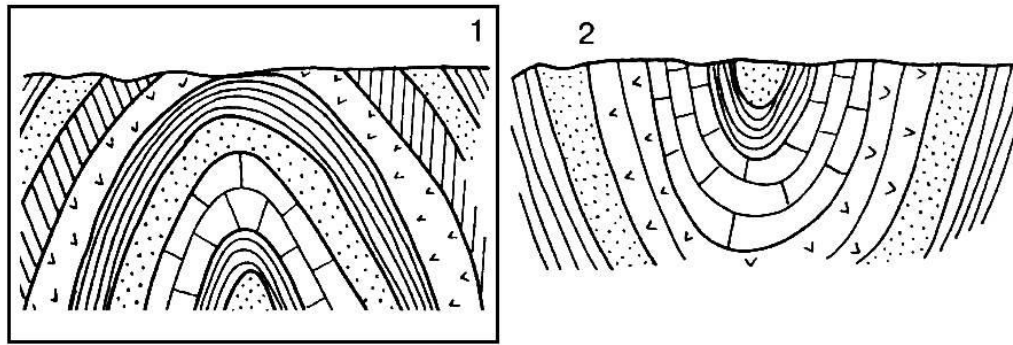


Рис. 3.1. Антиклинальная (1) и синклиная (2) складки (рисунок взят из монографии [112])

Такие насыщенные жидкостями слоистые системы становятся естественными подземными резервуарами для природных конвективных процессов [110, 111, 113-116]. Одним из способов моделирования конвекции в неоднородных пористых средах является рассмотрение системы слоёв, имеющих разные значения пористости и проницаемости, причем в каждом отдельном слое эти свойства считаются однородными [67, 117–121].

Неоднородность свойств пористой среды при моделировании фильтрационных процессов можно описать известной формулой Козени-Кармана [89, 122], которая связывает проницаемость с пористостью и размером частиц среды. Эта модель достаточно точно описывает течение жидких суспензий через чистый пористый слой, однако, как показано в [123], её нельзя использовать при засорении слоёв, так как в модели, основанной на равномерном покрытии пор, увеличение перепада давления слишком мало. В [124] было показано, что уравнения Козени-Кармана достаточно хорошо предсказывают гидравлическую проводимость большинства грунтов. В [125] с использованием линейной аппроксимации этой формулы исследована динамика закупорки микроканалов с учетом прилипания частиц к стенкам каналов и их отрыва, а в [126] проведено моделирование очистки пористой среды пульсирующим вертикальным потоком. Определены критические значения волнового числа и числа Рэлея для задачи Хортон–Роджерса–Лэпвуда с сильной неоднородностью и анизотропией в

случае, когда неоднородность обеспечивается наличием двух слоёв, а каждый слой однороден и изотропен в горизонтальной плоскости [127].

Решение подобных задач требует знания топографических и геологических данных и часто проводится в пренебрежении тепловой конвекцией или в предположении однокомпонентности жидкости [118, 120, 128, 129]. Однако жидкости и газы, насыщающие пористые среды, имеют, как правило, сложный состав. Это приводит к необходимости учёта эффектов диффузии, термодиффузии, бародиффузии и др. [130–132].

В Главе 2 настоящей диссертации исследовано возникновение и развитие тепловой конвекции в наклонном пористом слое, насыщенном жидкостью, в поле силы тяжести при строго вертикальном градиенте температуры, когда состояние механического равновесия возможно. Установлено, что при любом угле наклона слоя продольные валы являются наиболее опасным типом возмущений. Показано, что двумерные возмущения также возможны, но они не самые опасные.

Настоящая глава посвящена численному исследованию трёхмерных нелинейных режимов конвекции бинарных смесей в трёхслойных системах, имитирующих геологические складки. Для исследования используется программный пакет Ansys Fluent. В Разделе 3.4 исследуется геометрия антиклинальной складки при низкопроницаемых внешних слоях; значение проницаемости внутреннего слоя варьируется. Раздел 3.5 посвящён исследованию течений при близких проницаемостях внешних слоёв и внутреннего слоя в случае синклиналиной складки.

3.2. Постановка и геометрия задачи, определяющие уравнения и граничные условия

Рассмотрим индуцированную эффектом Соре конвекцию бинарной смеси (додекан 50% и тетралин 50%), заполняющую полость, представляющую собой систему из трёх слоёв одинаковой толщины $h_i = 25$ м, имеющую излом в центральной части и имитирующей антиклинальную или синклиналиную (Рис.

3.2) геологическую складку. Длина расчётной области $L = 200$ м, ширина $B = 100$ м. Такие размеры характерны для пластов, содержащих углеводороды. При указанных геометрических размерах угол складки (угол между наклонными плоскостями) равен примерно 152° . Ось y направлена вертикально, ось z направлена параллельно торцевой плоскости складки.

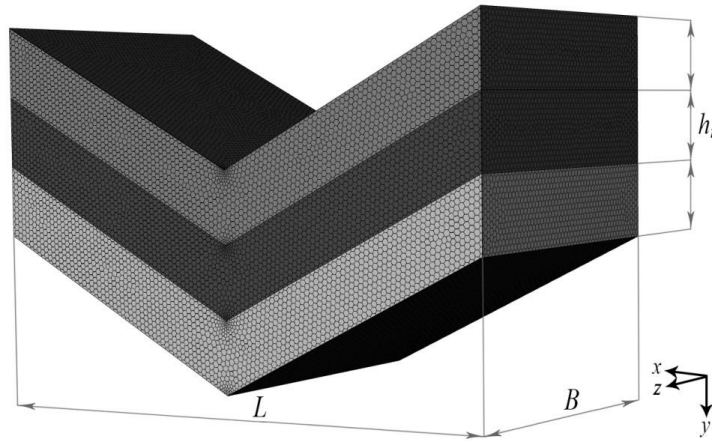


Рис. 3.2. Модель синклинальной складки

Предполагается, что вязкость и коэффициенты переноса постоянны. Влияние барродиффузии и диффузионной теплопроводности не учитывается. За примесь принимается более лёгкий компонент – додекан, а за растворитель – более тяжёлый тетралин. Считается, что плотность смеси ρ линейно зависит от температуры T и концентрации примеси C :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)). \quad (3.1)$$

Уравнения, описывающие конвективное движение бинарной смеси в пористой среде в поле тяжести с учётом эффекта термодиффузии имеют следующий вид:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P_i - \frac{v}{K_i} \mathbf{V}_i - g(\beta_T(T_i - T_0) + \beta_C(C_i - C_0)) \mathbf{y}, \quad (3.2)$$

$$(\rho c)_p \frac{\partial T_i}{\partial t} + (\rho c)_f (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) T_i = \chi \Delta T_i, \quad (3.3)$$

$$\phi \frac{\partial C_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) C_i = D^* \Delta C_i + C_0(1 - C_0) D_T^* \Delta T_i, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_i = 0, \quad (3.5)$$

где V – скорость фильтрации; t – время; P – давление; T – температура; C – концентрация примеси; ρ – плотность жидкости; ν – кинематическая вязкость жидкости; K_i – проницаемость i -го слоя; g – ускорение свободного падения; \mathbf{y} – единичный вектор, направленный вверх; $\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_C$ – коэффициент теплового расширения; $\beta_C = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial C} \Big|_T$ – коэффициент концентрационного расширения; ρ_0 , C_0 и T_0 – средние значения плотности, концентрации примеси и температуры; $(\rho c)_p$ – эффективная теплоёмкость пористой среды; $(\rho c)_f$ – теплоёмкость жидкой смеси; $\chi = \frac{\lambda^*}{(\rho c)_f}$ – эффективный коэффициент температуропроводности пористой среды; λ^* – эффективная теплопроводность пористой среды; ϕ – пористость; $D^* = D/\tau^2$ – коэффициент молекулярной диффузии смеси в пористой среде; $D_T^* = D_T/\tau^2$ – коэффициент термодиффузии смеси в пористой среде; τ – коэффициент извилистости пористой среды [133, 134]. Индекс $i = 1, 2, 3$ показывает соответствие слою (сверху вниз).

Рассматривается нагрев снизу с градиентом температуры $A = 3 \cdot 10^{-2}$ К/м (что отвечает среднему геотермальному градиенту [135]). Используемое в расчётах значение $T_0 = 353.5$ К является средней температурой на глубине залегания нефти $2 \cdot 10^3$ м при среднем геотермальном градиенте.

На границах Γ расчётной области ставятся условия:

- На всех внешних границах имеет место непротекание и отсутствие диффузионного потока вещества.
- На верхней и нижней границах (индексы T и B) температура соответствует строго вертикальному градиенту.
- На вертикальных границах отсутствует поток тепла.
- На границах между слоями (индексы 1 и 2) давление, температура и концентрация, а также нормальные компоненты теплового и диффузионного потоков вещества и нормальные проекции вектора скорости непрерывны.

Данные граничные условия имеют следующий вид:

$$x = 0, L: \quad \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial T_i}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0, \quad (3.6)$$

$$z = 0, B: \quad \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial T_i}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial n} = 0, \quad (3.7)$$

$$y = y_{\Gamma_T}: \quad \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad T_1 = T_0 + Ay, \quad \frac{\partial(C_1 - \Theta T_1)}{\partial n} = 0, \quad (3.8)$$

$$y = y_{\Gamma_B}: \quad \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad T_3 = T_0 + Ay, \quad \frac{\partial(C_3 - \Theta T_3)}{\partial n} = 0, \quad (3.9)$$

$$y = y_{\Gamma_1}: \quad P_1 = P_2, \quad \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}, \quad \frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{\partial T_2}{\partial n}, \quad (3.10)$$

$$T_1 = T_2, \quad \frac{\partial(C_1 - \Theta T_1)}{\partial n} = \frac{\partial(C_2 - \Theta T_2)}{\partial n}, \quad C_1 = C_2,$$

$$y = y_{\Gamma_2}: \quad P_2 = P_3, \quad \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{n}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial n} = \frac{\partial T_3}{\partial n}, \quad (3.11)$$

$$T_2 = T_3, \quad \frac{\partial(C_2 - \Theta T_2)}{\partial n} = \frac{\partial(C_3 - \Theta T_3)}{\partial n}, \quad C_2 = C_3,$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали; $\Theta = \psi(\beta_T/\beta_C)$; $\psi = -C_0(1 - C_0)\beta_C D_T/(\beta_T D)$ – отношение разделения.

Считается, что в начальный момент времени жидкость неподвижна, концентрация примеси в полости однородна, температура линейно зависит от вертикальной координаты.

3.3. Параметры задачи и численная реализация

Физические свойства смеси додекана (50%) и тетралина (50%) представлены в Таблице 3.1. Данные вещества являются типичными представителями углеводородов, содержащихся в нефти. Компоненты рассматриваемой смеси (додекан и тетралин) входили в смесь, рассматриваемую в первой главе. Важно отметить, что исследования тепло- и массопереноса в пористых средах [133, 134] выявили необходимость корректировки результирующих коэффициентов диффузии и термодиффузии. Далее при моделировании использовались значения $D^* = 2.81 \cdot 10^{-10}$ м²/с, $D_T^* = 2.6 \cdot 10^{-12}$ м²/(сК). Этим значениям соответствуют следующие величины безразмерных параметров: отношение разделения $\psi = 0.694$, число Льюиса $Le = \chi/D = 345$.

Таблица 3.1. Физические и тепловые параметры смеси додекана (50%) и тетралина (50%)

$\rho_0, \text{кг/м}^2$	$\nu, \text{м}^2/\text{с}$	$\chi, \text{м}^2/\text{с}$	$\beta_T, 1/\text{К}$	β_c	$D, \text{м}^2/\text{с}$	$D_T, \text{м}^2/(\text{сК})$
840.70	$1.81 \cdot 10^{-6}$	$9.70 \cdot 10^{-8}$	$8.95 \cdot 10^{-4}$	0.270	$6.46 \cdot 10^{-10}$	$5.94 \cdot 10^{-12}$

Значение пористости для всех слоёв принималось равным $\phi = 0.1$. Проницаемости верхнего (K_1) и нижнего (K_3) слоёв считались одинаковыми (в дальнейшем будем обозначать их K_{ex}) и всегда меньшими, чем проницаемость внутреннего слоя (K_2 , в дальнейшем будем обозначать её K_{in}). Расчёты проводились для значений проницаемостей слоёв, находящихся в диапазоне от $K = 10^{-14} \text{ м}^2$ до $K = 2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$. Такие свойства среды характерны, например, для мелкозернистого песка, глинистых песков, алевролитов, микротрещиноватых известняков, песчаника, сланцев [136–139].

Вычисления осуществлялись в программном пакете ANSYS Fluent, реализующем метод конечных объёмов. Применялась пространственная сетка с полигексаэдральным типом ячейки (poly-hexahedron), имеющей размер ребра от 0.5 до 2.0 м. Тестирование других вычислительных сеток с большим диапазоном размеров ячеек показало наилучший результат для этой сетки (Таблица 3.2). Пространственная дискретизация выполнялась на основе схемы MUSCL (Monotone Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws) второго порядка. На каждом временном шаге использовался критерий сходимости для компонент скорости: абсолютные невязки должны быть меньше 10^{-3} (для уравнения энергии – меньше 10^{-6}). Моделирование проведено до времён порядка $10^4 - 10^5$ лет с шагом по времени, равном 10^7 с (0.317 года).

Таблица 3.2. Зависимость максимального значения V_y для установившегося потока при $K_{in} = 10^{-12} \text{ м}^2$, $K_{ex} = 10^{-14} \text{ м}^2$ от диапазона шага сетки

Размер ячейки сетки, м	0.5 – 16	0.5 – 8	0.5 – 4	0.5 – 2	$\rightarrow 0$
$V_y \cdot 10^{-11}, \text{м/с}$	2.99	3.17	3.25	3.32	3.37

3.4. Антиклинальная складка. Эволюция структур течения.

Вначале рассмотрим систему, представляющую собой антиклинальную складку со слабопроницаемыми внешними слоями, когда течение жидкости происходит преимущественно во внутреннем слое. Примем проницаемость внешних слоёв равной $K_{ex} = 10^{-14} \text{ м}^2$, что характерно для низкопроницаемых геологических пористых сред. Проницаемость внутреннего слоя будет варьироваться от $K_{in} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$ и выше.

На Рис. 3.3 показаны плоскости (А, В, С и D), в которых ниже представлены результаты моделирования. Вертикальные плоскости А и С делят расчетную область пополам в перпендикулярных сечениях. Плоскость А описывается уравнением $z = 50 \text{ м}$, плоскость С – уравнением $x = 100 \text{ м}$ и является осевой плоскостью складки. Плоскость В проходит на равном расстоянии от верхней и нижней границ расчетной области (на Рис. 3.3 показана только левая часть плоскости). Плоскость D делит крыло складки в центре в вертикальном сечении ($x = 50 \text{ м}$).

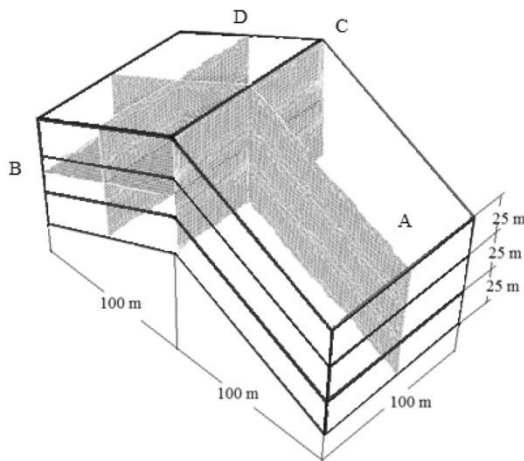


Рис. 3.3. Плоскости, в которых приводятся результаты трёхмерных расчетов для антиклинальной складки

На Рис. 3.4 представлена временная эволюция максимального значения вертикальной компоненты скорости в области для различных значений проницаемости среднего слоя. Как видно, зависимость $V_y(t)$ значительно отличается для случаев низких и высоких значений проницаемости. При низких значениях K_{in} ($K_{in} \leq 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$) интенсивность течения невысокая и зависимость $V_y(t)$ не испытывает скачков (Рис. 3.4а). С ростом проницаемости среднего слоя ($K_{in} > 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$) течение развивается быстрее, его

интенсивность существенно возрастает, а кривые $V_y(t)$ становятся немонотонными (Рис. 3.4б). Интенсивность течения с ростом проницаемости среднего слоя изменяется по закону $V_y(t) \sim K_{in}^{1.05}$.

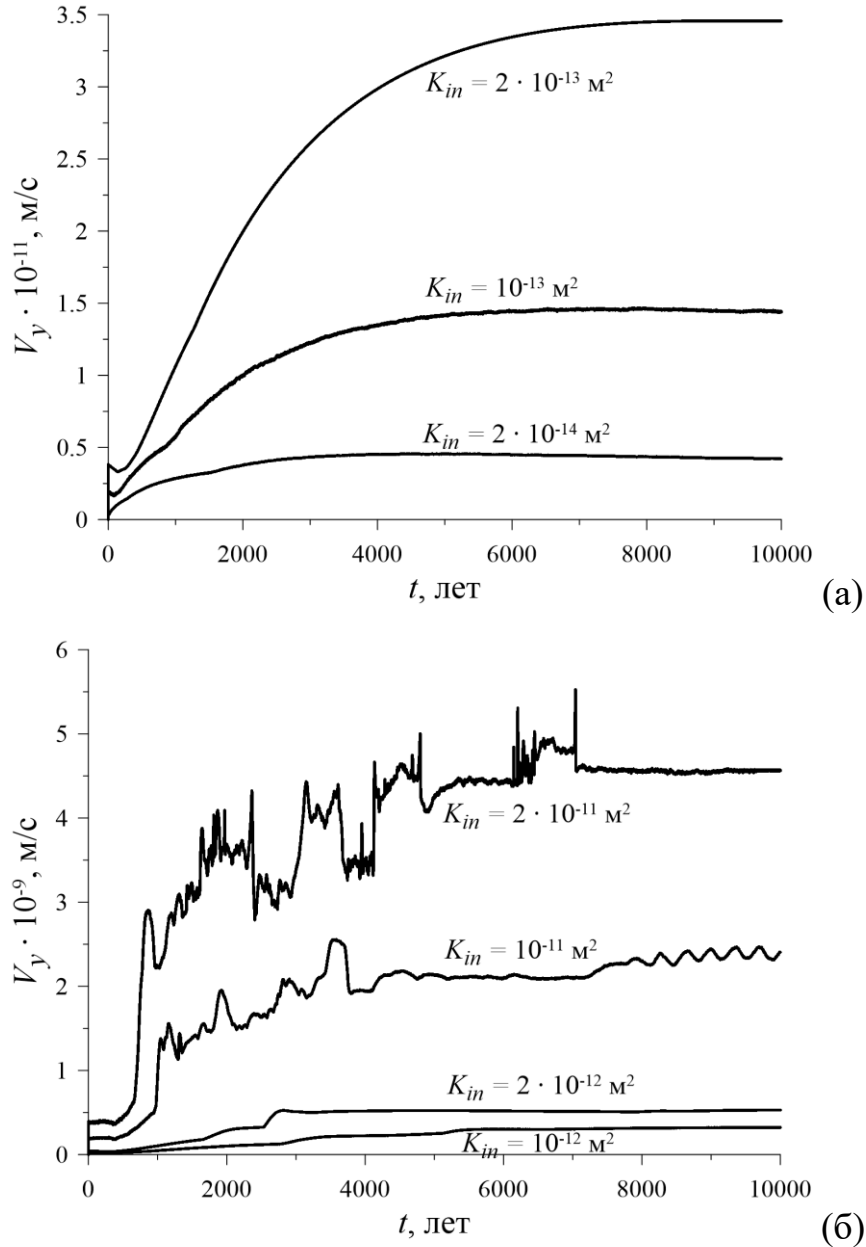


Рис. 3.4. Временная эволюция максимального значения вертикальной компоненты скорости V_y в области при $K_{ex} = 10^{-14} \text{ м}^2$ и проницаемости среднего слоя $K_{in} \leq 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$ (а) и $K_{in} \geq 10^{-12} \text{ м}^2$ (б)

Моделирование показывает, что при проницаемости среднего слоя $K_{in} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$ и ниже, в полости реализуется симметричное двухвихревое течение, соответствующее по структуре длинноволновой моде. Вихри располагаются

внутри крыльев складки с осью симметрии, совпадающей с осью складки (Рис. 3.5). По мере уменьшения K_{in} поток захватывает все три слоя. При $K_{in} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$ течение локализовано в среднем слое и практически не проникает в менее проницаемые внешние слои (Рис. 3.5). Наибольшее изменение интенсивности потока наблюдается в середине крыльев складки (Рис. 3.6б). Течение заметно искривляет изолинии концентрации примеси в плоскости А (Рис. 3.7а). В плоскости С примесь распределена линейно по высоте (Рис. 3.7б).

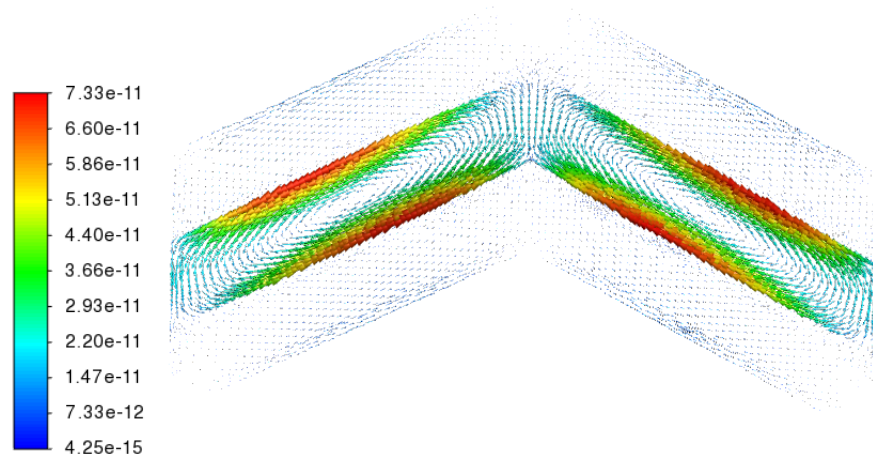


Рис. 3.5. Векторное поле скорости V [м/с] в плоскости А при ($K_{in} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$)

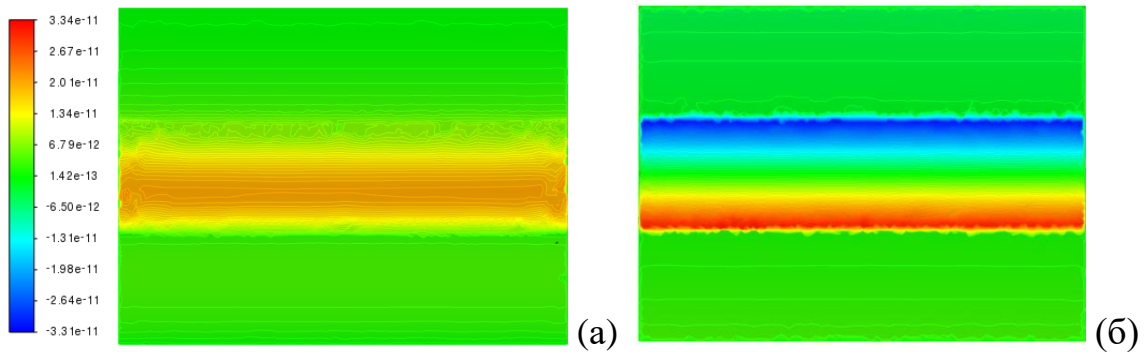


Рис. 3.6. Поля компоненты скорости V_y [м/с] в плоскостях С (а) и D (б) ($K_{in} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$)

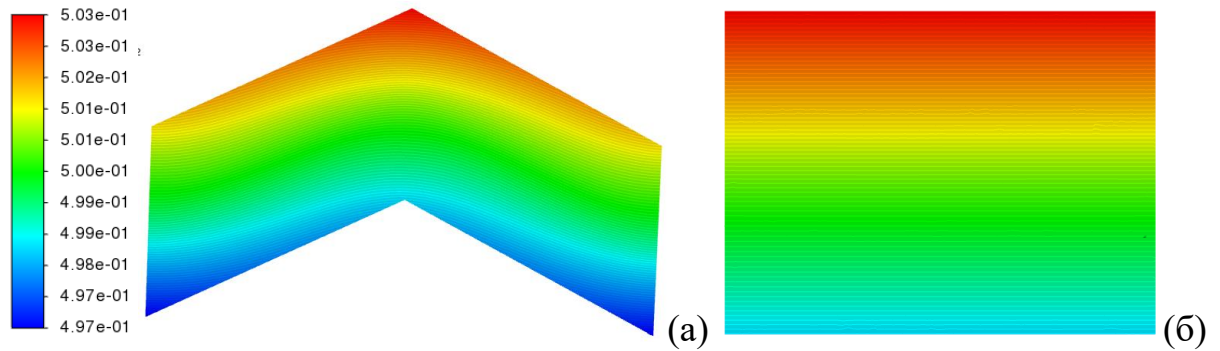


Рис. 3.7. Поля концентрации примеси в плоскостях А (а) и С (б) ($K_{in} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$)

Когда проницаемость среднего слоя достигает значения $K_{in} = 10^{-12} \text{ м}^2$ и выше, течение приобретает структуру продольных валов. На Рис. 3.8 показаны изолинии вертикальной компоненты скорости, демонстрирующие эту структуру для данного значения K_{in} в различных сечениях расчетной области. Как видно из рисунка, в среднем слое возникают продольные валы. В сечении В видны валы вдоль слоя с утолщениями на изгибе складки (Рис. 3.8б), а в сечении D наблюдаются ячейки поперек валов (Рис. 3.8в). Максимальное значение вертикальной компоненты скорости в этом случае достигает $V_y = 3.26 \cdot 10^{-10} \text{ м/с}$, что на порядок выше, чем при меньших проницаемостях.

На Рис. 3.9 показано распределение концентрации примеси при реализации режима продольных валов. По сравнению со случаем меньшей проницаемости среднего слоя наблюдается более значительная деформация изолиний концентрации. Причём, за счёт влияния продольных валов, изолинии концентрации примеси теперь деформируются не только в плоскости А, но и в плоскости С (Рис. 3.9в). В осевой плоскости складки и в других плоскостях, параллельных ей, изолинии концентрации примеси деформируются течением, поэтому в области среднего слоя их деформация значительнее, чем во внешних слоях.

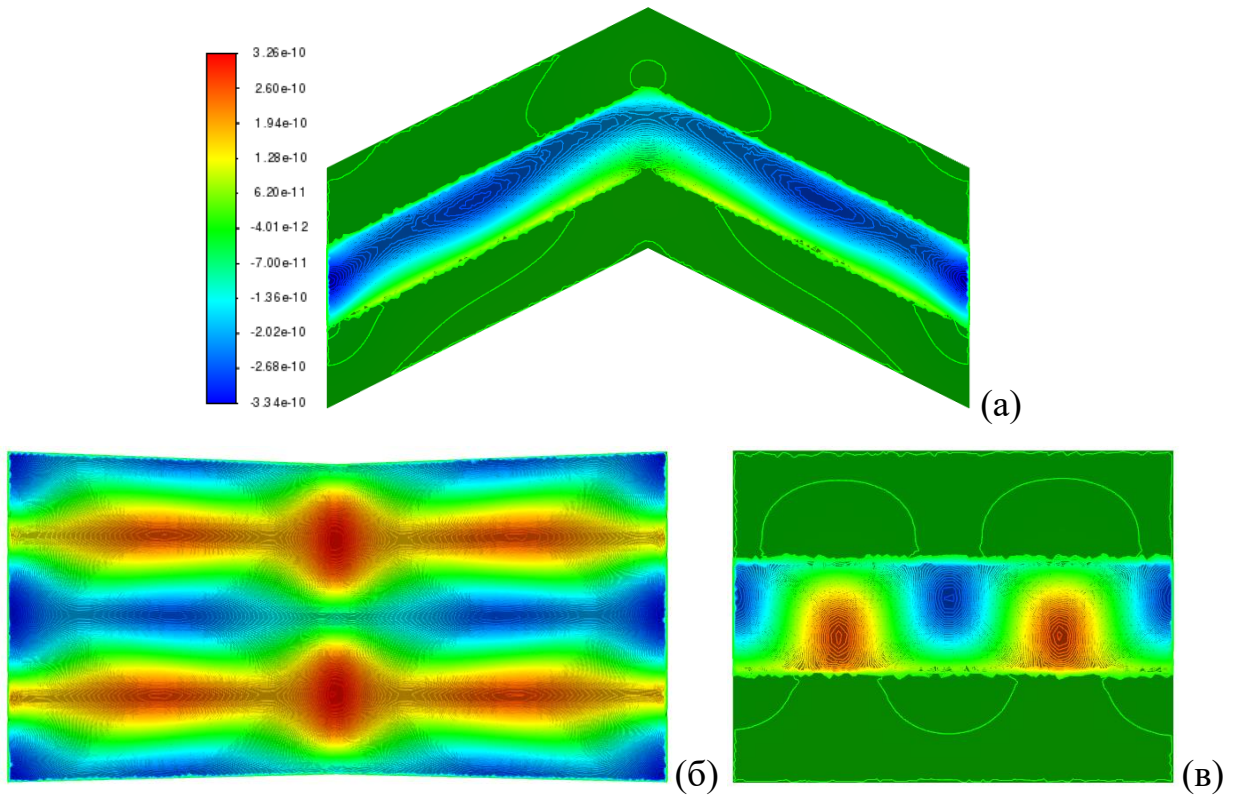


Рис. 3.8. Поля компоненты скорости V_y [м/с] в плоскостях А (а), В (б) и С (в)
 $(K_{in} = 10^{-12} \text{ м}^2)$

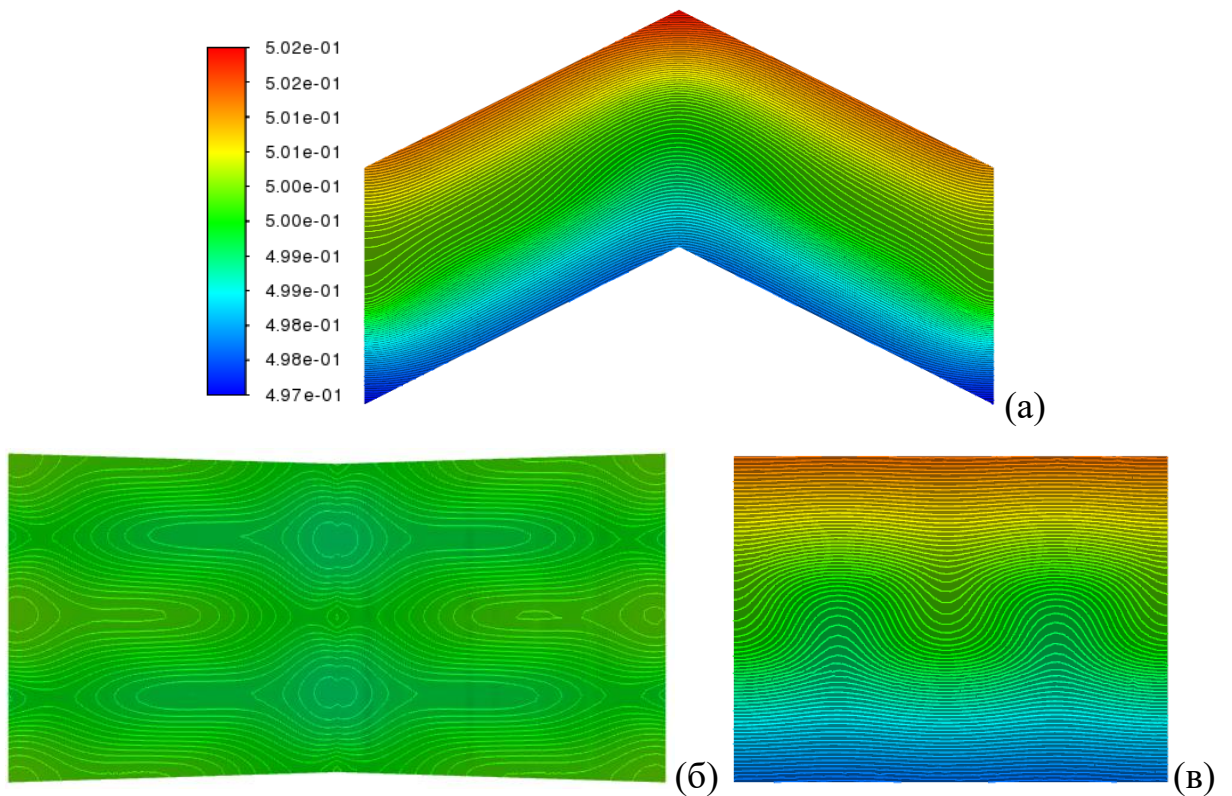


Рис. 3.9. Поля концентрации примеси в плоскостях А (а), В (б) и С (в) ($K_{in} = 10^{-12} \text{ м}^2$)

Зависимость максимального значения вертикальной составляющей скорости от времени $V_y(t)$ (Рис. 3.4) при высоких проницаемостях среднего слоя содержит резкие скачки, которые могут соответствовать изменениям структуры течения. Рассмотрим структуры течения для различных моментов времени при значениях проницаемости среднего слоя $K_{in} = 2 \cdot 10^{-12}, 10^{-11}, 2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$ (Рис. 3.4б), когда эти скачки наиболее выражены.

Анализ структур, возникающих при проницаемости среднего слоя, равной $K_{in} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ показывает, что сначала в полости возникает длинноволновой режим (Рис. 3.10а). Двухвихревое течение локализуется в среднем слое. Такая структура существует около $2.5 \cdot 10^3$ лет. После этого появляется асимметричная структура, состоящая из пяти продольных валов (Рис. 3.10б). Примерно через $8 \cdot 10^3$ лет, происходит очередная перестройка структуры, и течение становится симметричным четырёхвихревым (Рис. 3.10в).

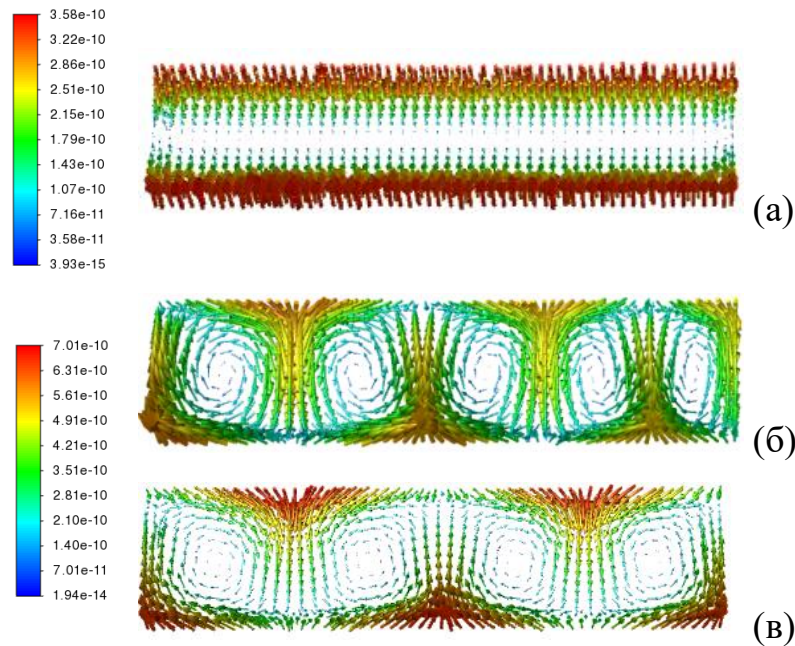


Рис. 3.10. Векторное поле скорости V [м/с] в плоскости D для моментов времени $t = 1.5 \cdot 10^3$ лет (а), $t = 5 \cdot 10^3$ лет (б), $t = 10^4$ лет (в) ($K_{in} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$)

Увеличение проницаемости среднего слоя ускоряет развитие потока. При $K_{in} = 10^{-11} \text{ м}^2$ длинноволновой режим наблюдается примерно до 10^3 лет. В момент времени $t = 1.5 \cdot 10^3$ лет течение уже имеет шестивихревую продольную

структуру (Рис. 3.11а). Вторая перестройка происходит около $2 \cdot 10^3$ лет: наблюдается слияние двух вихрей, структура становится асимметричной – пять вихрей имеют разные размеры в сечении D (Рис. 3.11б). Третья трансформация наблюдается при $t \approx 3.5 \cdot 10^3$ лет: здесь размеры вихрей выравниваются (Рис. 3.11в). Дальнейшее моделирование, проведенное до 10^4 лет, не показывает последующих изменений в структуре течения. Однако поведение кривой $V_y(t)$, представленной на Рис. 3.4, для этого значения проницаемости среднего слоя свидетельствуют о том, что и на более поздних временах возможны такие перестройки.

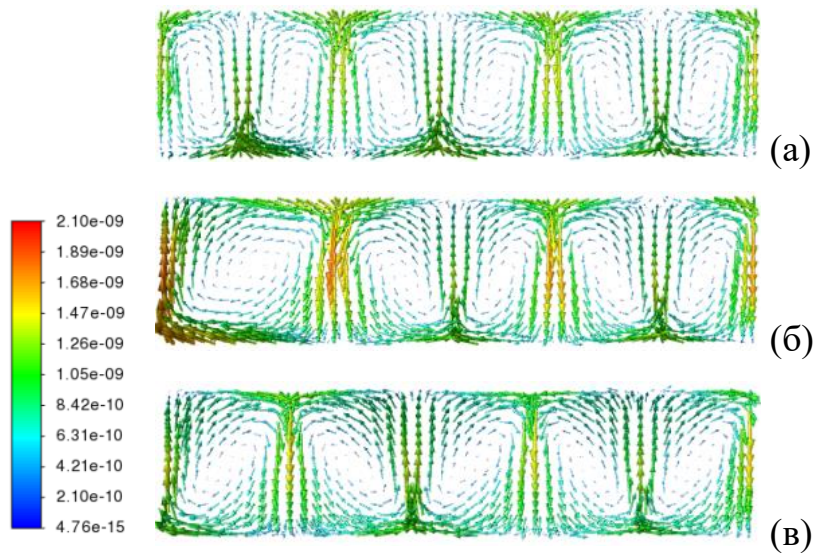


Рис. 3.11. Векторное поле скорости V [м/с] в плоскости D для моментов времени $t = 1.5 \cdot 10^3$ лет (а), $t = 3 \cdot 10^3$ лет (б), $t = 5 \cdot 10^3$ лет (в) ($K_{in} = 10^{-11} \text{ м}^2$)

Дальнейшее увеличение проницаемости среднего слоя до значения $K_{in} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$ приводит к сильно нелинейному поведению интенсивности течения. С начала процесса моделирования происходит длительное формирование течения, в разные моменты времени которого наблюдаются асимметричные продольные структуры (Рис. 3.12а-г). Длительность этого процесса составляет порядка $7 \cdot 10^3$ лет. В конце времени моделирования образуются четыре симметричных продольных вихря (Рис. 3.12д), а скорость течения достигает значений порядка $4.3 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}$. Аналогично предыдущему рассмотренному значению проницаемости среднего слоя, здесь также можно предположить, что возможны

дальнейшие перестройки структуры течения, связанные с уменьшением числа вихрей.

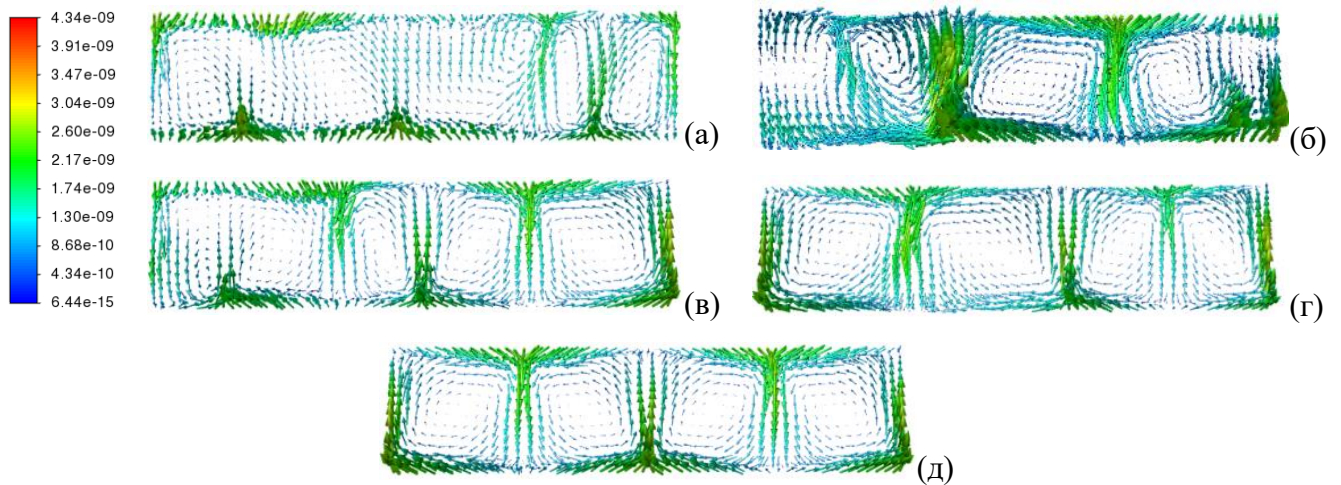


Рис. 3.12. Векторное поле скорости V [м/с] в плоскости D для моментов времени $t = 1.5 \cdot 10^3$ лет (а), $t = 3 \cdot 10^3$ лет (б), $t = 5 \cdot 10^3$ лет (в), $t = 6.5 \cdot 10^3$ лет (г), $t = 8 \cdot 10^3$ лет (д) ($K_{in} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$)

3.5. Синклиальная складка. Близкие проницаемости слоёв.

Теперь рассмотрим, как будет развиваться конвекция в системе, имитирующей синклиальную складку. Ниже представлены данные нелинейных расчётов в программном пакете ANSYS Fluent для синклиальной складки с разными проницаемостями слоёв. Как и в случае антиклиальной складки, проницаемости внешних слоёв устанавливались одинаковыми, а размерные параметры системы соответствовали смеси додекана (50%) и тетралина (50%) (Табл. 3.1).

На Рис. 3.13 представлены плоскости, в которых далее будут приведены результаты расчётов. Плоскости располагаются следующим образом (аналогично случаю антиклиальной складки на Рис. 3.3):

- А перпендикулярна оси z и пересекает складку пополам
- С перпендикулярна оси x и отделяет левое крыло складки от правого
- D перпендикулярна оси x и находится посередине правого крыла

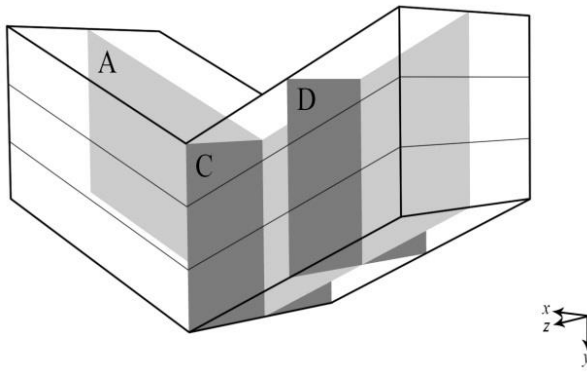


Рис. 3.13. Плоскости, в которых приводятся результаты трёхмерных расчётов для синклиналиной складки

В предыдущем Разделе была подробно рассмотрена временная эволюция течения в складке. В данном Разделе сконцентрируем внимание на установившихся конвективных режимах, но, в отличие от Раздела 3.4, где проницаемость внешних слоёв всегда была достаточно низкой (таким образом, конвективное движение почти не проникало во внешние слои), исследуется более широкий интервал значений проницаемости внешних слоёв. В том числе рассматриваются близкие проницаемости, когда конвекция становится возможной во всех слоях. Рассмотрим несколько вариантов соотношений проницаемости слоёв.

Вариант 1. Малые проницаемости слоёв

Сначала исследуем течение в слоях с малыми проницаемостями: $K_{in} = 10^{-13} \text{ м}^2$ во внутреннем слое, $K_{ex} = 10^{-14} \text{ м}^2$ во внешних слоях. Для такого соотношения проницаемостей ($K_p = K_{in}/K_{ex} = 10$) имеет место крупномасштабное плоскопараллельное течение, в большей степени сконцентрированное в центральном слое, однако захватывающее и менее проницаемые внешние слои (Рис. 3.14–3.16). Движение жидкости вдоль оси z отсутствует. Как и в случае антиклиналиной складки, течение заметно искривляет изолинии концентрации примеси в плоскости А (Рис. 3.16).

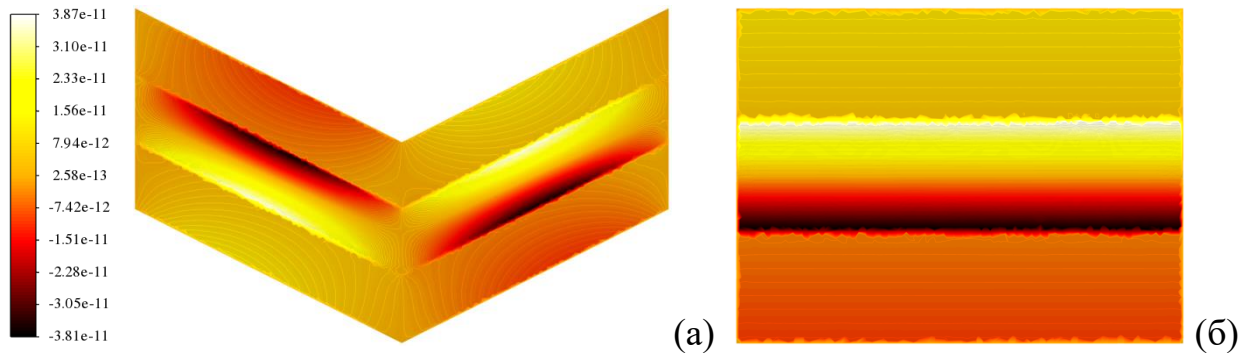


Рис. 3.14. Поля компоненты скорости V_x [м/с] в плоскостях А (а) и D (б) ($K_p = 10$)

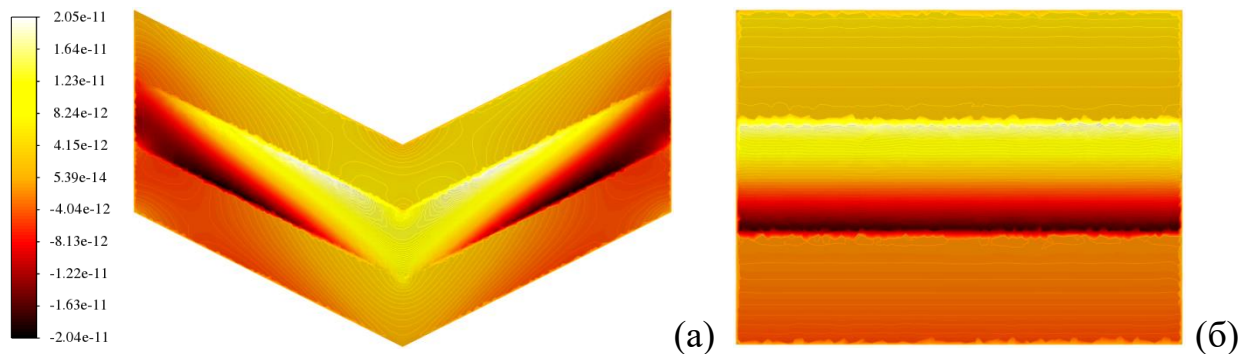


Рис. 3.15. Поля компоненты скорости V_y [м/с] в плоскостях А (а) и D (б) ($K_p = 10$)

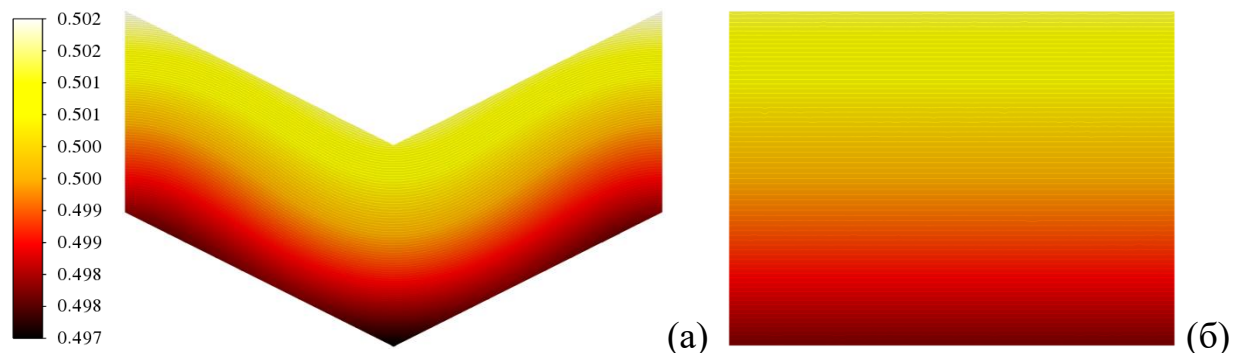


Рис. 3.16. Поля концентрации примеси в плоскостях А (а) и D (б) ($K_p = 10$)

Вариант 2. Малые близкие проницаемости слоёв

Рассмотрим изменения, возникающие при уменьшении в 2 раза проницаемости внутреннего слоя, то есть когда $K_{in} = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$, $K_{ex} = 10^{-14} \text{ м}^2$, $K_p = 5$. Это делает проницаемости внешних и внутреннего слоёв более близкими, но ожидаемо ведёт к снижению общей интенсивности конвекции. При таких параметрах наблюдается течение, качественно аналогичное течению, соответствующему Варианту 1, однако при этом потоки жидкости в менее

проницаемых внешних слоях становятся более интенсивными по сравнению с потоками внутреннего слоя. Из-за общего уменьшения интенсивности течения изолинии поля концентрации примеси искажаются меньше. В этом случае распределение концентрации приближается к своему линейному вертикальному градиенту.

Вариант 3. Малые очень близкие проницаемости слоёв

Далее, ещё уменьшим проницаемость внутреннего слоя так, чтобы она стала лишь в 2 раза выше проницаемости внешних слоёв ($K_{in} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$, $K_{ex} = 10^{-14} \text{ м}^2$, $K_p = 2$). Как видно из Рис. 3.17–3.19, основное течение жидкости происходит во внешних слоях, хотя они менее проницаемы, чем внутренний. Это связано с тем, что течение в пределах каждого крыла складки превращается в крупномасштабное. В отличие от Вариантов 1 и 2, теперь один конвективный вал занимает все слои крыла. При этом наиболее интенсивно течение ведёт себя возле верхних и нижних границ складки. Однако в целом интенсивность течения снова снижается из-за уменьшения проницаемости внутреннего слоя. Вследствие этого изолинии поля концентрации примеси (Рис. 3.19) искажаются ещё меньше, чем в Варианте 2.

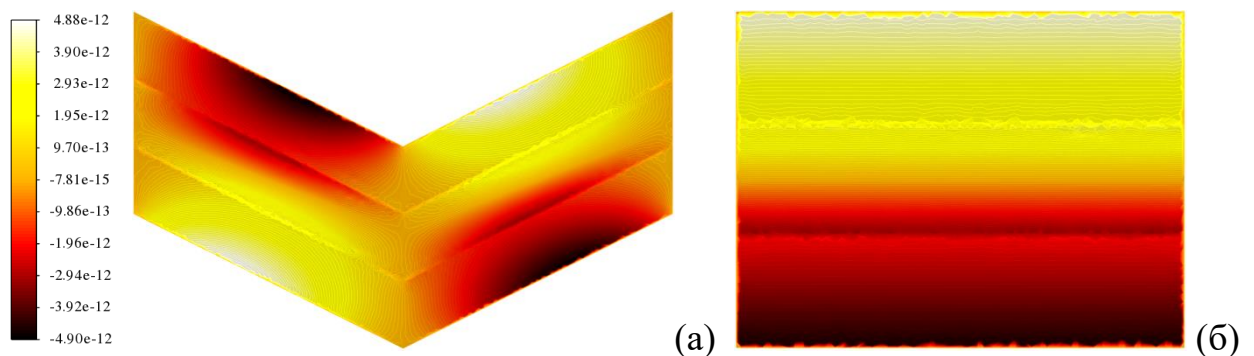


Рис. 3.17. Поля компоненты скорости V_x [м/с] в плоскостях А (а) и D (б) ($K_p = 2$)

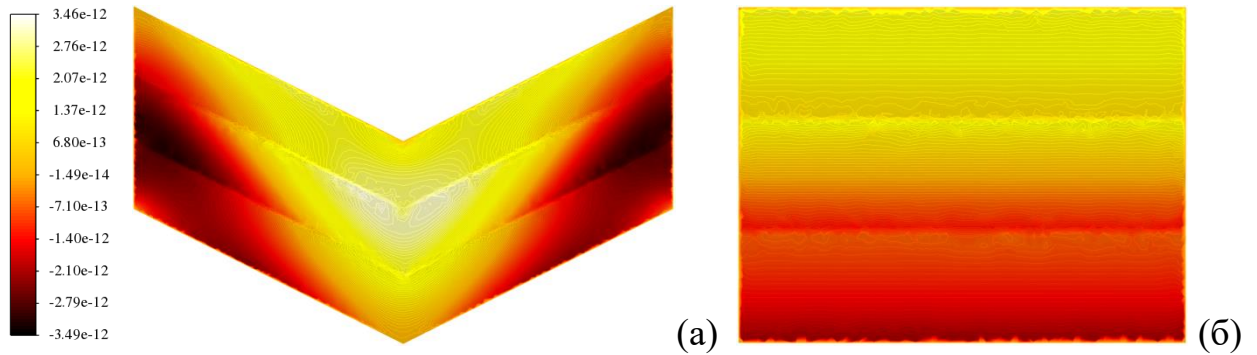


Рис. 3.18. Поля компоненты скорости V_y [м/с] в плоскостях А (а) и D (б) ($K_p = 2$)

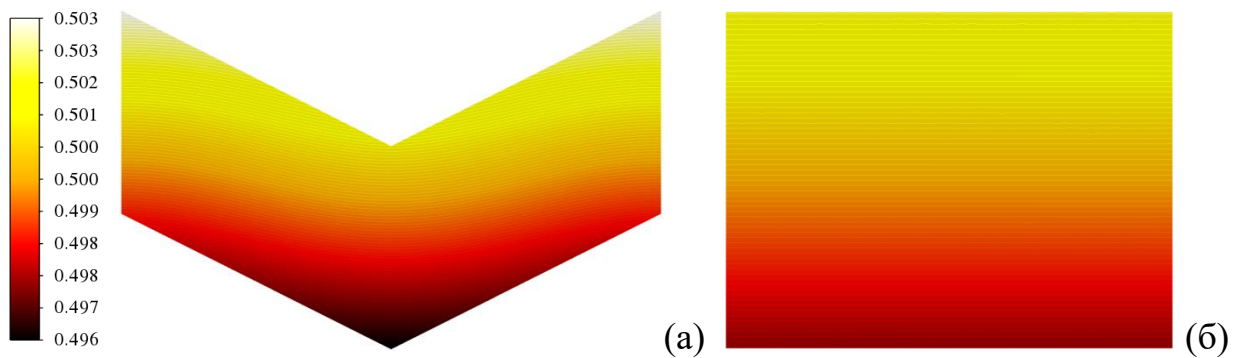


Рис. 3.19. Поля концентрации примеси в плоскости А (а) и D (б) ($K_p = 2$)

Вариант 4. Повышенные проницаемости слоёв

Рассмотрим, как сказывается на течении увеличение на порядок проницаемости всех слоёв по сравнению с Вариантом 1: $K_{in} = 10^{-12} \text{ м}^2$, $K_{ex} = 10^{-13} \text{ м}^2$. В этом случае $K_p = 10$ и, как и в Вариантах 1 и 2, наблюдается крупномасштабное плоскопараллельное течение, в большей степени сконцентрированное в центральном слое, но захватывающее также менее проницаемые внешние слои. Однако, в отличие от случаев с меньшими проницаемостями слоёв (Варианты 1 и 2), течение становится более интенсивным, а пики интенсивности его скорости вдоль оси y смещаются к центру и краям складки. Для системы с меньшими K_p (более близкими проницаемостями всех слоёв) наблюдается качественно аналогичное поведение относительно уже рассмотренных выше Вариантов 1–3. Исключением в Варианте 4 является лишь то, что за счёт возросшей интенсивности течения теперь изолинии поля концентрации деформируются еще заметнее (Рис. 3.20).

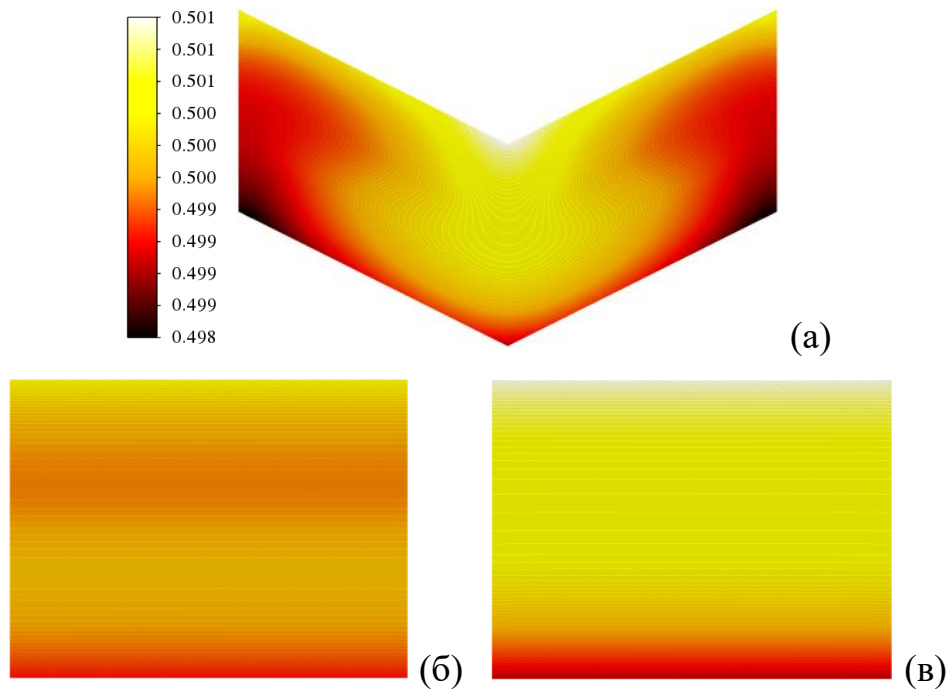


Рис. 3.20. Поля концентрации примеси в плоскостях А (а), D (б) и С (в) ($K_p = 10$)

Вариант 5. Повышенные близкие проницаемости слоёв. Продольные валы.

Относительно Варианта 4 увеличим проницаемости внешних слоёв в 10 раз ($K_{ex} = 10^{-12} \text{ м}^2$), а проницаемость внутреннего слоя в 5 раз ($K_{in} = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$), то есть $K_p = 5$. Как видно из Рис. 3.21–3.25, наблюдается крупномасштабное плоскопараллельное течение с наложенными на него продольными валами (течение с четырёхвихревой структурой). Скорость движения жидкости вдоль оси z теперь ненулевая, а имеет место трёхмерное течение. Основное движение жидкости происходит во внешних слоях, несмотря на то, что они менее проницаемы, чем внутренний. Примечательно, что при более высокой проницаемости слоёв, образующих складку, повышается максимальное значение K_p , при котором зоны интенсивности течения перераспределяются подобным образом. Течение вдоль оси x ведёт себя наиболее интенсивно вблизи верхних и нижних границ складки, а течение вдоль оси y – на торцах складки и в её центре. За счёт влияния продольных валов, изолинии поля концентрации примеси сильно искривляются (Рис. 3.25), причём как в плоскости А, так и в плоскостях D и С.

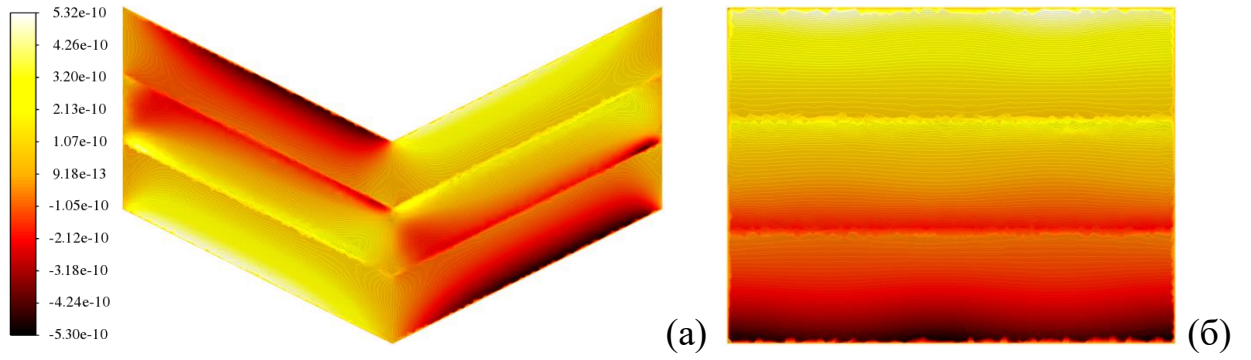


Рис. 3.21. Поля компоненты скорости V_x [м/с] в плоскостях А (а) и D (б) ($K_p = 5$)

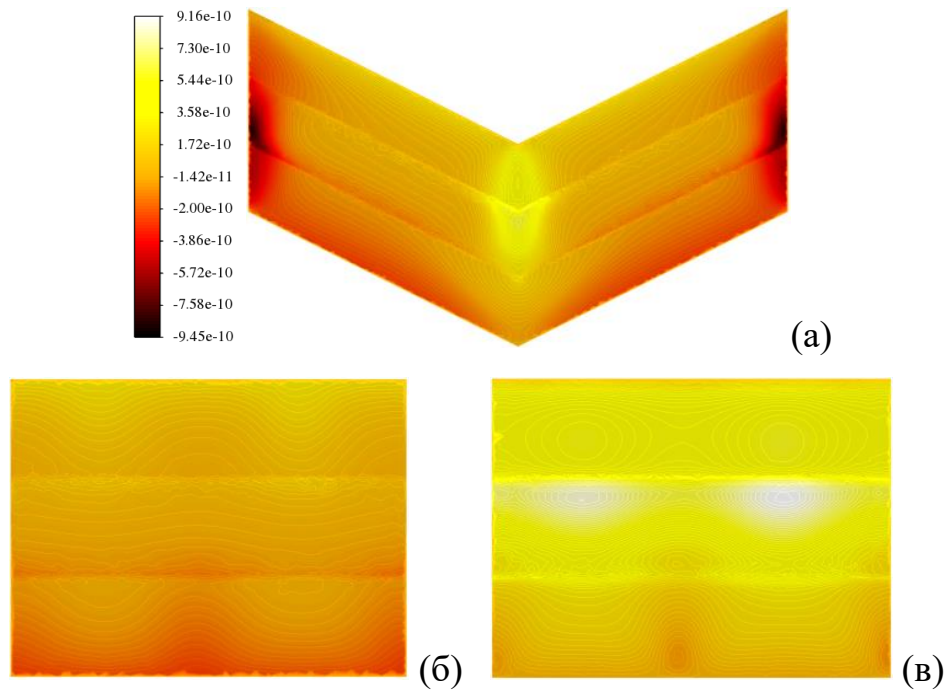


Рис. 3.22. Поля компоненты скорости V_y [м/с] в плоскостях А (а), D (б) и С (в) ($K_p = 5$)

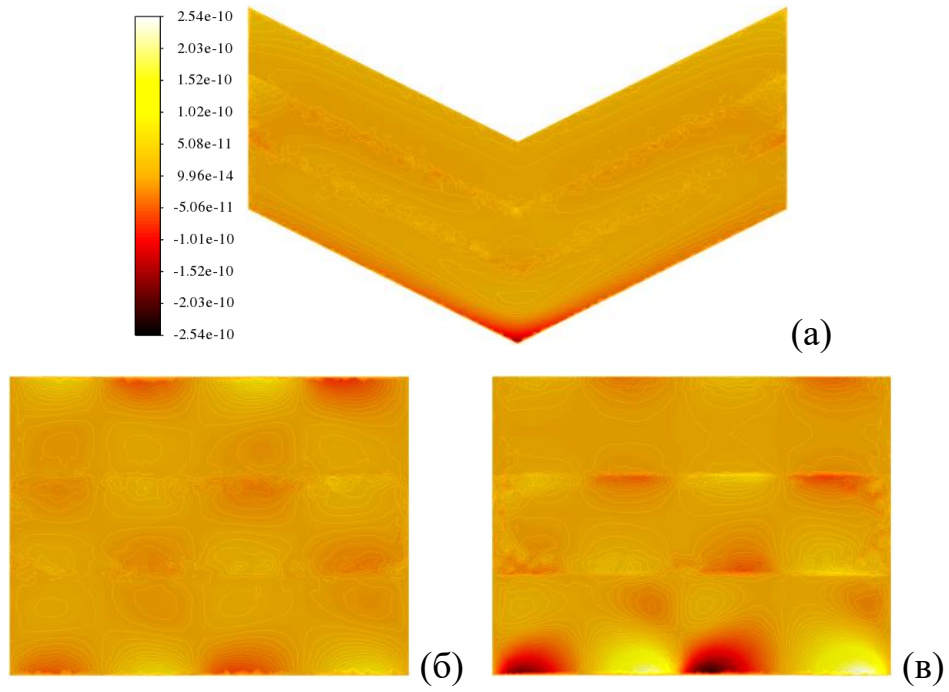


Рис. 3.23. Поля компоненты скорости V_z [м/с] в плоскостях А (а), D (б) и С (в)
($K_p = 5$)

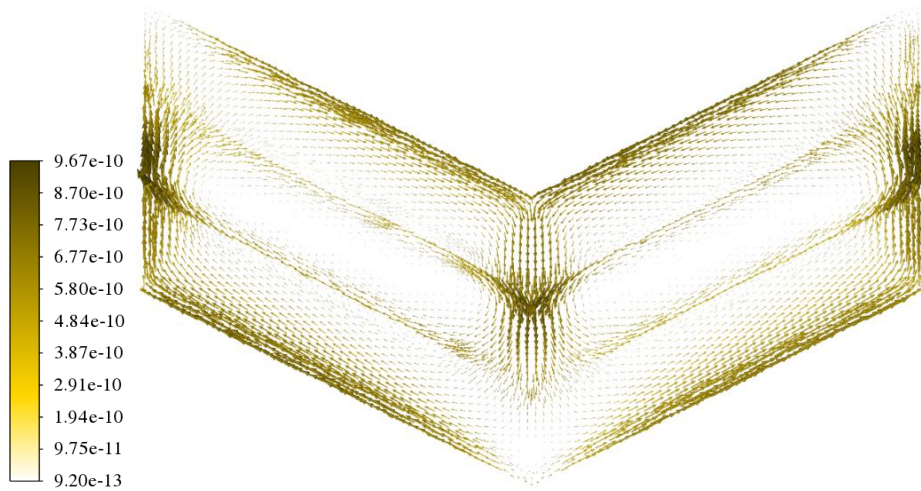


Рис. 3.24. Векторное поле скорости \mathbf{V} [м/с] в плоскости А ($K_p = 5$)

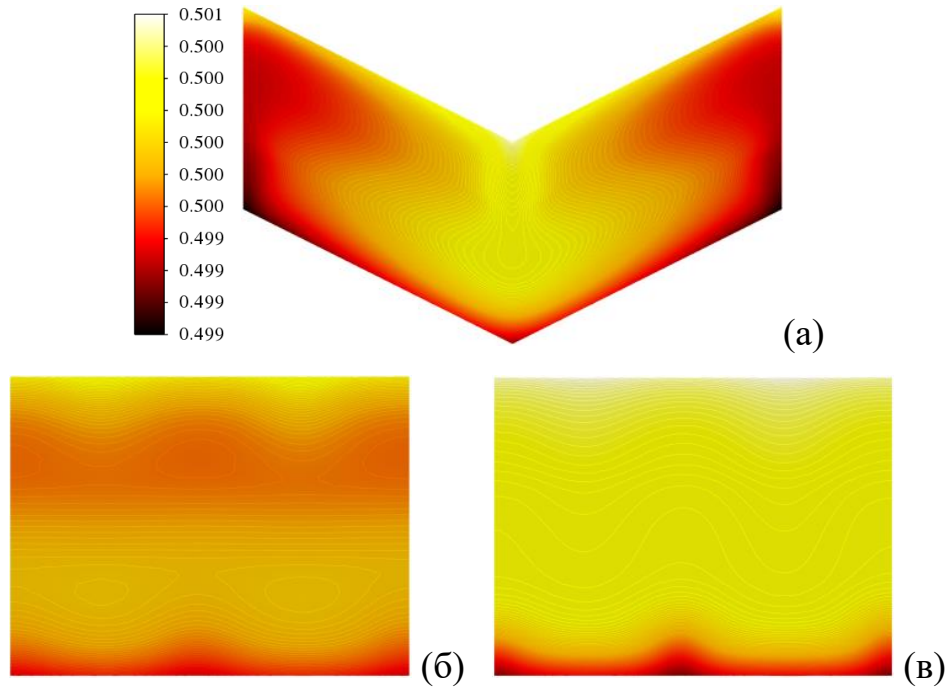


Рис. 3.25. Поля концентрации в плоскостях А (а), D (б) и С (в) ($K_p = 5$)

Вариант 6. Высокие проницаемости слоёв. Продольные вали.

Увеличим проницаемость внутреннего слоя в 10 раз, а внешних слоёв в 5 раз, по сравнению с Вариантом 5: $K_{in} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$, $K_{ex} = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, $K_p = 10$. При этом течение является крупномасштабным с наложенными на него продольными валами (с пятивихревой структурой) (Рис. 3.26), причём основной вклад в движение жидкости вносят продольные вали. Во всём объёме течение интенсивное, однако, выделяются зоны его локализации у торцов и около центра складки. Изолинии поля концентрации (Рис. 3.27) искривляются ещё сильнее, чем в Варианте 5. При проницаемости внешних слоёв $K_{ex} = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ и меньших K_p (более близких проницаемостях всех слоёв) наблюдается поведение системы, качественно аналогичное рассмотренным выше случаям.

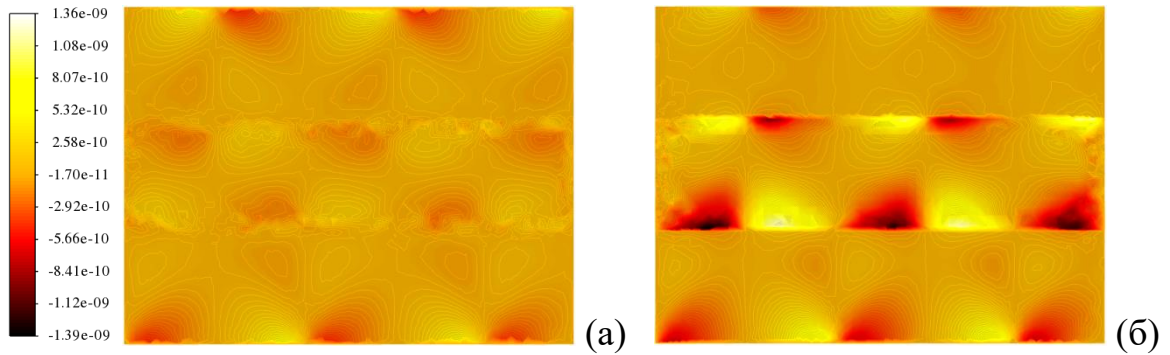


Рис. 3.26. Поля компоненты скорости V_z [м/с] в плоскостях D (а) и C (б) ($K_p = 10$)

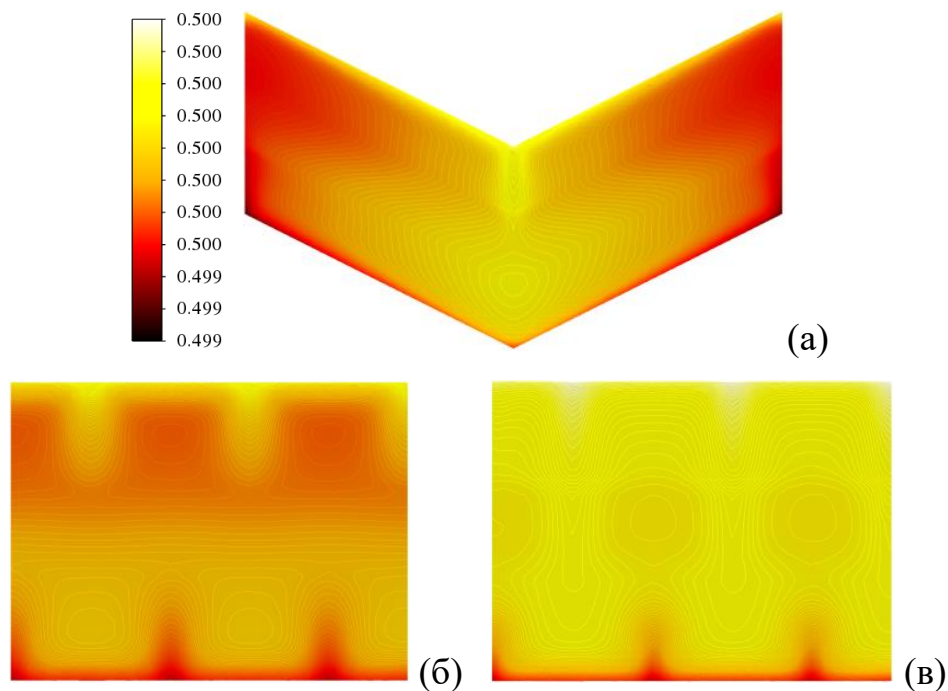


Рис. 3.27. Поля концентрации в плоскостях A (а), D (б) и C (в) ($K_p = 10$)

3.6. Заключение по главе

Выполнено нелинейное трёхмерное моделирование конвекции в трёхслойных системах пористых слоёв, насыщенных бинарными жидкостями, имитирующих антиклинальную и синклиналильную геологические складки, находящиеся под действием вертикального геотермального градиента. Значения параметров пористой среды соответствуют таким средам, как мелкозернистый и глинистый песок, алевроит, микротрещиноватый известняк, некоторые песчаники и сланцы. В качестве жидкости, насыщающей пористую среду, рассматривалась

смесь додекана и тетралина, взятых в равных массовых долях. Компоненты этой смеси являются представителями углеводородов, встречающихся в нефтяных месторождениях.

Определены условия возникновения конвекции, а также структура и интенсивность конвективных движений, возникающих после потери устойчивости равновесия в зависимости от соотношения проницаемостей слоёв. Найдено, что при проницаемостях слоёв, соответствующих критическим условиям возникновения конвекции, возникает слабое течение, охватывающее всю трёхслойную систему. При более высоких проницаемостях появляется составляющая течения в форме продольных валов, накладываемая на слабое сквозное течение. Этот поток существенно деформирует изолинии концентрации. При ещё более высокой проницаемости в течении преобладает составляющая, соответствующая продольным валам, а количество валов в пределах слоя растёт. При этом характер развития потока становится резко нелинейным.

При достаточно близких проницаемостях внешних и внутреннего слоя основное течение концентрируется около внешних стенок складки.

Показано, что в геологических складках синклинального и антиклинального вида имеют место качественно аналогичные структуры течения, за исключением распределения по складкам концентрации примеси.

В большинстве работ, исследующих подобные слоистые пористые системы, рассматриваются слои, насыщенные однокомпонентной жидкостью, или изучается более простая геометрия [121]. В рамках диссертационной работы использовалась геометрия, близкая к существующим геологическим образованиям. Параметры системы соответствовали реальным нефтеносным пластам и реальной бинарной смеси, компоненты которой входят в разные фракции нефти. Важным фактором являются низкие значения проницаемости пород, что влияет на длительность установления конвективных процессов. Исследование задач в трёхмерной нелинейной нестационарной постановке позволяет получать результаты, приближенные к реальным системам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные **результаты работы** заключаются в следующем:

1. Обнаружена длинноволновая мода колебательной неустойчивости механического равновесия трёхкомпонентной смеси с эффектом Соре в горизонтальном слое пористой среды. Получена карта устойчивости на плоскости число Рэлея – отношение разделения. Определён диапазон параметров, в котором длинноволновая колебательная мода является наиболее опасной.
2. Изучен характер возбуждения неустойчивости. Найдено, что при постепенном повышении числа Рэлея до достижения критического значения, соответствующего наиболее опасной моде, реализуется прямая бифуркация. Дальнейшее увеличение надкритичности приводит к переходам на другие конвективные режимы. Переходы между режимами в большинстве случаев сопровождаются гистерезисом.
3. На основе модели, содержащей вязкие слагаемые в уравнениях для пульсаций, изучено влияние высокочастотных вертикальных вибраций малой амплитуды. Результаты анализа демонстрируют, что вибрационное воздействие приводит к смещению границ перехода между длинноволновыми и ячеистыми модами, тем самым расширяя область параметров, в которой длинноволновые моды являются более опасными. Помимо этого, установлено, что вибрации способствуют повышению порога конвекции для ячеистых возмущений, одновременно вызывая уменьшение частоты колебательных возмущений.
4. Проведённый ранее в других работах линейный анализ устойчивости равновесия наклонного слоя пористой среды, насыщенной однокомпонентной жидкостью, под действием вертикального градиента температуры расширен на трёхмерный случай. Показано, что во всём диапазоне углов наклона слоя наиболее опасны трёхмерные возмущения,

имеющие форму продольных валов. Определена зависимость волнового числа критических возмущений от угла наклона слоя. Существование продольных валов подтверждено трёхмерными нелинейными расчётами.

5. Трёхмерные численные расчёты показали наличие ненулевой составляющей скорости течения жидкости вдоль оси продольных валов. В пределах каждого конвективного вихря траектории движения жидких частиц имеют эллиптическую форму. Нормаль к плоскости такого эллипса ориентирована перпендикулярно вектору ускорения свободного падения и образует определённый угол с осью валов. С ростом надкритичности наблюдается увеличение данного угла.
6. С помощью численного решения двумерной задачи для продольных конвективных структур в плоскости xu детально изучена структура конвективных течений. Подтверждено существование ненулевой скорости потока жидкости вдоль оси z (оси продольных валов). Найдено, что при всех углах наклона слоя имеет место прямая бифуркация.
7. С помощью трёхмерного численного моделирования исследована конвекция в системах из трёх пористых слоёв, насыщенных бинарными смесями и имитирующих геометрию антиклинальной и синклиналиной геологических складок, находящихся под действием геотермального градиента. Установлены критические условия возникновения конвективного движения, а также охарактеризованы пространственная структура и интенсивность конвективных течений, формирующихся после потери устойчивости состояния равновесия. Выявлены закономерности эволюции течения в зависимости от соотношения проницаемостей слоёв. Найдено, что при проницаемостях слоёв, соответствующих критическим условиям возникновения конвекции, возникает слабое течение, охватывающее всю трёхслойную систему. При более высоких проницаемостях появляется составляющая течения в форме продольных валов, накладывающаяся на слабое сквозное течение.

8. При достаточно близких проницаемостях внешних и внутреннего слоя основное течение концентрируется около внешних стенок складки. Тип складки не вносит качественных изменений в структуру конвективных потоков.

Рекомендации, перспективы дальнейшей проработки темы

Результаты настоящей диссертационной работы расширяют представления о распределении примесей, процессах миграции и течениях углеводородов в системах, приближенных к геологическим нефтеносным пластам. В дальнейшем предполагается рассмотреть анизотропные пористые системы в постановке, ещё сильнее приближенной к реальным нефтеносным пластам с учётом факторов, наиболее существенно влияющих на пространственное распределение компонентов. В частности, при исследовании многослойных систем предполагается учесть различную пористость и теплопроводность слоёв, что значительно усложнит поведение.

Также, имеются результаты экспериментальных исследований [107] конвекции в наклонном слое свободной жидкости, находящемся под действием вертикального градиента температуры, которые говорят о том, что продольные возмущения (на данный момент считающиеся наиболее опасным типом возмущений в большинстве конвективных задач, как для пористой среды, так и для свободной жидкости) могут являться наиболее опасными не во всём диапазоне углов наклона слоя. Имеется диапазон, в пределах которого реализуются конвективные структуры, которые при теоретическом исследовании конвективных задач такого типа в современной литературе обычно не рассматриваются. В связи с этим существует необходимость исследования широкого класса трёхмерных возмущений, акцентируя особое внимание на возмущениях, обнаруженных экспериментально.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1) Lyubimova T.P., Muratov I.D., Shubenkov I.S. Onset and nonlinear regimes of convection in an inclined porous layer subject to a vertical temperature gradient // *Phys. Fluids*. — 2022. — Vol. 34. — Art. 094114.
- 2) Lyubimova T.P., Shubenkov I.S. Soret-induced convection of ternary fluid in a horizontal porous layer heated from below // *Physics of Fluids*. — 2023. — Vol. 35. — Art. 084114.
- 3) Shubenkov I.S., Lyubimova T.P., Sadilov E.S. Three-dimensional convection in an inclined porous layer subjected to a vertical temperature gradient // *Fluid Dynamics & Materials Processing*. — 2024. — Vol. 20, № 9. — P. 1957–1970.
- 4) Lyubimova T.P., Shubenkov I.S., Ozhgibesova N.A. Soret-induced convection in a layered porous medium simulating an anticlinal geological fold under the action of a geothermal temperature gradient // *Heat Transfer*. — 2025. — Vol. 54. — P. 2251–2264.
- 5) Шубенков И.С., Любимова Т.П. Возникновение и нелинейные режимы конвекции бинарных смесей в многослойных системах, имитирующих синклиналильные геологические складки // *Вычислительная механика сплошных сред*. — 2026. — Т. 19, № 1. — С. 31–42.
- 6) Шубенков И.С., Любимова Т.П. Влияние вибрации на возникновение конвекции в горизонтальном пористом слое, насыщенном трёхкомпонентной жидкой смесью // *Вестник Пермского университета. Физика*. — 2026. — № 2. — С. 49–64.
- 7) Rayleigh Lord. On convective currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side // *Philosophical Magazine*. — 1916.
- 8) Jeffreys H. The stability of a layer of fluid heated below // *Philosophical Magazine*. — 1926. — Vol. 2, № 10. — P. 833–844.

- 9) Jeffreys H. Some cases of instability in fluid motion // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. — 1928. — Vol. 118, № 779. — P. 195–208.
- 10) Sparrow E.M., Goldstein R.J., Jonsson V.K. Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature gradients // Journal of Fluid Mechanics. — 1964. — Vol. 18, № 4. — P. 513–528.
- 11) Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. — 1961.
- 12) Malkus W.V.R., Veronis G. Finite amplitude cellular convection // Journal of Fluid Mechanics. — 1958. — Vol. 4, № 3. — P. 225–260.
- 13) Busse F.H. Non-linear properties of thermal convection // Reports on Progress in Physics. — 1978. — Vol. 41, № 12. — P. 1929.
- 14) Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М. : Наука, 1972. — 392 с.
- 15) Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея — Бенара: структуры и динамика. — М. : Эдиториал УРСС, 1999. — 248 с.
- 16) Horton C.W., Rogers Jr F.T. Convection currents in a porous medium // Journal of Applied Physics. — 1945. — Vol. 16, № 6. — P. 367–370.
- 17) Lapwood E.R. Convection of a fluid in a porous medium // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1948. — Vol. 44, № 4. — P. 508–521.
- 18) Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. — 4th ed. — New York : Springer, 2013.
- 19) Kohler W., Morozov K.I. The Soret effect in liquid mixtures — a review // J. Non-Equilib. Thermodyn. — 2016. — Vol. 41, № 3. — P. 151–197.
- 20) Baines P.G., Gill A.E. On thermohaline convection with linear gradients // Journal of Fluid Mechanics. — 1969. — Vol. 37, № 2. — P. 289–306.

- 21) Schechter R.S., Velarde M.G., Platten J.K. The two-component Bénard problem // *Advances in Chemical Physics*. — 1974. — Vol. 26. — P. 265–301.
- 22) Knobloch E. Oscillatory convection in binary mixtures // *Physical Review A*. — 1986. — Vol. 34, № 2. — P. 1538.
- 23) Brand H.R., Hohenberg P.C., Ecke R.E. Non-linear dynamics of traveling-wave states in Rayleigh-Bénard convection of binary mixtures // *Physical Review A*. — 1987. — Vol. 35, № 11. — P. 4726.
- 24) Danby C.J., Lambert J.D., Mitchell C.M. Separation of hydrocarbon isomers by thermal diffusion // *Nature*. — 1956. — Vol. 177. — P. 1225–1226.
- 25) Weinberger W. The physics of the solar pond // *Sol. Energy*. — 1964. — Vol. 8. — P. 45–56.
- 26) Gregg M. The microstructure of the ocean // *Sci. Am.* — 1973. — Vol. 228. — P. 64–77.
- 27) Montel F., Bickert J., Lagisquet A., Galliero G. Initial state of petroleum reservoirs: a comprehensive approach // *J. Pet. Sci. Eng.* — 2007. — Vol. 58, № 3–4. — P. 391–402.
- 28) Vafai K. *Handbook of Porous Media*. — 3rd ed. — Boca Raton, FL : CRC Press/Taylor and Francis Group, 2015.
- 29) Bonte D., van Wees J.-D., Verweij J.M. Subsurface temperature of the onshore Netherlands: new temperature dataset and modelling // *Neth. J. Geosci.* — 2012. — Vol. 91. — P. 491–515.
- 30) Pasquale V., Chiozzi P., Verdoya M. Evidence for thermal convection in the deep carbonate aquifer of the eastern sector of the Po Plain, Italy // *Tectonophysics*. — 2013. — Vol. 594. — P. 1–12.
- 31) Guillou-Frottier L., Carré C., Bourguine B., Bouchot V., Genter A. Structure of hydrothermal convection in the Upper Rhine Graben as inferred from corrected

temperature data and basin-scale numerical models // *J. Volcanol. Geotherm. Res.* — 2013. — Vol. 256. — P. 29–49.

32) Lipsey L., Pluymaekers M., Goldberg T., van Oversteeg K., Ghazaryan L., Cloetingh S., van Wees J.-D. Numerical modelling of thermal convection in the Luttelgeest carbonate platform, the Netherlands // *Geothermics.* — 2016. — Vol. 64. — P. 135–151.

33) Шапошников И.Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси // *Прикладная математика и механика.* — 1953. — Т. 17, вып. 5. — С. 604–606.

34) Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. — М. : Наука, 1989. — 318 с.

35) Smorodin B.L. Convective stability of a binary mixture under modulated heating // *Fluid Dynamics.* — 2002. — Vol. 37, № 5. — P. 693–701.

36) Smorodin B.L., Myznikova B.I., Lücke M. Convective patterns of binary mixtures in a porous medium with modulated heating // *Physical Review E.* — 2010. — Vol. 82, № 2. — Art. 026309.

37) Nield D.A. Onset of thermohaline convection in a porous medium // *Water Resources Research.* — 1968. — Vol. 4, № 3. — P. 553–560.

38) Brand H.R., Steinberg V. Convective instabilities in binary mixtures in a porous medium // *Physics Letters A.* — 1983. — Vol. 93, № 7. — P. 333–336.

39) Smorodin B.L., Lücke M. Convective competition between differently oriented rolls in thermodiffusive mixtures with modulated heating // *Physical Review E.* — 2004. — Vol. 70, № 3. — Art. 036310.

40) Соболева Е.Б., Цыпкин Г.Г. Численное моделирование конвективных течений в грунте при испарении воды, содержащей растворённую примесь // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.* — 2014. — № 5. — С. 88–99.

- 41) Соболева Е.Б., Цыпкин Г.Г. Режимы концентрационной конвекции при испарении грунтовых вод, содержащих растворённую примесь // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2016. — № 3. — С. 70–78.
- 42) Platten J.K. The Soret effect: a review of recent experimental results // *Appl. Mech.* — 2006. — Vol. 73, № 1. — P. 5–15.
- 43) Van Vaerenbergh S., Legros J.C. Soret coefficients of organic solutions measured in the microgravity SCM experiment and by the flow and Bénard cells // *J. Phys. Chem. B.* — 1998. — Vol. 102. — P. 4426–4431.
- 44) Bou-Ali M.M., Ahadi A., Alonso de Mezquia D., Galand Q., Gebhardt M., Khlybov O., Köhler W., Larrañaga M., Legros J.C., Lyubimova T., Mialdun A., Ryzhkov I., Saghir M.Z., Shevtsova V., Van Vaerenbergh S. Benchmark values for the Soret, thermodiffusion and molecular diffusion coefficients of the ternary mixture tetralin+isobutylbenzene+n-dodecane with 0.8–0.1–0.1 mass fraction // *Eur. Phys. J. E.* — 2015. — Vol. 38, № 4. — Art. 30.
- 45) Khlybov O.A., Ryzhkov I.I., Lyubimova T.P. Contribution to the benchmark for ternary mixtures: measurement of diffusion and Soret coefficients in 1,2,3,4-tetrahydronaphthalene, isobutylbenzene, and dodecane onboard the ISS // *Eur. Phys. J. E.* — 2015. — Vol. 38, № 4. — Art. 29.
- 46) Lyubimova T.P., Sadilov E.S., Prokopev S.A. Onset of Soret-induced convection in a horizontal layer of ternary fluid with fixed vertical heat flux at the boundaries // *Eur. Phys. J. E.* — 2017. — Vol. 40, № 2. — Art. 15.
- 47) Lyubimova T., Lobov N., Shevtsova V. Stability of a stationary plane-parallel flow of a ternary fluid between two vertical plates maintained at constant different temperatures // *Eur. Phys. J. E.* — 2018. — Vol. 41, № 2. — Art. 23.
- 48) Mialdun A., Ryzhkov I., Khlybov O., Lyubimova T., Shevtsova V. Measurement of Soret coefficients in a ternary mixture of toluene–methanol–cyclohexane in

convection-free environment // *J. Chem. Phys.* — 2018. — Vol. 148, № 4. — Art. 044506.

49) Triller T., Bataller H., Bou-Ali M.M., Braibanti M., Croccolo F., Ezquerro J.M., Galand Q., Gavaldá J., Lapeira E., Laveron-Simavilla A., Lyubimova T., Mialdun A., Ortiz de Zárate J.M., Rodríguez J., Ruiz X., Ryzhkov I.I., Shevtsova V., Van Vaerenbergh S., Köhler W. Thermodiffusion in ternary mixtures of water/ethanol/triethylene glycol: first report on the DCMIX3-experiments performed on the International Space Station // *Microgravity Sci. Technol.* — 2018. — Vol. 30, № 3. — P. 295–308.

50) Braibanti M., Artola P.-A., Baaske P., Bataller H., Bazile J.-P., Bou-Ali M.M., Cannell D.S., Carpineti M., Cerbino R., Croccolo F., Diaz J., Donev A., Errarte A., Ezquerro J.M., Frutos-Pastor A., Galand Q., Galliero G., Gaponenko Y., García-Fernandez L., Gavalda J., Giavazzi F., Giglio M., Giraudet C., Hoang H., Kufner E., Köhler W., Lapeira E., Laveron-Simavilla A., Legros J.-C., Lizarraga I., Lyubimova T., Mazzoni S., Melville N., Mialdun A., Minster O., Montel F., Molster F.J., Ortiz de Zárate J.M., Rodríguez J., Rousseau B., Ruiz X., Ryzhkov I.I., Schraml M., Shevtsova V., Takacs C.J., Triller T., Van Vaerenbergh S., Vailati A., Verga A., Vermorel R., Vesovic V., Yasnou V., Xu S., Zapf D., Zhang K. European Space Agency experiments on thermodiffusion of fluid mixtures in space // *Eur. Phys. J. E.* — 2019. — Vol. 42, № 7. — Art. 86.

51) Mialdun A., Bou-Ali M.M., Braibanti M., Croccolo F., Errarte A., Ezquerro J.M., Fernandez J.J., García-Fernandez L., Galand Q., Gaponenko Y., Gavaldá F., Köhler W., Lyubimova T., Ortiz de Zárate J.M., Rodríguez J., Ruiz X., Ryzhkov I.I., Schraml M., Shevtsova V., Van Vaerenbergh S., Bataller H. Data quality assessment of Diffusion Coefficient Measurements in ternary mIXtures 4 (DCMIX4) experiment // *Acta Astronaut.* — 2020. — Vol. 176. — P. 204–215.

- 52) Prokopev S., Lyubimova T., Mialdun A., Shevtsova V. A ternary mixture at the border of Soret separation stability // *Phys. Chem. Chem. Phys.* — 2021. — Vol. 23, № 14. — P. 8466–8477.
- 53) Sechenyh V., Legros J.C., Mialdun A., Ortiz De Zárate J.M., Shevtsova V. Fickian diffusion in ternary mixtures composed by 1,2,3,4-tetrahydronaphthalene, isobutylbenzene, and n-dodecane // *J. Phys. Chem. B.* — 2016. — Vol. 120, № 3. — P. 535–548.
- 54) Mialdun A., Sechenyh V., Legros J.C., Ortiz De Zárate J.M., Shevtsova V. Investigation of Fickian diffusion in the ternary mixture of 1,2,3,4-tetrahydronaphthalene, isobutylbenzene, and dodecane // *J. Chem. Phys.* — 2013. — Vol. 139, № 10. — Art. 104903.
- 55) Gebhardt M., Köhler W., Mialdun A., Yasnou V., Shevtsova V. Diffusion, thermal diffusion, and Soret coefficients and optical contrast factors of the binary mixtures of dodecane, isobutylbenzene, and 1,2,3,4-tetrahydronaphthalene // *J. Chem. Phys.* — 2013. — Vol. 138, № 11. — Art. 114503.
- 56) Legros J.C., Gaponenko Y., Mialdun A., Triller T., Hammon A., Bauer C., Köhler W., Shevtsova V. Investigation of Fickian diffusion in the ternary mixtures of water–ethanol–triethylene glycol and its binary pairs // *Phys. Chem. Chem. Phys.* — 2015. — Vol. 17, № 41. — P. 27713–27725.
- 57) Kempers L.J.T.M. A thermodynamic theory of the Soret effect in a multicomponent liquid // *J. Chem. Phys.* — 1989. — Vol. 90, № 11. — P. 6541–6548.
- 58) Griffiths R.W. The influence of a third diffusing component upon the onset of convection // *J. Fluid Mech.* — 1979. — Vol. 92. — P. 659–670.
- 59) Рыжков И.И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2013. — 200 с.

- 60) Ryzhkov I.I., Shevtsova V.M. On thermal diffusion and convection in multicomponent mixtures with application to the Soret disk experiment // *Physics of Fluids*. — 2007. — Vol. 19, № 2. — Art. 027101.
- 61) Charrier-Mojtabi M.C., Elhajjar B., Mojtabi A. Analytical and numerical stability analysis of Soret-driven convection in a horizontal porous layer // *Phys. Fluids*. — 2007. — Vol. 19. — Art. 124104.
- 62) Schopf W. Convection onset for binary mixture in a porous medium and in narrow cell: A comparison // *J. Fluid Mech.* — 1992. — Vol. 245. — P. 263.
- 63) Karimi-Fard M., Charrier-Mojtabi M.C., Mojtabi A. Onset of stationary and oscillatory convection in a tilted porous cavity saturated with a binary fluid: Linear stability analysis // *Phys. Fluids*. — 1999. — Vol. 11, № 6. — P. 1346–1358.
- 64) Firoozabadi A., Ghorayeb K., Shukla K. Theoretical model of thermal diffusion factors in multicomponent mixtures // *AIChE J.* — 2000. — Vol. 46, № 5. — P. 892–900.
- 65) VanVaerenbergh S., Srinivasan S., Saghir M.Z. Thermodiffusion in multicomponent hydrocarbon mixtures: Experimental investigations and computational analysis // *J. Chem. Phys.* — 2009. — Vol. 131, № 11. — Art. 114505.
- 66) Lyubimova T., Zubova N. Nonlinear regimes of the Soret-induced convection of ternary fluid in a square porous cavity // *Transp. Porous Med.* — 2019. — Vol. 127. — P. 559–572.
- 67) Zubova N.A., Lyubimova T.P. Convection of ternary mixture in anisotropic porous medium // *AIP Conf. Proc.* — 2021. — Vol. 2371. — Art. 050013.
- 68) McKibbin R., O’Sullivan M.J. Onset of convection in a layered porous medium heated from below // *J. Fluid Mech.* — 1980. — Vol. 96. — P. 375–393.
- 69) McKibbin R., O’Sullivan M.J. Heat transfer in a layered porous medium heated from below // *J. Fluid Mech.* — 1981. — Vol. 111. — P. 141–173.

- 70) Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // Прикладная механика и техническая физика. — 1975. — Т. 16, № 2. — С. 131–137.
- 71) Кантур О.Ю., Цибулин В.Г. Численное исследование конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде // Деп. ВИНТИ. — 2003. — № 6-В2003. — 18 с.
- 72) Кантур О.Ю., Цибулин В.Г. Численное исследование плоской задачи конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. — 2004. — № 3. — С. 123–134.
- 73) Немцев А.Д., Цибулин В.Г. Численный метод исследования конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде // Вестник ЮНЦ. — 2009. — Т. 5, № 4. — С. 23–26.
- 74) Селищев А.А., Цибулин В.Г. Разностная схема повышенного порядка для анализа фильтрационной конвекции // ТВИМ. — 2023. — № 4. — С. 92–102.
- 75) Коханов П.В., Цибулин В.Г. Численная схема в полярных координатах для анализа конвекции в пористой среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2023. — Т. 20, № 4. — С. 37–44.
- 76) Селищев А.А., Цибулин В.Г. Компактная разностная схема для анизотропной задачи конвекции Дарси // Компьютерные исследования и моделирование. — 2025. — Т. 17, № 2. — С. 199–211.
- 77) Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. — № 5. — С. 51–55.
- 78) Kozlov V., Rysin K., Vjatkin A. Vibroconvective stability of liquid in horizontal plane layer subject to circular translational vibrations // Microgravity Sci. Technol. — 2019. — Vol. 31. — P. 759–765.

- 79) Гершуни Г.З., Любимов Д.В. Тепловая конвекция в переменном поле сил тяжести. — М. : Физматлит, 1996. — 320 с.
- 80) Razi Y.P., Mojtabi A., Charrier-Mojtabi M.C. A summary of new predictive high frequency thermo-vibrational models in porous media // *Transp. Porous Med.* — 2009. — Vol. 77. — P. 207–228.
- 81) Lyubimova T. High-frequency vibration effect on the stability of a horizontal layer of ternary fluid // *Eur. Phys. J. E.* — 2015. — Vol. 38, № 5. — Art. 128.
- 82) Kolchanova E.A., Kolchanov N.V. The interaction of thermal vibrational and thermal gravitational mechanisms of convection onset in a fluid-porous layer // *Microgravity Sci. Technol.* — 2021. — Vol. 33. — Art. 44.
- 83) Kolchanova E., Kolchanov N. The effect of translational vibration with different direction on thermosolutal convection onset in a superposed fluid and porous layers under gravity // *Microgravity Sci. Technol.* — 2022. — Vol. 34. — Art. 40.
- 84) Mutschler D., Mojtabi A. Theoretical and numerical analysis of Soret-driven convection in a horizontal porous layer saturated by an n-component mixture: Application to ternary hydrocarbon mixture tetralin, isobutyl benzene, n-dodecane with mass fractions 0.8–0.1–0.1 // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 2020. — Vol. 162. — Art. 120339.
- 85) Blanco P., Bou-Ali M.M., Platten J.K., de Mezquia D.A., Madariaga J.A., Santamaría C. Thermodiffusion coefficients of binary and ternary hydrocarbon mixtures // *J. Chem. Phys.* — 2010. — Vol. 132, № 11. — Art. 114506.
- 86) Königer A., Wunderlich H., Köhler W. Measurement of diffusion and thermal diffusion in ternary fluid mixtures using a two-color optical beam deflection technique // *J. Chem. Phys.* — 2010. — Vol. 132. — P. 174506.
- 87) Любимов Д.В., Любимова Т.П., Муратов И.Д., Шишкина Е.А. Влияние вибраций на возникновение конвекции в системе горизонтального слоя чистой

жидкости и слоя пористой среды, насыщенной жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. — 2008. — № 5. — С. 132–143.

88) Зеньковская С.М., Роговенко Т.Н. Фильтрационная конвекция в высокочастотном вибрационном поле // Прикладная механика и техническая физика. — 1999. — Т. 40, № 3. — С. 22–29.

89) Carman P.C. Fluid flow through granular beds // Trans. Inst. Chem. Eng. — 1937. — Vol. 15. — P. 150–166.

90) Гершуни Г.З., Любимов Д.В. Тепловая вибрационная конвекция. — М.: Наука, 2000. — 358 с.

91) Deardorff J.W. A laboratory study of the convection in a tilted rectangular box // J. Fluid Mech. — 1964. — Vol. 18, № 2. — P. 265–288.

92) Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Об устойчивости конвективного движения жидкости в наклонном слое // Прикл. мат. и мех. — 1969. — Т. 33, № 5. — С. 855–860.

93) Hart J.E. Stability of the flow in a tilted trap // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 47, № 3. — P. 547–576.

94) Clever R.M., Busse F.H. Instabilities of longitudinal convection rolls in an inclined layer // J. Fluid Mech. — 1977. — Vol. 81, № 1. — P. 107–127.

95) Matta A. Thermal convection in an inclined porous layer with effect of heat source // Num. Heat Trans. Fluid Flow. — 2019. — 1st ed. — P. 47–54.

96) Arora M., Singh J., Bajaj R. Nonlinear stability of natural convection in an inclined fluid layer // Int. J. Appl. Comput. Math. — 2020. — Vol. 6. — Art. 21.

97) Bendrichi G., Shemilt L.W. Mass transfer in horizontal flow channels with thermal gradients // Can. J. Chem. Eng. — 1997. — Vol. 75. — P. 1067–1074.

- 98) Chen X., Angui L. An experimental study on particle deposition above near-wall heat source // *Build. Environ.* — 2014. — Vol. 81. — P. 139–149.
- 99) Weber J.E. Thermal convection in a tilted porous layer // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1975. — Vol. 18. — P. 474–475.
- 100) Bories S., Combarous M. Natural convection in a sloping porous layer // *J. Fluid Mech.* — 1973. — Vol. 57. — P. 63–79.
- 101) Palm E. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection // *J. Fluid Mech.* — 1960. — Vol. 8. — Art. 183.
- 102) Busse F.H. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle // *J. Fluid Mech.* — 1967. — Vol. 30. — Art. 625.
- 103) Krishnamurti R. Finite amplitude convection with changing mean temperature. Part 1. Theory // *J. Fluid Mech.* — 1968. — Vol. 33. — Art. 457.
- 104) Caltagirone J.P., Bories S. Solutions and stability criteria of natural convective flow in an inclined porous layer // *J. Fluid Mech.* — 1985. — Vol. 155. — P. 267–287.
- 105) Falsaperla P., Mulone G. Thermal convection in an inclined porous layer with Brinkman law // *Ric. Mat.* — 2018. — Vol. 67, № 1–2. — Art. 983.
- 106) Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Иоршина С.М. О конвективной неустойчивости равновесия наклонного слоя жидкости относительно пространственных возмущений // *ПММ.* — 1978. — Т. 42, вып. 2. — С. 296–300.
- 107) Путин Г.Ф., Старикова Т.Е. Конвективная устойчивость равновесия плоского наклонного слоя жидкости // *Гидродинамика.* — Вып. 6. — Пермь : Изд-во Пермск. ун-та, 1975.
- 108) Колесников А.К., Любимов Д.В. О конвективной неустойчивости жидкости в наклонном слое пористой среды // *ПМТФ.* — 1973. — № 3. — С. 127–131.

- 109) Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. — 1975. — № 2. — С. 131–137.
- 110) Billings M.P. Structural geology. — Englewood Cliffs (NJ) : Prentice-Hall Inc., 1972. — 606 p.
- 111) Михайлов А.Е. Структурная геология и геологическое картирование. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Недра, 1984. — 464 с.
- 112) Платов Н.А. Основы инженерной геологии : учебник. — 5-е изд., доп. — Москва : ИНФРА-М, 2026. — 190 с.
- 113) Szulczewski M., Hesse M., Juanes R. Carbon dioxide dissolution in structural and stratigraphic traps // J. Fluid Mech. — 2013. — Vol. 736. — P. 287–315.
- 114) Simmons C., Bauer-Gottwein P., Graf T., Kinzelbach W., Kooi H., Li L., Werner A. Variable density groundwater flow: From modelling to applications // Groundwater Modelling in Arid and Semi-Arid Areas / eds. H. Wheater, S. Mathias, X. Li. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — P. 87–118.
- 115) Baghooee H., Montel F., Galliero G., Yan W., Shapiro A. A new approach to thermal segregation in petroleum reservoirs: Algorithm and case studies // J. Petrol. Sci. Eng. — 2021. — Vol. 201. — Art. 108367.
- 116) Parameswari K., Mudgal B.V. Assessment of contaminant migration in an unconfined aquifer around an open dumping yard: Perungudi a case study // Environ. Earth Sci. — 2015. — Vol. 74, № 7. — P. 6111–6122.
- 117) Hewitt D.R., Neufeld J.A., Lister J.R. High Rayleigh number convection in a porous medium containing a thin low-permeability layer // J. Fluid Mech. — 2014. — Vol. 756. — P. 844–869.
- 118) Zech A., Zehner B., Kolditz O., Attinger S. Impact of heterogeneous permeability distribution on the groundwater flow systems of a small sedimentary basin // J. Hydrol. — 2016. — Vol. 532. — P. 90–101.

- 119) Salibindla A.K.R., Subedi R., Shen V.C., Masuk A.U.M., Ni R. Dissolution-driven convection in a heterogeneous porous medium // *J. Fluid Mech.* — 2018. — Vol. 857. — P. 61–79.
- 120) Soboleva E. Density-driven convection in an inhomogeneous geothermal reservoir // *Int. J. Heat Mass Tran.* — 2018. — Vol. 127. — P. 784–798.
- 121) Зубова Н.А., Любимова Т.П. Нелинейные режимы конвекции трёхкомпонентной смеси в двухслойной пористой среде // *Вычисл. мех. сплош. сред.* — 2021. — Т. 14, № 1. — С. 110–121.
- 122) Kozeny J. Über kapillare Leitung des Wassers in Boden [On capillary flow of water in soil] // *Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien.* — 1927. — Bd. 136. — S. 271–306.
- 123) Herzig J.P., Leclerc D.M., Goff P.Le. Flow of suspensions through porous media — application to deep filtration // *Ind. Eng. Chem.* — 1970. — Vol. 62, № 5. — P. 8–35.
- 124) Chapuis R.P., Aubertin M. On the use of the Kozeny-Carman equation to predict the hydraulic conductivity of soils // *Can. Geotech. J.* — 2003. — Vol. 40, № 3. — P. 616–628.
- 125) Klimenko L.S., Maryshev B.S. Numerical simulation of microchannel blockage by the random walk method // *Chem. Eng. J.* — 2020. — Vol. 381. — Art. 122644.
- 126) Maryshev B.S., Klimenko L.S. Porous media cleaning by pulsating filtration flow // *Microgravity Sci. Technol.* — 2022. — Vol. 34. — Art. 5.
- 127) Nield D.A., Kuznetsov A.V. The onset of convection in an anisotropic heterogeneous porous medium: A new hydrodynamic boundary condition // *Transp. Porous Med.* — 2019. — Vol. 127. — P. 549–558.
- 128) Barvier E. Geothermal energy technology and current status: An overview // *Renew. Sustain. Energ. Rev.* — 2002. — Vol. 6. — P. 3–65.

- 129) Kocberber S., Collins R.E. Impact of reservoir heterogeneity on initial distributions of hydrocarbons // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — 1990. — P. 175–201.
- 130) Schmitt R.W. Double diffusion in oceanography // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1994. — Vol. 26. — P. 255–285.
- 131) Pedersen K.S., Hjermsstad H.P. Modeling of compositional variation with depth for five North Sea reservoirs // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — 2015.
- 132) Collell J., Galliero G., Vermorel R., Ungerer P., Yiannourakou M., Montel F., Pujol M. Transport of multicomponent hydrocarbon mixtures in shales organic matter by molecular simulations // J. Phys. Chem. C. — 2015. — Vol. 119, № 39. — P. 22587–2259.
- 133) Platten J.K., Costeseque P. The Soret coefficient in porous media // J. Porous Media. — 2004. — Vol. 7, № 4. — P. 317–330.
- 134) Yasnou V., Mialdun A., Melnikov D., Shevtsova V. Role of a layer of porous medium in the thermodiffusion dynamics of a liquid mixture // Int. J. Heat Mass Transfer. — 2019. — Vol. 143. — Art. 118480.
- 135) Алхасов А.Б. Возобновляемая энергетика. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Физматлит, 2012. — 256 с.
- 136) Forster S., Bobertz B., Bohling B. Permeability of sands in the coastal areas of the southern Baltic Sea: Mapping a grain-size related sediment property // Aquatic Geochemistry. — 2003. — Vol. 9. — P. 171–190.
- 137) Iscan A.G., Kok M.V. Porosity and permeability determinations in sandstone and limestone rocks using thin section analysis approach // Energy Sources, Part A. — 2009. — Vol. 31. — P. 568–575.
- 138) Мельников Н.В., Ржевский В.В., Протодьяконов М.М. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. — Москва : Недра, 2009. — 279 с.

139) Добрынин В.М., Вендельштейн Б.Ю., Кожевников Д.А. Петрофизика (Физика горных пород). — Москва : Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2004. — 368 с.