

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

На правах рукописи



Окатыев Роман Сергеевич

**Генерация, перенос и диффузия неоднородностей  
в магнитогидродинамических течениях**

Специальность 1.1.9 —

«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Фрик Пётр Готлобович

Пермь — 2026

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	4
<b>ГЛАВА 1. МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД И СИСТЕМ</b> . . . . .	11
1.1 Устойчивость МГД-течений жидких металлов в каналах простой геометрии . . . . .	14
1.2 Пространственные неоднородности среды в технологических МГД-устройствах . . . . .	21
1.3 Пространственно-временные неоднородности в астрофизических МГД-системах . . . . .	27
1.4 Математическое моделирование МГД-систем . . . . .	38
1.5 Выводы по главе . . . . .	42
<b>ГЛАВА 2. ТЕЧЕНИЕ ГАРТМАНА ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВАХ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА</b> . . . . .	44
2.1 Математическая постановка задачи . . . . .	44
2.2 Стационарные профили скорости . . . . .	47
2.3 Линейный анализ устойчивости течения Гартмана при линейном распределении электропроводности жидкости . . . . .	53
2.3.1 Вывод системы уравнений спектрально-амплитудной задачи . . . . .	53
2.3.2 Методы решения спектрально-амплитудной задачи и определения критических параметров . . . . .	57
2.3.3 Неустойчивость гартмановского погранслоя . . . . .	59
2.3.4 Неустойчивость точки перегиба . . . . .	62
2.3.5 Сравнение критических параметров двух типов линейной неустойчивости . . . . .	67
2.4 Прямое численное моделирование развития неустойчивости точки перегиба в течении Гартмана с линейно распределенной электропроводностью . . . . .	70
2.5 Выводы по главе . . . . .	76
<b>ГЛАВА 3. ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ В МГД-УСТРОЙСТВАХ</b> . . . . .	78

	Стр.	
3.1	Постановка задачи . . . . .	78
3.2	Перенос единичных возмущений простой формы . . . . .	80
3.3	Перенос возмущений в виде волновых пакетов . . . . .	84
3.4	Оценки влияния турбулентной диффузии . . . . .	86
3.5	Выводы по главе . . . . .	87
<b>ГЛАВА 4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СОЛНЕЧНОЙ</b>		
<b>АКТИВНОСТИ В ПРОСТЫХ МОДЕЛЯХ</b>		
<b>СОЛНЕЧНОГО ДИНАМО . . . . .</b>		<b>88</b>
4.1	Модель Паркера . . . . .	90
4.2	Маломодовая модификация модели Паркера . . . . .	94
4.2.1	Карта режимов 4-модовой модели Паркера . . . . .	96
4.2.2	Динамический хаос в 4-модовой модели Паркера . . . . .	98
4.3	Воспроизведение спектра солнечной активности с использованием простых моделей . . . . .	111
4.3.1	Модель Паркера PA . . . . .	112
4.3.2	Модель Паркера PB . . . . .	115
4.3.3	Модель Паркера PL4 . . . . .	116
4.4	Выводы по главе . . . . .	120
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .</b>		<b>121</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>		<b>123</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность и разработанность темы исследования**

Магнитная гидродинамика (МГД) исследует движения электропроводящих сред, взаимодействующих с электромагнитными полями. Ключевыми областями приложения МГД являются металлургия, непосредственно связанная с перемещениями и контролем больших объемов жидких металлов, и астрофизика, одной из важнейших задач которой является задача об обусловленной движениями проводящих сред (жидкометаллических планетарных ядер, плазменных недр звезд или межзвездной среды) генерации космических магнитных полей.

Практически все базовые задачи МГД сформулированы для однородных сред (то есть сред, свойства которых не зависят от координат и времени), так как даже в однородной постановке достаточно сложны и приводят к широкому спектру задач с важными для практических приложений результатами. Однако, подавляющее большинство сред в природных и технологических системах являются неоднородными. Это может быть структурная неоднородность, связанная с наличием частиц примеси или оксидов в расплавах жидких металлов. В технологических приложениях наличие неоднородности может быть как негативным фактором, например, в металлургии, где зачастую требуется достижение наиболее однородного состава сплава для улучшения свойств получаемых изделий, так и целью воздействия на металл, если требуется какую-либо примесь из расплава удалить. В связи с этим активно разрабатываются методы МГД-сепарации, то есть очистки среды от частиц примеси за счет действия электромагнитным полем, и методы МГД-перемешивания, суть которых заключается в бесконтактном создании течений жидких металлов электромагнитным полем с целью гомогенизации распределения примеси в расплаве. Сама среда при этом рассматривается как двухфазная.

Другой тип неоднородности связан с пространственно-временными вариациями характеристик среды (в первую очередь вязкости и электропроводности), причем речь может идти как о вариациях молекулярных свойств среды, так и о вариациях эффективных характеристик. К таковым относятся не только традиционные коэффициенты переноса, такие как турбулентная вязкость или турбулентная диффузия магнитного поля, но и характеристики мелкомас-

штабной турбулентности (энергия пульсаций, завихренность), наличие которых может быть необходимым условием для реализации некоторых методик контроля течения среды. Важнейшей для задач МГД-динамо характеристикой мелкомасштабной турбулентности является спиральность – мера зеркальной асимметрии течения. Было установлено, что наличие ненулевой спиральности наряду с дифференциальным вращением является ключевым фактором для генерации крупномасштабного магнитного поля звезды. Замкнутая схема генерации магнитного поля Солнца, основанная на взаимодействии этих двух механизмов, была впервые предложена Ю. Паркером. Модель Паркера представляет собой систему уравнений относительно двух составляющих магнитного поля звезды, которые усреднены по долготе и толщине конвективной оболочки, а единственным управляющим параметром является динамо-число, которое характеризует интенсивность обоих механизмов генерации. При определенных значениях управляющего параметра решениями уравнений Паркера являются волны магнитного поля, распространяющиеся от полюсов к экватору и соответствующие основному звездному циклу активности (для Солнца речь идет о наблюдаемом 11-летнем цикле). Однако наблюдаемая звездная активность не сводится к одному лишь основному циклу и содержит множественные вариации на различных временных масштабах. Несмотря на развитие современных, достаточно детальных моделей звездных динамо, основанных на полной системе уравнений МГД, представляется интересной задача о воспроизведении заполненного спектра активности в рамках физически понятной модели Паркера, которая до сих пор не утратила своей актуальности.

**Целью** диссертационной работы является выявление степени влияния неоднородности свойств проводящих сред на структуру и устойчивость МГД-течений и исследование динамики развитых турбулентных течений с неоднородностями, которые могут влиять как на результаты регистрации характеристик потока, так и на временную динамику (спектральные свойства) генерируемых МГД-системами полей.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Найти профили скорости для течения Гартмана в слое жидкости с линейно распределенной по высоте канала электропроводностью и исследовать линейную устойчивость полученных решений;

2. Определить границу влияния диффузии на точность измерения скорости течения методом лагранжевых меток;
3. Исследовать структуру области динамического хаоса в маломодовой модели Паркера в зависимости от динамо-числа;
4. Исследовать возможность воспроизведения наблюдаемого спектра солнечной активности в рамках моделей МГД-динамо паркеровского типа, в том числе за счет временной неоднородности свойств мелкомасштабной турбулентности.

**Научная новизна** работы состоит в том, что в ней впервые:

1. получены профили скорости течения вязкой проводящей жидкости с линейным поперек канала распределением электропроводности в плоском канале при наложенном перпендикулярно стенкам однородном магнитном поле;
2. исследована линейная устойчивость полученных профилей скорости и показано значительное по сравнению с результатами для классического течения Гартмана снижение порога устойчивости, связанное с развитием неустойчивости точки перегиба при больших градиентах электропроводности;
3. проведено систематическое исследование влияния диффузии на возникновение погрешности определения скорости методом лагранжевых меток;
4. предложена простая мера хаотичности режима колебаний динамической системы на основе анализа степени заполненности гистограммы времен возврата;
5. продемонстрирована возможность воспроизведения структуры спектра солнечной активности в рамках  $\alpha\omega$ -модели Паркера для солнечного динамо в узком диапазоне динамо-числа при учете механизма подавления спиральности мелкомасштабной турбулентности, допускающего смену знака спиральности при умеренном росте магнитного поля;
6. показано, что динамическая система, полученная в рамках модели Паркера, также дает реалистичный спектр генерируемого поля при случайных во времени флуктуациях параметра, связанного с мелкомасштабной спиральностью, либо при реализации динамического хаоса.

### **Теоретическая и практическая значимость:**

Результаты, полученные во второй главе, представляют фундаментальный интерес и закладывают основу для дальнейшего исследования МГД-течений гартмановского типа в случае неоднородных свойств жидкости. Также эти результаты могут быть использованы для оценки возможности возникновения неустойчивости течения жидких металлов в системах охлаждения энергетических установок вследствие локального искажения свойств рабочей жидкости.

Результаты третьей главы могут быть использованы при разработке методик измерения скорости и создании расходомеров для течений жидких металлов.

Результаты четвертой главы могут быть полезны для исследования параметрических пространств динамических систем, проявляющих хаотическое поведение. Результаты исследования спектров колебаний в рамках различных модификаций модели Паркера могут быть полезны для валидации более сложных моделей.

### **Методология и методы исследования.**

Численное решение уравнений МГД при исследовании устойчивости течения Гартмана жидкости с неоднородной электропроводностью, а также численное решение нелинейных уравнений Паркера выполнялись с использованием метода конечных разностей. Линейный анализ устойчивости течения Гартмана проводился спектральным методом с разложением по полиномам Чебышева. Анализ влияния диффузии на появление погрешности определения скорости осуществлялся полуаналитическим методом. Для построения спектров колебаний применялся метод Уэлша.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Линейно распределенная по высоте канала электропроводность приводит к искажению профиля скорости течения вязкой электропроводящей жидкости в однородном магнитном поле и появлению в нем точек перегиба.
2. Появление точек перегиба приводит к развитию нового для течения Гартмана типу неустойчивости. При значительных градиентах электропроводности порог линейной устойчивости оказывается на порядок ниже порога устойчивости гартмановского погранслоя.
3. Диффузионные эффекты могут приводить к систематическому завышению оценки скорости при использовании методов, основанных на

- регистрации лагранжевых меток. В развитых турбулентных течениях эти эффекты могут вносить существенный вклад из-за влияния турбулентной диффузии.
4. Оценка степени хаотичности режима колебаний динамической системы может быть получена на основе вычисления коэффициента заполнения гистограммы времен возврата. Предложенная мера позволяет эффективно разделить периодические и хаотические режимы.
  5. Маломодовая модификация модели динамо Паркера, содержащая по две моды тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля, демонстрирует хаотическое поведение в широкой области положительных значений динамо-числа. Степень хаотичности увеличивается с увеличением управляющего параметра, чередуясь с окнами периодичности.
  6. Спектр колебаний магнитного поля, качественно похожий на наблюдаемый спектр солнечной активности, может быть воспроизведен как в маломодовой модели в рамках динамического хаоса или стохастической вариации управляющего параметра, так и в исходной модели солнечного динамо Паркера при определенном механизме подавления спиральности.

**Достоверность** результатов обеспечивается использованием проверенных открытых программных кодов (Dedalus) и библиотек для обработки сигналов и решения обыкновенных дифференциальных уравнений (SciPy). Методы решения предварительно тестировались на классических задачах, имеющих известное решение. Для ряда задач получено хорошее соответствие результатов при использовании различных методов. Результаты расчетов хорошо соотносятся с результатами работ других авторов в предельных случаях.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах: International Symposium Non-Equilibrium Processes in Continuous Media, 16–18 сентября 2021, Пермь; The Fourth Russian Conference on Magnetohydrodynamics, 20–22 сентября 2021, Пермь; XXX Всероссийская школа конференция «Математическое моделирование в естественных науках», 6–9 октября 2021, Пермь; Всероссийская конференция молодых ученых-механиков, 4–14 сентября 2022, Сочи; XXXI Всероссийская школа-конференция «Математическое моделирование в естественных науках», 5–8 октября 2022, Пермь; XXIII Зимняя Школа по механике

сплошных сред, 13–17 февраля 2023, Пермь; XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 21–25 августа 2023, Санкт-Петербург; Школа «Современная гидродинамика 2023», 29–31 августа 2023, Черноголовка; XXXII Всероссийская конференция «Математическое моделирование в естественных науках», 4–7 октября 2023, Пермь; XIX конференция «Физика плазмы в Солнечной системе», 5–9 февраля 2024, Москва; Астрофизический семинар отдела теоретической физики ФИАН (рук. В.С. Бескин), 7 февраля 2023, Москва; 193 онлайн-семинар по солнечно-земной физике ИЗМИРАН (рук. Д.Д. Соколов), 4 апреля 2024, онлайн; The Fifth Russian Conference on Magnetohydrodynamics, 24–28 июня 2024, Пермь; Школа «Современная гидродинамика 2024», 28–30 августа 2024, Черноголовка; XXXIII Всероссийская конференция «Математическое моделирование в естественных науках», 2–4 октября 2024, Пермь; XXIV Зимняя Школа по механике сплошных сред, 24–28 февраля 2025, Пермь; X Всероссийская конференция с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения», 1–3 октября 2025, Пермь; Пермский гидродинамический семинар (рук. Т.П. Любимова), 31 октября 2025, Пермь.

Представленные исследования частично выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №22-19-20106), в рамках крупного научного проекта при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2024-535 от 23.04.2024).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 публикациях в журналах, являющихся рецензируемыми научными изданиями, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук [1–6] (входящие в перечень ВАК и/или индексируемые в Web of Science, Scopus).

**Личный вклад.** В работах [1; 2] все вычисления, обработка и визуализация результатов выполнены автором лично. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов и написание текста статьи проведены совместно с Д.Д. Соколовым и научным руководителем. В работе [3] все вычисления и визуализация результатов проведены автором. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов и написание текста статьи проведены совместно с И.В. Колесниченко и научным руководителем. В работе [4] все вычисления и визуализация результатов проведены автором. Постановка задачи, обсуждение

и интерпретация результатов и написание текста статьи проведены совместно с И.В. Колесниченко, Е. Гольбрайхом и научным руководителем. В работе [5] все вычисления, обработка и визуализация результатов проведены автором. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов и написание текста статьи проведены совместно научным руководителем. В работе [6] численное решение задачи устойчивости, обработка и визуализация результатов проведены автором лично. Прямое численное моделирование в работе [6] выполнено автором вместе с Д.С. Красновым. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов и написание текста статьи проведены совместно с О.Ю. Зикановым, Д.С. Красновым и научным руководителем.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 138 страниц, включая 52 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 180 наименований.

## ГЛАВА 1. МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД И СИСТЕМ

В магнитной гидродинамике (МГД) рассматриваются задачи о взаимодействии движущейся электропроводной среды и магнитного поля [7]. Типичными примерами проводящих сред являются жидкие металлы (характерная электропроводность  $\sigma \sim 10^6$  См/м [8–10]), расплавы солей ( $\sigma \sim 10^1 \div 10^2$  См/м [9]), растворы электролитов ( $\sigma \sim 10^0 \div 10^1$  См/м [11; 12]), плазма ( $\sigma \sim 10^0 \div 10^5$  См/м [13–15]).

Во многих задачах движущуюся сплошную среду можно считать вязкой и несжимаемой. При однородных свойствах среды система уравнений магнитной гидродинамики включает в себя уравнение движения (уравнение Навье-Стокса)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (1.1)$$

уравнение переноса магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{\mu \mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B}, \quad (1.2)$$

закон Ома, обобщенный на случай движущейся среды,

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.3)$$

а также условия несжимаемости среды и бездивергентности магнитного поля

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – скорость течения среды,  $\rho$  – плотность среды,  $p$  – давление,  $\nu$  – кинематическая (молекулярная) вязкость,  $\mathbf{B}$  – индукция магнитного поля,  $\mathbf{j}$  – плотность электрического тока,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды,  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума,  $\phi$  – электрический потенциал. Ключевой особенностью магнитогидродинамических течений является возможность генерации электрического тока за счет движения проводящей среды. Этот ток, в свою очередь, приводит к появлению дополнительного вклада в результирующее магнитное поле. В дальнейшем эту составляющую будем называть индуцированным магнитным полем, а изначальное магнитное поле – внешним.

Помимо классического числа Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}, \quad (1.5)$$

характеризующего отношение инерционных сил к вязким, в магнитной гидродинамике возникают дополнительные критерии подобия. Параметром, определяющим степень обратного влияния движения среды на магнитное поле, является магнитное число Рейнольдса

$$\text{Re}_m = \frac{UL}{\nu_m} = \mu\mu_0\sigma UL, \quad (1.6)$$

где  $U$  – характерная скорость течения среды,  $L$  – характерный масштаб,  $\nu_m = (\mu\mu_0\sigma)^{-1}$  – магнитная вязкость. При  $\text{Re}_m \ll 1$  второй член в уравнении (1.2) оказывается доминирующим и движение электропроводной среды не приводит к значительному изменению магнитного поля. Напротив, при  $\text{Re}_m \gg 1$  существенным оказывается первое слагаемое. В силу бездивергентности полей скорости и индукции магнитного поля это слагаемое совпадает с известной в дифференциальной геометрии производной Ли [16], которая характеризует изменение линий одного векторного поля (в рассматриваемом контексте  $\mathbf{B}$ ) вдоль линий другого векторного поля (в этом случае  $\mathbf{u}$ ). С физической точки зрения это соответствует тому, что движущаяся проводящая среда увлекает за собой магнитное поле. В пределе при  $\sigma \rightarrow \infty$  изменение магнитного поля определяется только движением среды, то есть магнитное поле оказывается «вмороженным» в среду [17]. Следствием вмороженности является сохранение магнитного потока, проходящего через любой замкнутый материальный (то есть состоящий из одних и тех же материальных частиц) контур. Это утверждение называется теоремой Альфвена [18] и по своей сути аналогично теореме Томсона о сохранении циркуляции скорости в гидродинамике идеальной жидкости [19].

Также магнитное число Рейнольдса можно рассматривать как отношение индукции магнитного поля  $\mathbf{b}$ , появление которого вызвано движением среды, к характерной величине индукции внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  [20]. При  $\text{Re}_m \ll 1$  индуцированное поле мало по сравнению с внешним. В таком случае отпадает необходимость решать уравнение переноса магнитного поля (1.2), индукцию магнитного поля можно считать заданной, а силу Лоренца, входящую в уравнение Навье-Стокса (1.1), определять как  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0$  [21]. При таких

допущениях говорят о том, что задача решается в безындукционном приближении [20]. Кроме того, магнитное число Рейнольдса можно воспринимать как отношение характерного времени диффузии магнитного поля  $\tau_m = L^2/\nu_m$  к характерному гидродинамическому времени  $\tau = L/U$ . В этом смысле предел малых значений магнитного числа Рейнольдса можно считать квазистатическим приближением [7].

Отношение магнитного числа Рейнольдса к гидродинамическому есть магнитное число Прандтля, которое по аналогии с гидродинамическим числом Прандтля также может быть выражено как отношение кинематической вязкости к магнитной

$$\text{Pr}_m = \frac{\text{Re}_m}{\text{Re}} = \frac{\nu}{\nu_m} = \mu\mu_0\sigma\nu. \quad (1.7)$$

Магнитное число Прандтля определяется исключительно физическими параметрами среды и наряду с магнитным числом Рейнольдса определяет возможность генерации магнитного поля за счет движения электропроводной среды [22].

Другим важным для МГД-задач безразмерным параметром является число Гартмана

$$\text{Ha} = BL\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}, \quad (1.8)$$

где  $B$  – характерное значение индукции магнитного поля. Квадрат числа Гартмана характеризует отношение электромагнитных сил к силам вязкости. При больших значениях  $\text{Ha}$  магнитное поле оказывает значительное влияние на течение среды, что приводит к существенному искажению поля скорости.

Некоторые другие критерии подобия можно получить, комбинируя  $\text{Re}$ ,  $\text{Re}_m$  и  $\text{Ha}$ . К примеру, отношение электромагнитных сил к силам инерции определяется числом Стюарта

$$\text{St} = \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} = \frac{\sigma B^2 L}{\rho U}. \quad (1.9)$$

Отношение числа Стюарта к магнитному числу Рейнольдса характеризует отношение энергии магнитного поля к кинетической энергии и называется числом Альфвена

$$\text{Al} = \frac{\text{St}}{\text{Re}_m} = \frac{B^2}{\mu\mu_0\rho U^2}. \quad (1.10)$$

Во многих технологических приложениях рассматриваются задачи, в которых движение среды возникает под действием наведенных (созданных извне) электрических токов. В таких случаях определяющим оказывается параметр нагрузки [23]

$$K = \frac{E}{UB}, \quad (1.11)$$

который характеризует отношение наведенных электрических токов  $\sigma E$  к токам, индуцированным движением среды. При  $K \gg 1$  можно пренебречь искажением полного электрического тока течением среды и считать ток и электромагнитную силу заданными. При моделировании технологических МГД-процессов это позволяет разделить этапы решения электродинамической и гидродинамической подзадач. Вместе с предположением о малости магнитного числа Рейнольдса такая система допущений называется электродинамическим приближением [24].

### 1.1 Устойчивость МГД-течений жидких металлов в каналах простой геометрии

Отправной точкой в истории магнитной гидродинамики можно считать работу Гартмана [25], в которой он впервые теоретически рассмотрел течение жидкого металла под действием электрического и магнитного полей. Гартман исследовал течение ртути в зазоре между полюсами электромагнита, которые были покрыты изоляцией. По краям течение ограничивалось двумя электродами, причем расстояние между ними полагалось много большим по сравнению с шириной зазора, так что влиянием боковых стенок можно было пренебречь. Гартман получил уравнение для определения стационарного профиля скорости при одномерном течении между параллельными непроводящими стенками под действием перпендикулярного однородного магнитного поля. В работах [26; 27] это уравнение было обобщено на случай стенок произвольной проводимости. Решение уравнения для стационарного профиля скорости имеет вид

$$U(z) = U_{\max} \left( \frac{\text{chNa} - \text{chNa}(z/h)}{\text{chNa} - 1} \right), \quad (1.12)$$

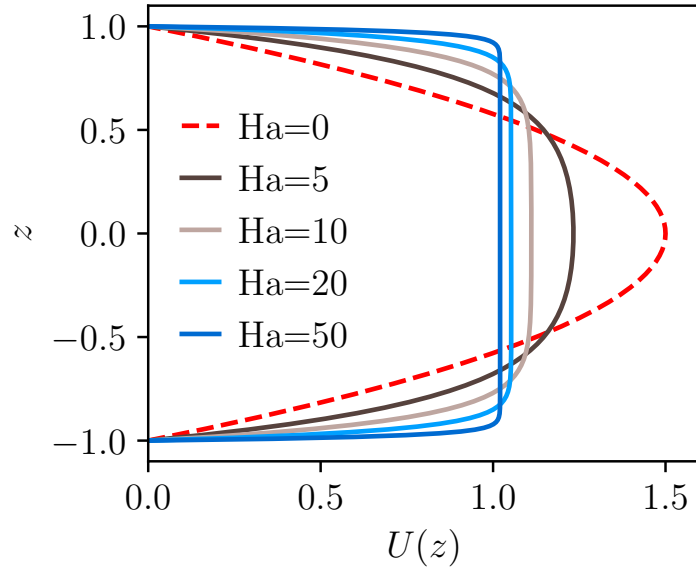


Рисунок 1.1 — Профили скорости течения Гартмана при различных значениях числа Гартмана. Красная пунктирная линия соответствует профилю скорости течения Пуазейля

где  $z$  — координата поперек слоя жидкости,  $2h$  — расстояние между стенками, а  $U_{\max}$  — максимальная скорость течения, которая определяется перепадом давления, свойствами жидкости и амплитудой магнитного поля. В безразмерном виде при нормировке скорости на постоянный расход решение для стационарного профиля определяется единственным параметром — числом Гартмана  $Ha$

$$U(z) = \frac{Ha}{Ha - thNa} \left( 1 - \frac{chNaz}{chNa} \right). \quad (1.13)$$

Важно отметить, что вид профиля скорости в безразмерном виде не зависит ни от числа Рейнольдса, ни от приложенного поперек течения электрического поля, ни от проводимости стенок. В отсутствие силы Лоренца  $Ha = 0$  и соответствующий профиль скорости совпадает с профилем скорости течения Пуазейля:

$$U(z)|_{Ha=0} = \frac{3}{2} (1 - z^2). \quad (1.14)$$

Профили скорости при различных значениях числа Гартмана представлены на рисунке 1.1. Можно заметить, что с увеличением  $Ha$  происходит уплощение профиля скорости. Это объясняется увеличением амплитуды силы Лоренца, которая всегда направлена против скорости и, следовательно, оказывает усиливающееся с ростом магнитного поля тормозящее действие на течение.

Следствием уплощения профиля скорости в ядре течения является то, что вязкие напряжения концентрируются в основном в пристеночных слоях,

толщина которых обратно пропорциональна числу Гартмана  $\delta_{\text{Ha}} = \text{Ha}^{-1}$ . Отсутствие напряжений в центре потока означает, что генерация возмущений и последующий переход к турбулентности должны происходить в погранслое.

Линейный анализ устойчивости течения Гартмана впервые был проведен Локком [28]. Он рассмотрел уравнение для двумерных нормальных возмущений без учета электромагнитной силы. Таким образом, отличие от классического уравнения Орра-Зоммерфельда заключалось лишь в профиле скорости. При малых числах Гартмана ( $\text{Ha} \leq 5$ ) Локк рассматривал гартмановский профиль скорости (1.13), а при больших ( $\text{Ha} > 5$ ) заменял его на асимптотический экспоненциальный профиль для пристеночного слоя

$$U(z) = 1 - \exp[-\text{Ha}(1+z)], \quad -1 \leq z < 0. \quad (1.15)$$

В результате было установлено, что критическое число Рейнольдса  $\text{Re}_{\text{cr}}$  значительно увеличивается с ростом  $\text{Ha}$ . При достаточно больших значениях числа Гартмана  $\text{Ha} > 20$  эта зависимость становится линейной:  $\text{Re}_{\text{cr}} = 50000\text{Ha}$ . Также линейно от числа Гартмана зависит критическое волновое число возмущений:  $\alpha_{\text{cr}} = 0.162\text{Ha}$ . Этот результат можно проинтерпретировать в терминах толщины погранслоя. Отношение числа Рейнольдса к числу Гартмана соответствует модифицированному числу Рейнольдса, определенному по толщине гартмановского погранслоя

$$\text{R} = \frac{\text{Re}}{\text{Ha}} = \frac{U\delta_{\text{Ha}}}{\nu}. \quad (1.16)$$

Тогда критическое модифицированное число Рейнольдса для линейной устойчивости течения Гартмана есть  $\text{R}_{\text{cr}} = 50000$ , а критическое волновое число, посчитанное в обратных толщинах погранслоя есть  $\tilde{\alpha}_{\text{cr}} = 0.162$ . Уточнение критических параметров линейной устойчивости гартмановского погранслоя было выполнено в работах Робертса [29], Такашимы [30], Лингвуда и Альбусьера [31]. Результаты этих вычислений сведены в таблице 1.

Многочисленные эксперименты показывают, что реальная граница устойчивости течения Гартмана оказывается на несколько порядков ниже:  $200 < \text{R}_{\text{cr}} < 400$  [20; 32]. Причиной появления этого субкритического перехода к турбулентности является немодальная (алгебраическая) неустойчивость [33]. Такая неустойчивость проявляется в том, что определенные возмущения, устойчивые в смысле линейной теории, могут усиливаться на несколько порядков и лишь

Таблица 1 — Критические параметры линейной устойчивости гартмановского погранслоя

Источник	$R_{cr}$	$\tilde{\alpha}_{cr}$
Lock (1955) [28]	50000	0.162
Roberts (1967) [29]	46250	0.159
Takashima (1996) [30]	48311	0.162
Lingwood & Alboussiere (1999) [31]	48250	$\approx 0.162$

потом переходить к стадии экспоненциального затухания [34]. Переход к турбулентности в таких течениях происходит на стадии первоначального роста возмущений.

Амплитуда усиления значительно зависит от начальных условий и отличается в зависимости от характеристик возмущений. Наиболее важными с точки зрения перехода к турбулентности являются оптимальные возмущения, которые усиливаются сильнее остальных. Мерой усиления может служить, например, отношение текущей энергии возмущений к их начальной энергии  $E(t)/E(0)$ . Если течение является линейно неустойчивым, то максимальное усиление стремится к бесконечности. Однако для многих течений даже в случае линейной неустойчивости наблюдается локальный максимум усиления, соответствующий алгебраическому росту, и последующие снижение усиления и экспоненциальный рост. Характерный вид зависимости усиления энергии возмущений от времени для устойчивого и неустойчивого течений приведен на рисунке 1.2.

Оптимальные возмущения для течения Гартмана представляют собой однородные вдоль потока вихревые структуры (валики) с длиной волны в поперечном направлении  $\lambda_y = 2\pi/Na$  [35; 36]. В работе [37] сценарий ламинарно-турбулентного перехода в течении Гартмана через алгебраический рост таких оптимальных возмущений был воспроизведен с использованием прямого численного моделирования (DNS). Было показано, что рост оптимальных возмущений приводит к появлению вытянутых вдоль потока структур (streaks) конечной амплитуды, которые существенно искажают профиль течения, в результате чего в нем появляются точки перегиба. Далее авторы рассмотрели устойчивость результирующего течения на стадии максимального роста оптимальных возмущений по отношению к трехмерному шуму правдоподобной амплитуды и выявили, что в диапазоне чисел Гартмана  $Na = 5 \div 20$  переход к турбулентно-

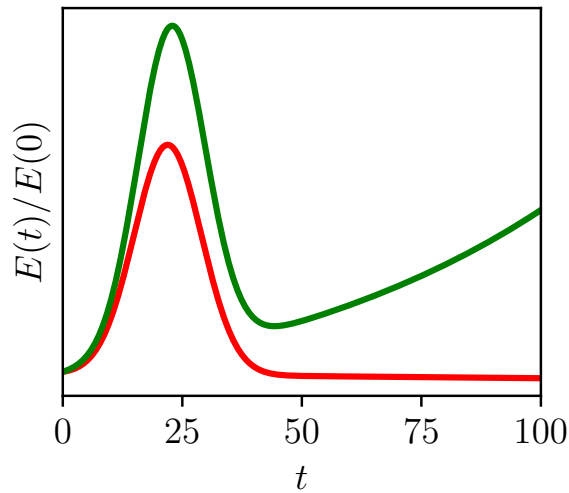


Рисунок 1.2 — Иллюстрация алгебраической неустойчивости. Красная кривая соответствует характерной зависимости усиления энергии возмущений от времени для устойчивых течений, зеленая — для неустойчивых

сти происходит при значении модифицированного числа Рейнольдса  $Re_{cr} \approx 400$ . Иллюстрация ламинарно-турбулентного перехода в течении Гартмана в рамках описанного сценария представлена на рисунке 1.3. Обобщение полученных результатов на случай больших значений числа Гартмана (до  $Ha = 50$ ) дало значение критического числа Рейнольдса  $Re_{cr} \approx 350$  [38]. Оба результата хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Зависимость критического числа Рейнольдса от числа Гартмана означает, что в сильных магнитных полях течения жидких металлов могут оставаться ламинарными даже при очень больших значениях  $Re$ . Например, в жидкометаллических элементах охлаждения токамаков ожидаемые значения числа Гартмана могут достигать  $Ha \approx 10^4$  [39; 40], что дает оценку для критического числа Рейнольдса  $Re_{cr} \approx 10^6$  и выше. Однако исследования течений жидкого металла в контексте возможности их использования в системах охлаждения термоядерных установок показали, что влияние магнитного поля не столь однозначно и в течениях с большими температурными градиентами возникают пульсации скорости и температуры, значительно превосходящие даже те, которые могли бы наблюдаться в отсутствие магнитного поля [41; 42]. К примеру, в случае опускного течения ртути в подогреваемом с одной стороны вертикальном канале колебания температуры при сильном нагреве подавляются только при  $Re/Ha = 2/25$  [43]. Это означает, что для ламинаризации течения магнитное поле должно быть на порядок сильнее, чем в отсутствие нагрева. Физический механизм, объясняющий появление таких магнитоконвективных

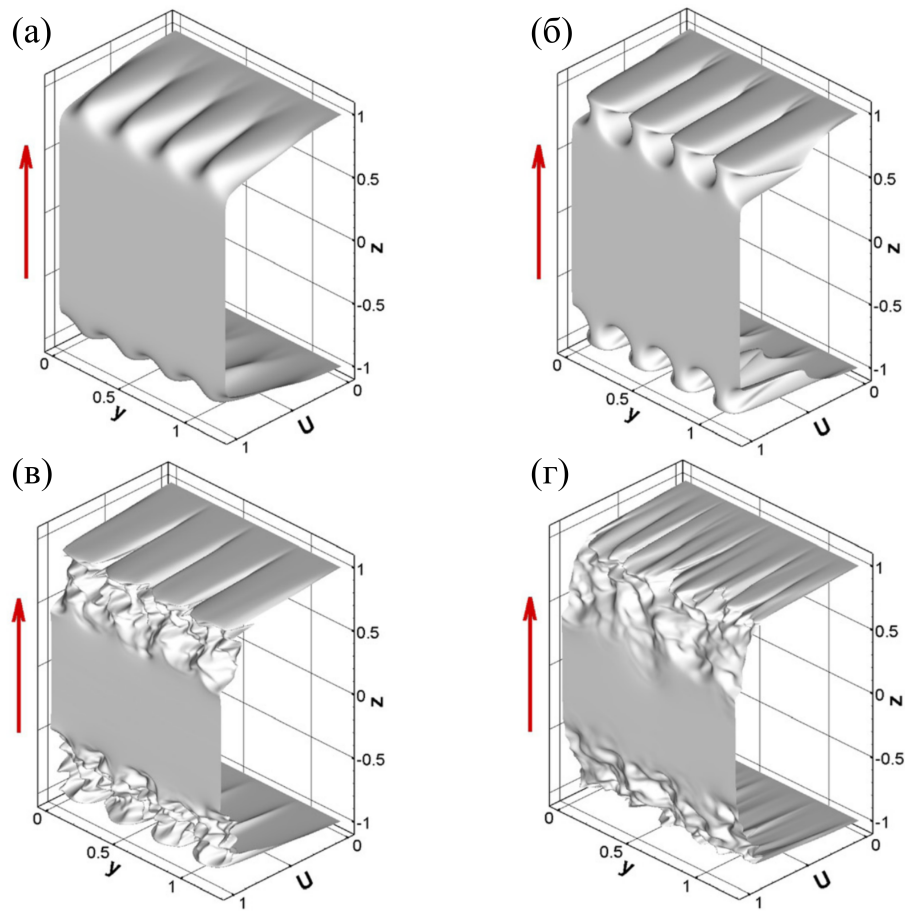


Рисунок 1.3 — Развитие алгебраической неустойчивости и переход к турбулентности в течении Гартмана [38]. (а) Оптимальные возмущения, наложенные на стационарный профиль скорости; (б) максимальный рост оптимальных возмущений, появление продольных структур и искажение профиля скорости; (в) неустойчивость продольных структур и их разрушение; (г) переход в состояние турбулентного течения. Красной стрелкой показано направление магнитного поля

пульсаций, заключается в трансформации профиля течения и появлении в нем точек перегиба в результате совместного действия электромагнитной силы и силы плавучести [44].

Как в случае алгебраической неустойчивости, так и в случае магнито-конвективных пульсаций развитие неустойчивости течения при докритических значениях параметров связано с появлением точек перегиба в профиле скорости. При этом в обоих случаях их появление связано со специальными условиями (определенный режим подогрева, возникновение возмущений определенной формы). Важно отметить, что само по себе наличие точек перегиба является лишь необходимым, но не достаточным условием для линейной неустойчивости течения [45].

Таблица 2 — Изменение физических свойств жидких металлов при изменении температуры на 20°C [50]

Металл	$T_0, ^\circ\text{C}$	$T_1, ^\circ\text{C}$	$\Delta\rho/\rho(T_0), \%$	$\Delta\nu/\nu(T_0), \%$	$\Delta\sigma/\sigma_0, \%$
Ртуть	20	40	-0.36	-6.25	-1.90
Галлий	40	60	-0.21	-1.59	-1.55
Свинец	380	400	-0.28	-3.63	-0.96
Натрий	100	120	-0.43	-8.85	-6.04

В отсутствие сил плавучести форма профиля скорости определяется балансом градиента давления, вязких сил и силы Лоренца. В свою очередь, пространственное распределение силы Лоренца определяется распределением электрического тока. Таким образом, еще одна возможность для возникновения точек перегиба связана с неоднородностью растекания тока. Такая ситуация имеет место, например, в течении электропроводящей жидкости в канале квадратного сечения, две стенки которого параллельны однородному магнитному полю и являются изолирующими, а две другие (перпендикулярные магнитному полю) – проводящими [46]. Профиль скорости такого течения представляет собой симметричные квазиплоские струи, возникающие вблизи непроводящих стенок. Такой профиль имеет точки перегиба и является линейно неустойчивым при умеренных значениях числа Гартмана как в случае идеально проводящих стенок [47], расположенных перпендикулярно направлению внешнего магнитного поля, так и в случае стенок конечной проводимости [48].

Другой пример модификации профиля скорости за счет неоднородности растекания тока представлен в работе [49]. Постановка задачи отличается от постановки для классического течения Гартмана тем, что горизонтальные стенки имеют идеально проводящую вставку конечной ширины, которая ориентирована вдоль направления течения. Вблизи проводящих секций скорость жидкости в ядре течения уменьшается, приводя к появлению локального минимума в поперечном (ортогональном направлению течения и ориентации магнитного поля) направлению. Далее была рассмотрена двумеризованная постановка задачи для профиля скорости, взятого в срединном по высоте сечении канала. Было показано, что профиль скорости имеет точки перегиба, в окрестности которых развивается неустойчивость в виде нестационарных вихревых структур.

Более интересной представляется ситуация, когда неоднородность растекания электрического тока связана с неоднородностью свойств самого жидкого

металла. Например известно, что вязкость и электропроводность жидких металлов существенно зависят от температуры [50]. Как видно из данных, представленных в таблице 2, вариации свойств могут достигать нескольких процентов при изменении температуры даже в довольно узком диапазоне. В технологических устройствах перепады температуры могут достигать нескольких сотен градусов. В такой ситуации разумно ожидать существенные пространственные неоднородности электропроводности и вязкости, которые в конечном итоге должны значительно влиять на профиль скорости течения и, как следствие, на устойчивость самих течений.

## **1.2 Пространственные неоднородности среды в технологических МГД-устройствах**

Процессы, описанные в предыдущем разделе, касаются ламинарно-турбулентного перехода в МГД-течениях. Однако зачастую течения, реализующиеся в технологических устройствах, оказываются турбулентными. Кроме того, почти всегда используемые в промышленности жидкие металлы на определенном уровне рассмотрения оказываются многофазными средами. Объемная доля твердых частиц, в качестве которых выступают оксиды, шлаки, кристаллиты и др., может составлять от долей процента до нескольких процентов [51]. Наличие таких структурных неоднородностей может приводить к локальной неоднородности свойств среды. Это обстоятельство зачастую воспринимается как негативный фактор, однако существует также ряд технологических процессов, в которых использование и управление распределением неоднородностей является ключевым аспектом. Важно также отметить, что неоднородности не обязательно должны быть материальными (в смысле частиц примеси) – в качестве них могут также выступать температурные пятна, локализованные вихревые структуры и т.д.

Глобально технологические МГД-устройства можно разделить на две группы по способу создания электромагнитной силы. В устройствах индукционного типа переменное магнитное поле создается некоторым внешним индуктором. Это магнитное поле порождает в объеме рабочей среды вихревые электрические токи, взаимодействие которых с магнитным полем индуктора

приводит к появлению объемной электромагнитной силы. В устройствах кондукционного типа электрический ток подводится к рабочему объему через контакты, а генерация электромагнитной силы осуществляется за счет взаимодействия растекающегося тока с собственным или внешним магнитными полями.

Одной из наиболее востребованных в плане технологических приложений является задача создания течений проводящих жидких сред, в роли которых чаще всего выступают расплавы жидких металлов, с целью их транспортировки. Задачи такого типа возникают в металлургии, где необходима транспортировка расплава к форме разлива, а также в атомной промышленности для создания течения рабочей жидкости в системах охлаждения. Высокая электропроводность жидких металлов позволяет создавать течения бесконтактным образом за счет генерации электромагнитной силы с помощью специальных устройств – МГД-насосов [52; 53]. Существенным преимуществом МГД-насосов перед классическими механическими является отсутствие движущихся частей, что в теории значительно повышает надежность таких устройств.

Помимо непосредственной генерации течения, важным для технологических процессов является также контроль характеристик создаваемых течений. В первую очередь это касается измерения расхода или, что по сути то же самое, скорости течения. Для оптически прозрачных сред разработано большое количество различных точечных и полевых методик, которые основаны на оптических и лазерных методах. Однако жидкие металлы являются оптически непрозрачными средами. Это приводит к тому, что измерение скорости их течения оптическими методами возможно лишь при наличии свободной поверхности. Использовать оптические методы для исследования течений жидких металлов в каналах и замкнутых объемах не представляется возможным. По этой причине измерение скорости осуществляется с использованием других способов. В силу высокой температуры и химической агрессивности жидких металлов наиболее подходящими являются конструкции расходомеров с жестким каналом и без движущихся частей. В этом случае оптимальными оказываются термопарные измерения, электромагнитные методы, а также методы, основанные на использовании эффекта Доплера.

Принцип работы ультразвуковых доплеровских анемометров основан на анализе изменения частоты звуковой волны вследствие эффекта Доплера [54; 55]. Ультразвуковые волны излучаются пьезоэлектрическим преобразователем,

после чего, распространяясь по жидкой среде, отражаются от неоднородностей, находящихся в жидкости. Отраженный сигнал далее регистрируется тем же преобразователем. По времени запаздывания между излученным и отраженным сигналами определяется пространственное положение частицы, а по доплеровскому частотному сдвигу определяется скорость течения в этой точке среды. Метод ультразвуковой доплеровской анемометрии является по сути единственной методикой, с помощью которой можно измерять пространственные профили скорости в жидких металлах. При этом важно отметить, что каждый датчик регистрирует профиль одной компоненты скорости, которая направлена вдоль ультразвукового луча. Соответственно, для измерения пространственного поля скорости необходима система из нескольких датчиков. Метод успешно применялся для определения профилей скорости в различных МГД-течениях [56–59]. Однако отмечается, что точность метода может существенно снижаться при исследовании развитых турбулентных течений и течений со значительными градиентами скорости [60]. Также требуется использование специальных методик для проведения измерений в жидких металлах при высоких температурах [61].

Широкое применение для измерения расхода течений жидких металлов получили методы, основанные на измерении температурных флуктуаций. В рамках таких методов температура измеряется в двух пространственных точках. В качестве датчиков используются различные типы термопреобразователей [62]. Для полученных температурных сигналов вычисляется корреляционная функция

$$C(\tau) = \int_{t_0}^{t_1} [f_1(t) - \langle f_1 \rangle] [f_2(t + \tau) - \langle f_2 \rangle] dt, \quad (1.17)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – сигналы с первого и второго датчиков соответственно,  $\tau$  – сдвиг по времени. Максимум этой функции соответствует среднему временному сдвигу между сигналами. Зная временной сдвиг и расстояние между точками измерения сигналов, можно определить скорость течения, а зная форму профиля скорости – полный расход. Важно отметить, что с использованием корреляционных методов определяется именно средняя скорость течения на масштабе, сопоставимом с расстоянием между датчиками. Описанный метод хорошо зарекомендовал себя при измерении расхода в контурах охлаждения ядерных реакторов с жидкометаллическим теплоносителем [63], устойчиво работает в

сильных магнитных полях [64] и активно используется в лабораторных исследованиях конвективных течений жидких металлов [44; 65]. В качестве недостатков метода можно указать внесение погруженных в поток датчиками дополнительных возмущений в течение. Также метод применим лишь при наличии выделенного направления течения.

Высокая электропроводность жидких металлов позволяет использовать электромагнитные методы измерения скорости. Общий принцип работы таких систем базируется на явлениях генерации электрических токов и искажении магнитного поля в движущейся проводящей среде. Отсутствие подвижных частей и погруженных в поток элементов является преимуществом электромагнитных систем измерения перед другими методиками.

Достаточно простой по своей идее является методика измерения скорости за счет измерения силы Лоренца, которая пропорциональна скорости течения среды, ее электропроводности и квадрату наложенного магнитного поля. По третьему закону Ньютона на электромагнитную систему, генерирующую магнитное поле, действует сила, равная по модулю индуцированной в жидкости силе Лоренца. Таким образом, измеряя силу, действующую на электромагнитную систему, можно оценить скорость течения проводящей среды [66]. Для реализации расходомеров подобного типа предложены конструкции в виде магнита на упругом подвесе и системы магнитов, закрепленных на вращающейся основе. В первом случае сила (и, как следствие, скорость) может быть оценена по отклонению магнита от положения равновесия, а во втором по круговой частоте вращения системы [67]. Оценки чувствительности подобных лоренцевских анемометров для различных вариантов течений могут быть выполнены с использованием прямого численного моделирования [68].

Кондукционные электромагнитные системы измерения расхода обычно представляют собой систему нескольких электродов, размещенных на стенках канала. Внешнее магнитное поле при этом может создаваться, к примеру, мощными постоянными магнитами, которые размещены таким образом, чтобы вектор магнитной индукции был направлен перпендикулярно направлению течения жидкости в канале. Взаимодействие электрического тока, генерируемого течением проводящей жидкости, и внешнего магнитного поля приводит к появлению ЭДС, которая может быть измерена с использованием пары размещенных на стенках канала электродов. Точность измерений может быть повышена путем увеличения количества электродов [69]. С использованием

кондукционных методик также возможно проведение локальных измерений скорости [70]. Недостатками кондукционных расходомеров являются необходимость обеспечения надежного электрического контакта между электродом и проводящей жидкостью и необходимость выполнения калибровки расходомера. Последнее связано с тем, что метод не является абсолютным – скорость течения определяется по косвенным измерениям ЭДС.

Индукционные методики измерения скорости во многом лишены этих недостатков. Принцип работы индукционных расходомеров основывается на искажении магнитного поля движущейся проводящей средой. Наиболее простая схема индукционного расходомера представляет собой две катушки, которые надеты на канал с проводящей жидкостью. Первая катушка создает возмущение в течении, которое далее регистрируется на второй катушке по возмущению магнитного поля [71]. Такая система не требует обеспечения непосредственного контакта с жидкостью, однако все еще требует калибровки. Однако необходимость калибровки может быть исключена модификацией индукционной системы, в которой используются три катушки – одна генерирующая и две измерительные [72]. Расходомер, основанный на такой системе, работает по принципу, схожему с корреляционным – на измерительных катушках регистрируются два временных сигнала по мере прохождения через них возмущений течения.

Таким образом, многие из рассмотренных методов измерения расхода сводятся к измерению времени перемещения потоком жидкости какого-либо трассера между двумя датчиками. Природа самих трассеров может при этом быть произвольной. По сути речь идет о регистрации перемещения лагранжевой частицы, которая помечена тем или иным образом. Методы, основанные на этих принципах, являются абсолютными и калибровка для них требуется только для преобразования средней скорости в расход.

Необходимым условием для корректной работы таких систем является принципиальная возможность регистрации трассеров. При больших значениях коэффициентов диффузии соответствующих величин (импульса, магнитного поля, концентрации примеси, температуры) существует риск потери интенсивности лагранжевой метки во время ее движения до измерительных систем. Эта вопрос оказывается особенно важным при проведении исследований конвективных течений, в которых скорости крупномасштабных движений оказываются весьма малы по сравнению с характерными скоростями течений в каналах. При

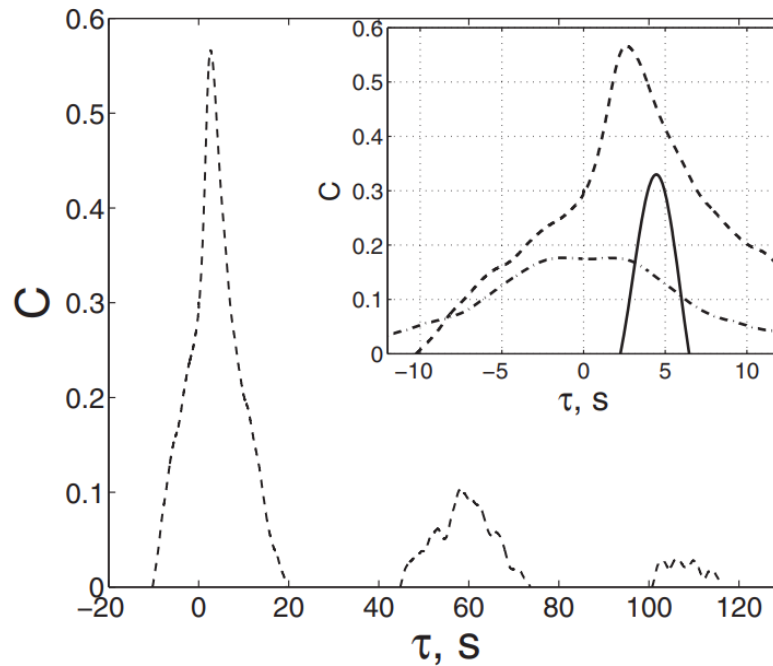


Рисунок 1.4 — Корреляционная функция сигналов температурных флуктуаций с двух термопар, полученная в эксперименте по конвекции жидкого натрия в наклонном цилиндре [73]. Термопары расположены в середине цилиндра по высоте. Первый локальный максимум соответствует временному сдвигу между двумя термопарами. Максимум вблизи  $\tau \approx 55$  с соответствует времени оборота крупномасштабной циркуляции, максимум вблизи  $\tau \approx 110$  с – времени второго оборота

определении скорости корреляционным методом с использованием температурных измерений определяющую роль играет гидродинамическое число Прандтля  $Pr = \nu/\chi$ , где  $\chi$  – температуропроводность жидкости. При больших значениях  $Pr$  локализованные температурные возмущения являются долгоживущими и могут быть надежно измерены. Такая ситуация имеет место в частности для магнитных жидкостей на основе органических носителей  $Pr \sim 10^1 \div 10^2$  В случае жидких металлов числа Прандтля оказываются существенно меньше  $Pr \sim 10^{-2}$ . Это означает, что температурные возмущения в жидких металлах должны исчезать достаточно быстро. Тем не менее, экспериментальные исследования показывают [73], что даже в этом случае некоторые возмущения могут выживать достаточно долго (до нескольких времен оборота крупномасштабной циркуляции), чтобы быть надежно зарегистрированными (см. рисунок 1.4).

### 1.3 Пространственно-временные неоднородности в астрофизических МГД-системах

Описанные в предыдущих подразделах задачи соответствуют двум областям предельных значений управляющих параметров. При исследовании ламинарно-турбулентных переходов в канальных течениях во внешних магнитных полях зачастую рассматриваются большие значения гидродинамического числа Рейнольдса  $Re$ . В технологических МГД-процессах помимо числа Рейнольдса большим является параметр нагрузки  $K$ , характеризующий отношение наведенных токов к индуцированным. При этом в обоих случаях предполагается, что магнитное число Рейнольдса  $Re_m$  мало, что позволяет не рассматривать процессы, связанные с искажением внешнего магнитного поля, вызываемое движением электропроводящей среды. Переход к пределу больших значений магнитного числа Рейнольдса  $Re_m$  (вместе с большими значениями гидродинамического числа Рейнольдса  $Re$ ) открывает обширный класс задач, связанных с исследованием генерации и поведения магнитных полей астрофизических объектов.

Магнитные поля существуют практически повсюду во Вселенной и играют определяющую роль в образовании и эволюции астрофизических структур [15; 74]. Они наблюдаются как у относительно небольших объектов – планет и звезд, так и у более масштабных – галактик и галактических кластеров [75]. Важно отметить, что характерные масштабы таких магнитных полей сопоставимы с масштабами самих объектов.

Исторически первым примером магнитного поля астрофизического объекта, с которым познакомилось человечество, является магнитное поле Земли. Кроме того, это единственный пример космического магнетизма, доступный для наблюдения невооруженным глазом. Так, визуализацией магнитного поля Земли является полярное сияние [76]. Первые систематические исследования поведения магнитной стрелки компаса в зависимости от географического положения и ориентации в пространстве, связанные в первую очередь с задачами навигации, относятся к началу XVI века [77]. Позже в 1834 г. Гаусс теоретически описал зависимость величины и направления напряженности магнитного поля Земли в каждой точке земной поверхности. Тем не менее, долгое время вопрос о происхождении магнитного поля Земли не стоял. Предполагалось, что

оно является постоянным и имеет ферромагнитную природу. С развитием знаний человечества о строении Земли стало понятно, что источники магнитного поля скорее всего находятся в ядре планеты. Жидкое внешнее ядро Земли состоит из железа и никеля и имеет температуру несколько тысяч градусов [78]. Эта температура существенно превышает температуру Кюри, при которой у металлов пропадают ферромагнитные свойства.

Впервые вопрос о происхождении магнитного поля космического объекта возник в начале XX века. В 1908 году Хэйл обнаружил и измерил магнитное поле Солнца [79]. Первая правдоподобная гипотеза о природе этого явления была высказана Лармором в 1919 году в статье под названием «How could a rotating body such as the Sun become a magnet?» («Каким образом вращающееся тело вроде Солнца может стать магнитом?») [80]. Ключевая идея Лармора заключалась в том, что электромагнитная индукция является единственной возможностью объяснить магнитное поле Солнца, не прибегая к гипотезам о каких-либо новых взаимодействиях. Согласно Лармору, электропроводная жидкость во вращающемся теле может генерировать электрические токи за счет протекания через магнитное поле, причем индуцированные токи будут поддерживать исходное магнитное поле.

Недостатком идеи Лармора является тот факт, что индуцированное поле всегда направлено против поля, его вызывающего, что мешает осуществлению эффекта динамо. Для разрешения проблемы можно рассмотреть систему, в которой индукция возникает в двух связанных подсистемах таким образом, что первая индуцирует поле во второй, а вторая – в первой [81]. Это приводит к осуществлению положительной обратной связи и возможности существования неустойчивости в системе. Именно такая реализация положительной обратной связи используется в простой маломодовой модели двухдискового динамо Рикитакэ [82].

Поведение магнитных полей астрофизических объектов может быть разнообразным. К примеру, поле в разреженной межзвездной среде является квазистационарным. Известным фактом является то, что магнитное поле Земли в ходе геологической истории многократно меняло свое направление на приблизительно противоположное хаотическим образом [83; 84].

К числу широко известных наблюдаемых явлений относится переменная периодическая солнечная активность. В частности, она проявляется в существовании 11-летнего цикла Швабе и векового цикла Гляйсберга [15]. Структура

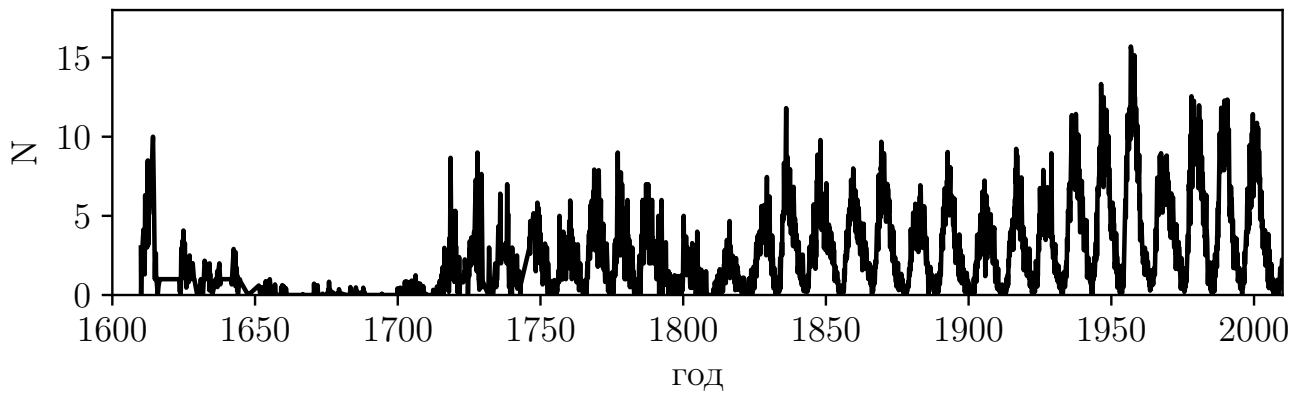


Рисунок 1.5 — Среднемесячное число наблюдаемых групп солнечных пятен  $N$ . Данные приведены с 1610 по 2010 годы [85]

солнечной активности может быть определена по различным трассерам, которые в некоторой степени характеризуют интенсивность магнитного поля Солнца. Классическим примером таких трассеров являются солнечные пятна, регулярные наблюдения за которыми ведутся с начала XVII века. Иллюстрация солнечной активности на примере изменения среднемесячного числа групп солнечных пятен представлена на рисунке 1.5.

Циклы магнитной активности известны также и для других звезд [86; 87]. Задача выявления закономерностей поведения магнитных полей астрофизических объектов является важной для человечества. Магнитные поля играют важную роль в создании ионосферы и не позволяют потокам солнечного ветра достигать поверхности Земли. В момент инверсии полярности напряженность магнитного поля Земли существенно снижается, что приводит к ослабеванию защитного экрана. Некоторые исследования связывают инверсию магнитного поля с эпизодами массовых вымираний [88].

Теория, объясняющая происхождение и эволюцию космических магнитных полей, базируется на магнитной гидродинамике и называется теорией динамо. Теория динамо описывает процесс генерации магнитного поля как результат взаимодействия движущейся электропроводящей среды с самим этим полем. Для генерации поля необходимо, чтобы индукционные эффекты подавляли диссипативные, которые в первую очередь связаны с омическими потерями. Это утверждение по сути и выражает условие  $Re_m \gg 1$ .

Одной из ключевых особенностей эффекта динамо является критический характер этого явления. Динамо может существовать только по достижении некоторого критического значения магнитного числа Рейнольдса. Оно связано с гидродинамическим числом Рейнольдса, определяющим режим течения, через

магнитное число Прандтля

$$\text{Re}_m = \text{RePr}_m \quad (1.18)$$

В космических объектах заведомо закритические значения управляющего параметра обеспечиваются огромными размерами самих объектов и высокими скоростями течения в них. В лабораторных условиях же приходится работать с металлами, для которых характерны очень малые магнитные числа Прандтля  $\text{Pr}_m \lesssim 10^{-5}$ . По этой причине достичь критических значений магнитного числа Рейнольдса можно только в течениях, которые заведомо являются турбулентными и характеризуются значениями гидродинамического числа Рейнольдса  $\text{Re} \gtrsim 10^5$ .

Ключевой особенностью эффекта динамо также является то, что самовозбуждение поля возможно только при особых видах симметрии движения среды. Наглядные схемы, допускающие усиление магнитного поля в проводящих жидкостях, были предложены Я. Б. Зельдовичем [89] и Х. Альфвенем. В схеме Зельдовича (см. рисунок 1.6(а)) магнитная петля, находящаяся в некоторой плоскости, растягивается вдвое несжимаемым течением среды. При таком процессе напряженность магнитного поля возрастает в два раза, площадь поперечного течения уменьшается в два раза, а магнитный поток сохраняется. Далее характер течения изменяется – оно перестает растягивать петлю, а вместо этого выводит ее из плоскости и закручивает, образуя восьмерку. После этого две половины восьмерки накладываются друг на друга. Очевидно, в этом случае магнитный поток через площадку, пересекающую обе половины восьмерки, удваивается. Многократное повторение такой процедуры приводит к экспоненциальному росту магнитного поля. Стоит отметить, что магнитная диффузия, которая пропорциональна сопротивлению среды, в этой схеме нужна лишь для того, чтобы сгладить особенность поля в том месте, где происходит перекручивание петли. В схеме Альфвена (рисунок 1.6(б)) магнитная петля растягивается и изгибается посередине таким образом, что два ее удаленных участка приближаются друг к другу. Далее происходит перезамыкание и исходная петля распадается на две, которые накладываются друг на друга и, таким образом, происходит удвоение магнитного потока.

Зависимость от наличия магнитной диффузии позволяет разделить динамо на быстрые и медленные. Для медленных динамо наличие диффузии является необходимым условием для реализации процесса для перезамыкания

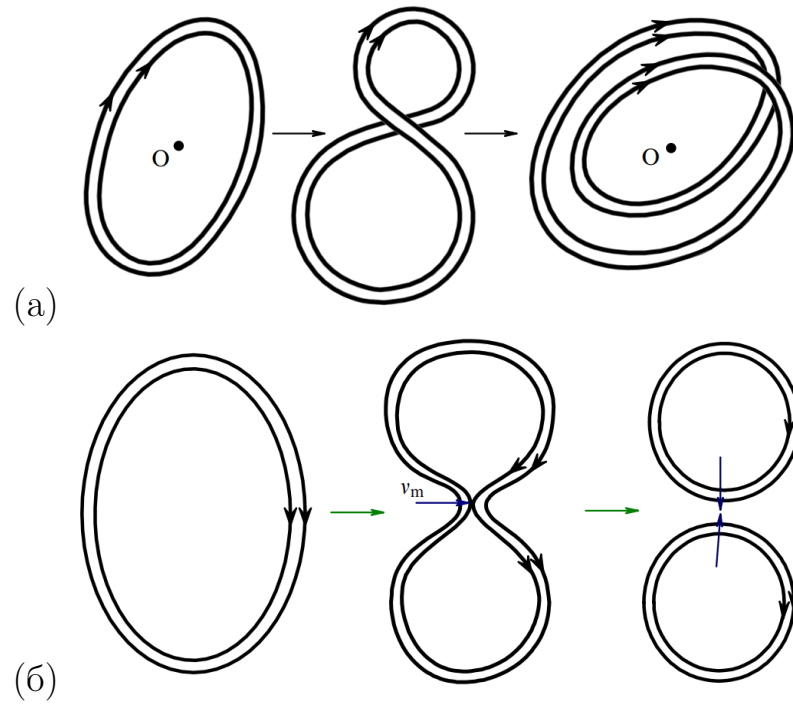


Рисунок 1.6 — Схематическая иллюстрация динамо-процессов Зельдовича (а) и Альфвена (б) [81]

силовых линий [90]. Рост магнитного поля в таких динамо обычно происходит на больших временах, а скорость роста стремится к нулю с ростом магнитного числа Рейнольдса. Быстрые динамо напротив не критичны к величине магнитной диффузии, хотя и требуют для реализации роста поля наличие хотя бы малой диффузии. Скорость роста магнитного поля в случае быстрых динамо является конечной и не зависит от магнитного числа Рейнольдса при  $Re_m \rightarrow \infty$ . В этом смысле схема Зельдовича является примером быстрого динамо, а схема Альфвена – примером медленного динамо. Важно также отметить, что необходимым для реализации процесса быстрого динамо является условие существования лагранжева хаоса, который заключается в экспоненциальном расхождении траекторий изначально близких лагранжевых частиц среды. В случае наличия анизотропии электрических свойств среды и при наличии тангенциального разрыва скорости, возможен так же так называемый «яростный» (furious) режим динамо, проявлением которого является неограниченная скорость роста магнитного поля с ростом магнитного числа Рейнольдса [91].

Приведенные примеры динамо-процессов наглядно иллюстрируют тот факт, что для их реализации необходимо наличие достаточно сложного течения. Строго математически был доказан ряд теорем, говорящих о том, какие конфигурации полей не могут способствовать эффекту динамо. Так, Каулинг

показал, что азимутально симметричные течения не могут создать симметричное магнитное поле [92]. Брагинским было доказано, что любое магнитное поле, симметричное относительно некоторой оси, будет затухать, если поле скорости соленоидально [93]. Анти-динамо теорема Зельдовича утверждает, что поле скорости, линии тока которого расположены на системе параллельных плоскостей, не может генерировать эффект динамо [94]. Таким образом, эффект динамо обладает принципиально трехмерным характером и для его воспроизведения необходимы существенно несимметричные конфигурации.

Последовательный математический аппарат для описания крупномасштабного динамо в турбулентной среде был предложен в работе Штеенбека, Краузе и Рэдлера [95]. Ключевой идеей является аналогичное подходу Рейнольдса в гидродинамике разложение магнитного поля и поля скорости на среднюю (крупномасштабную) и флуктуационную (мелкомасштабную) составляющие

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}', \quad (1.19)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}'. \quad (1.20)$$

Использование такого разложения в частности позволяет провести некоторую классификацию динамо. В зависимости от того, какими составляющими определяется генерация магнитного поля и того, какая составляющая поля в итоге растет, традиционно выделяют три типа динамо – квазиламинарные, турбулентные и динамо среднего поля [81].

В квазиламинарных динамо генерация крупномасштабного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  полностью определяется средним полем скорости  $\mathbf{U}_0$ . Влияние мелкомасштабных составляющих при этом затрудняет генерацию среднего поля. Классическим примером динамо квазиламинарного типа является динамо Пономаренко [96]. Схема генерации магнитного поля в динамо Пономаренко основывается на закрученном движении проводящей среды в бесконечной проводящей среде. Такая постановка задачи допускает аналитическое исследование, в результате которого было значение критического магнитного числа Рейнольдса  $Re_{m,cr} = 17.7$ .

Другим типом динамо являются мелкомасштабные динамо, в рамках которых мелкомасштабное турбулентное поле скорости приводит к генерации мелкомасштабного магнитного поля. При этом важно отметить, что генерации среднего магнитного поля не происходит – вместо этого растет средняя энергия флуктуаций магнитного поля  $\langle \mathbf{b}'^2 \rangle$ , где угловыми скобками  $\langle \cdot \rangle$  обозначена

операция усреднения. Критическое магнитное число Рейнольдса для мелкомасштабного динамо существенно зависит от магнитного числа Прандтля [97]. При больших значениях магнитного числа Прандтля  $\text{Pr}_m > 1$  критическое магнитное число Рейнольдса слабо зависит от  $\text{Pr}_m$ . Однако при  $\text{Pr}_m < 1$  ситуация становится качественно иной. Результаты различных численных расчетов показывают, что критическое магнитное число Рейнольдса  $\text{Re}_{m,\text{cr}}$  резко возрастает с уменьшением  $\text{Pr}_m$ .

Одной из наиболее известных моделей мелкомасштабного динамо, которая допускает аналитическое исследование, является модель динамо Казанцева [98]. Модель Казанцева основывается на рассмотрении процесса динамо при заданной структуре поля мелкомасштабной скорости, которое предполагается случайной дельта-коррелированной во времени гауссовой случайной величиной. Стоит отметить, что аналогичная структура поля скорости была рассмотрена Крэйчнаном применительно к исследованию динамики пассивной примеси в турбулентном потоке [99]. Важнейшим результатом модели Казанцева является существование степенного закона распределения энергии флуктуаций магнитного поля по масштабам  $E_m \sim k^{3/2}$ , где  $k$  – волновое число. Модель также предсказывает пороговую генерацию магнитной энергии при превышении некоторого критического значения  $\text{Re}_{m,\text{cr}}$ . Результаты расчетов показывают, что критическое магнитное число Рейнольдса для динамо Казанцева варьируется в пределах  $\text{Re}_{m,\text{cr}} \approx 30 \div 110$  в зависимости от пространственной корреляции поля скорости [100–103].

Наиболее интересными с точки зрения приложений к описанию поведения астрофизических объектов представляются модели динамо среднего поля. В рамках таких моделей предполагается, что основной вклад в генерацию крупномасштабного магнитного поля вносят мелкомасштабные пульсации скорости. Влияние среднего течения может быть как существенным, как это имеет место для многих астрофизических объектов, так и незначительным.

Основное уравнение динамо среднего поля может быть получено из уравнения переноса магнитного поля (1.2) с учетом разложений (1.19), (1.20). Проводя процедуру усреднения по Рейнольдсу [13], получим

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}_0] + \nabla \times \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle + \nu_m \Delta \mathbf{B}_0. \quad (1.21)$$

Это уравнение называется уравнением Штеенбека-Краузе-Рэдлера. Второе слагаемое в правой части этого уравнения  $\boldsymbol{\epsilon} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$  соответствует средней

электродвижущей силе, вызванной флуктуациями поля скорости и магнитного поля.

Как и в случае применения подхода Рейнольдса в гидродинамике, попытка написать уравнение для ЭДС приводит к проблеме замыкания, которая связана с появлением в уравнениях для пульсаций слагаемых более высокого порядка по флуктуациям. По этой причине приходится использовать различные модельные соображения, выражающие ЭДС через крупномасштабные магнитное поле и поле скорости, а также через статистические характеристики флуктуаций. Полагая линейную зависимость ЭДС от  $\mathbf{V}_0$  и его первых пространственных производных, можно записать

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{V}_0 - \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{V}_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \mathbf{V}_0 - \boldsymbol{\delta} \times (\nabla \times \mathbf{V}_0) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa} : (\nabla \mathbf{V}_0 + \nabla \mathbf{V}_0^T), \quad (1.22)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}$  и  $\boldsymbol{\beta}$  – симметричные тензоры второго ранга,  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\boldsymbol{\delta}$  – векторы,  $\boldsymbol{\kappa}$  – тензор третьего ранга [104; 105], а двумя точками обозначена операция двойного скалярного произведения. В этом выражении все величины, обозначенные греческими буквами, зависят только от  $\mathbf{U}_0$  и  $\mathbf{u}'$  и их первых пространственных производных. Смысл слагаемого с  $\alpha$  соответствует  $\alpha$ -эффекту, который связан с нарушением зеркальной симметрии течения. Слагаемые с  $\beta$  и  $\delta$  описывают влияние турбулентной диффузии. Член  $\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{V}_0$  описывает эффект турбулентного диамагнетизма, который выражается в эффективном переносе крупномасштабного поля скорости за счет турбулентности [94]. Общий вид выражения (1.22) через составляющие поля скорости и его производные оказывается достаточно сложным и содержит большое количество слагаемых [81]. Однако оставляя в разложении для ЭДС только два слагаемых, связанных с  $\alpha$  и  $\beta$ , а также предполагая однородность и изотропию среды, можно получить наиболее широко используемое выражение для эффективной электродвижущей силы в виде

$$\boldsymbol{\epsilon} = \alpha_0 \mathbf{V}_0 + \beta_0 \nabla \times \mathbf{V}_0, \quad (1.23)$$

Здесь  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  – скалярные величины, определяемые соотношениями [106; 107]

$$\alpha_0 = -\frac{\tau_{\text{cor}}}{3} \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle, \quad \beta_0 = \nu_m + \frac{\tau_{\text{cor}}}{3} \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \rangle, \quad (1.24)$$

где  $\tau_{\text{cor}}$  – корреляционное время. Из представленного выражения видно, что  $\alpha$ -эффект определяется спиральностью течения, которая является характеристикой, определяющей степень зеркальной асимметрии течения.

Идея о том, что нарушение зеркальной симметрии течения может приводить к генерации магнитного поля была впервые высказана Паркером [108], который предложил первую работоспособную модель солнечного цикла. Паркер предложил разложить магнитное поле на тороидальную и полоидальную составляющие. Схема генерации крупномасштабного поля при этом оказывается следующей. Тороидальное магнитное поле генерируется из полоидального за счет дифференциального вращения в конвективной оболочке Солнца. Полоидальное же поле получается из тороидального за счет появления зеркальной асимметрии, которая связана с влиянием силы Кориолиса на мелкомасштабные вихревые структуры. Появление таких структур в первую очередь обусловлено турбулентной конвекцией, реализующейся в конвективной оболочке. Каждый такой вихрь вытягивает силовую линию магнитного поля, превращая ее в петлю. Действие силы Кориолиса приводит к тому, что в полушариях начинают преобладать вихри одного направления закрутки (правозакрученные в северном и левозакрученные в южном). Последующее слияние петель за счет действия магнитной диффузии приводит к генерации полоидального поля [90; 109]. Таким образом, схема динамо Паркера ввела представление о том, что не обязательно подбирать поля скорости специального вида. Если допустить в системе возможность существования конвективных или турбулентных течений, то в какой-то момент необходимая конфигурация течения может возникнуть сама.

Интересно отметить, что модель Паркера была написана за 10 лет до появления теории динамо среднего поля и была основана на интуитивных догадках о том, как должен работать механизм генерации крупномасштабного поля. При этом сами уравнения Паркера могут быть строго выведены из уравнений среднего поля Штеенбека-Краузе-Рэдлера [14; 110].

Уравнения модели Паркера допускают решение в виде волны с растущей во времени амплитудой [110]. Направление распространения волны при этом определяется знаком дифференциального вращения, а длина волны и скорость роста – комплексом (динамо-числом  $D$ ), который как произведение безразмерных параметров, характеризующих интенсивность  $\alpha$ -эффекта и дифференциального вращения. Очевидно, что в реальности амплитуда динамо-волны не может расти до бесконечности. При сильном росте крупномасштабное поле начинает существенно влиять на течение и снижать эффективность генерации. Наличие такого механизма насыщения способно приводить к появлению стационарных и периодических решений.

Предположение Паркера о том, что нарушение зеркальной симметрии солнечной конвекции связано с вращением Солнца и действием силы Кориолиса во многом связано с тем, что в то время основное внимание в исследованиях было сосредоточено на развитии магнитного поля из малого затравочного магнитного поля. Согласно современным представлениям, зеркальная асимметрия Солнца скорее обусловлена воздействием электромагнитных сил на возникающие МГД-структуры. Такой механизм в частности базируется на эвристической схеме генерации магнитного поля Бэбкока-Лейтона [111; 112]. В рамках этой схемы, так же как и в модели Паркера, тороидальное магнитное поле генерируется за счет вытягивания и наматывания силовых линий полоидального поля дифференциальным вращением. При этом происходит поднятие магнитных трубок над поверхностью фотосферы и формирование биполярных областей [113]. Подавление турбулентной конвекции сильным магнитным полем приводит к появлению пар солнечных пятен противоположной полярности. Одно из пятен биполярной области имеет полярность, совпадающую с полярностью крупномасштабного тороидального поля в данный момент цикла, и движется к экватору. Соответственно второе пятно имеет противоположную полярность и переносится в сторону полюса меридиональной циркуляцией. Аннигиляция пятен разных знаков на экваторе приводит к распаду тороидального поля, а движение хвостовых пятен к полюсам – к переполусовке и формированию нового полоидального поля. Схема Бэбкока-Лейтона лежит в основе многих современных моделей динамо [114–116].

Важно понимать, что солнечная активность не сводится только лишь к основному 11-летнему (22-летнему) циклу. Временной спектр солнечной активности содержит вариации различных временных масштабов, что может свидетельствовать о наличии непрерывной компоненты спектра [117]. Характеристики отдельных временных масштабов неоднократно анализировались с использованием различных методов [118–122].

Современные нелинейные модели солнечного динамо [123–125] способны воспроизводить наблюдаемый спектр солнечной активности. Однако вопрос о происхождении непрерывной компоненты спектра солнечной активности едва ли можно считать решенным. Основная сложность заключается в том, что указанные модели включают большое количество различных механизмов, таких как динамическое нелинейное подавление магнитного поля, меридиональная циркуляция, гипердиффузия и другие. В такой ситуации идентификация кон-

кретного механизма или их совокупности, ответственных за формирование сплошной компоненты спектра, представляет собой нетривиальную задачу.

Альтернативный подход заключается в поиске минимального набора физических механизмов, способного описать появление непрерывного спектра. Такая постановка вопроса в некотором смысле переключается с идеей о возбуждении динамического хаоса в конечномодовой нелинейной системе, которая берет свое начало с известной работы Лоренца [126]. Известны различные варианты маломодовых динамических систем, которые предлагались для воспроизведения хаотической активности астрофизических объектов [82; 127–130]. Существенным недостатком таких моделей является то, что вид системы обычно предлагается исходя из желаемых свойств решений и может быть не связан напрямую с механизмами динамо. Альтернативный подход заключается в формулировке маломодовой модели на основе классической модели Паркера с учетом нелинейного механизма подавления роста поля [131; 132]. Такая модель допускает различные режимы решений, в том числе хаотические. Однако вопрос о виде временного спектра получаемых решений в области хаотического поведения маломодовой модели Паркера по-видимому не рассматривался.

Другой вариант воспроизведения нерегулярного поведения динамо волн на основе моделей паркерского типа основывается на том факте, что факторы, вызывающие солнечный динамо-эффект, такие как дифференциальное вращение и зеркальная асимметрия, содержат существенный статистический шум из-за умеренного числа конвективных ячеек по которым производится усреднение. По этой причине разумно предполагать, что интенсивность драйверов солнечного динамо может заметно меняться на различных временах, сопоставимых с временами цикла.

Таким образом, на настоящее время достигнут значительный прогресс в понимании процессов, лежащих в основе динамики магнитных полей астрофизических объектов. Современные модели позволяют весьма подробно воспроизводить реальное поведение отдельных тел. Однако это не умаляет интереса к исследованию фундаментальных механизмов динамо на простых моделях, позволяющих четко выделить отдельные свойства реальных систем. В этой логике представляется актуальной задача рассмотрения взаимного влияния статистических флуктуаций драйверов динамо и динамического хаоса в рамках простой модели солнечного динамо, основанной на модели Паркера, с

целью определения возможности воспроизведения на ее основе феноменологии солнечного цикла и возможности их сосуществования.

#### 1.4 Математическое моделирование МГД-систем

Большинство МГД-систем, представляющих практический интерес, являются весьма сложными. Точные аналитические решения оказывается возможным получить лишь в некоторых предельных случаях или в упрощенных постановках. По этой причине активно развиваются методы математического моделирования магнитогидродинамических течений, которые позволяют охватить широкий спектр задач в зависимости от уровней упрощения системы, целей исследования и доступных вычислительных ресурсов.

Наиболее простыми являются модели типа динамических систем с небольшим числом степеней свободы. Система уравнений таких упрощенных моделей обычно получается из более сложных систем уравнений гидродинамики или магнитной гидродинамики путем разложения искомого решения по некоторому функциональному базису с последующим оставлением в разложении некоторого небольшого числа мод. Примерами моделей, которые получены этим способом, является классическая модель Лоренца [126] и маломодовая модификация модели Паркера [132]. В других характерных для магнитной гидродинамики случаях маломодовые могут быть «сконструированы» по некоторому подобию электрических цепей (например модель динамо Рикитакэ [82] и некоторые ее обобщения). Поскольку для исследования маломодовых моделей развиваются и активно применяются методы нелинейной динамики, в некоторых случаях оказывается возможным записать модель, например, исходя из искомого вида нелинейности или из желаемой последовательности бифуркаций, которая должна реализовываться в системе [129; 130]. Преимуществами маломодовых моделей является относительная простота исследования, развитость методов, а также принципиальная возможность на примере взаимодействия простейших «блоков» понять и проанализировать поведение сложных систем [133].

Некоторым обобщением маломодовых моделей на случай систем с развитой турбулентностью являются каскадные модели [134]. В отличие от

маломодовых моделей, в которых все моды описывают структуры близких масштабов, каскадные модели охватывают большой диапазон масштабов и описывают каскадные процессы переноса энергии по масштабам. При построении каскадных моделей пространство волновых чисел разбивается на зоны (оболочки) и для каждой зоны вводится соответствующая переменная (в общем случае комплекснозначная), квадрат которой равен энергии пульсаций скорости или магнитного поля, заключенных в соответствующей оболочке волнового пространства. Вид уравнений для соответствующих переменных определяется исходя из законов сохранения и требуемого вида нелинейных взаимодействий между модами. Еще раз подчеркнем, что каскадные модели формулируются не в физическом пространстве, а в пространстве Фурье. Каскадные модели широко применяются для описания статистических свойств развитых турбулентных течений, спиральных турбулентных течений [135] и мелкомасштабной МГД-турбулентности [136].

Описанные маломодовые и каскадные модели позволяют установить некоторые универсальные или статистические характеристики поведения МГД-систем. Для непосредственного расчета магнитогидродинамических течений в конкретных потоках активно применяются классические подходы вычислительной гидродинамики. Наиболее детальным и наиболее затратным с вычислительной точки зрения является прямое решение полной системы уравнений магнитной гидродинамики (DNS – Direct Numerical Simulation). Шаг вычислительной сетки при этом должен быть достаточно малым для разрешения вихревых структур вплоть до колмогоровского масштаба. Это требование обуславливает колоссальные вычислительные затраты даже при умеренных значениях числа Рейнольдса, поскольку суммарное число операций, связанное с количеством шагов по пространству и времени, растет пропорционально  $Re^3$  [137]. Огромный объем данных, получаемый при прямом численном моделировании, позволяет рассматривать этот подход как альтернативу экспериментальным исследованиям и использовать результаты DNS для построения турбулентных моделей, пригодных для практических приложений [138].

Для моделирования технологических МГД-процессов, которые зачастую характеризуются большими значениями числа Рейнольдса, активно применяются RANS-методы (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) [139–141], позволяющие описывать средние характеристики МГД-течений. Формулировка RANS-методов основывается на разложении входящих в систему уравнений величин на

среднюю и пульсационную составляющие [142]. В уравнениях для средних полей при этом появляются слагаемые, связанные с корреляционными характеристиками пульсаций. Попытка написать замкнутую систему уравнений для корреляторов приводит к проблеме замыкания, которая заключается в появлении в уравнениях для статистических моментов величин, выражающихся через моменты более высоких порядков [143]. Для решения проблемы замыкания используются различные модели турбулентности, позволяющие выразить компоненты корреляционных тензоров через характеристики соответствующих средних полей. В уравнениях при этом появляются эффективные турбулентные характеристики (например, турбулентная вязкость или турбулентная диффузия), которые отличаются от молекулярных аналогов тем, что являются свойствами течения, а не самой среды.

Промежуточными между DNS и RANS являются модели, основанные на использовании метода крупных вихрей (LES – Large Eddy Simulation) [144]. Суть метода LES заключается в разделении вихревых структур на мелкие и крупные путем процедуры фильтрации. В результате фильтрации получаются уравнения для крупных вихрей, которые разрешаются сеткой явно. По аналогии с корреляционными тензорами в RANS-моделях, в уравнениях для крупных структур в результате фильтрации появляются дополнительные слагаемые, описывающие вклад мелкомасштабных (подсеточных) структур [145]. Для замыкания системы уравнений в LES-подходах также используются модельные соображения, основанные на параметризации соответствующих подсеточных величин через характеристики крупномасштабных (то есть разрешенных явно сеткой) полей. Активно развиваются также комбинированные RANS/LES модели, в рамках которых в некоторых частях расчетной области используется LES, а в других, где масштаб сетки оказывается недостаточным, применяется RANS-подход [146].

Достойны упоминания также каскадно-сеточные модели [147; 148]. В рамках моделей такого класса решаются уравнения для средних полей, а эффективные мелкомасштабные характеристики вычисляются на основе каскадных моделей. Несмотря на то, что расчеты в рамках таких двухуровневых моделей оказываются вычислительно затратными из-за необходимости решать уравнения каскадной модели в каждой точке пространственной сетки, они могут давать более точные по сравнению с классическими моделями средних полей

результаты для течений, где спектральные свойства мелкомасштабной турбулентности заведомо неизвестны [149].

Отдельно отметим особенности вычислений, характерные для технологической магнитной гидродинамики. При создании моделей реальных технологических систем оказывается необходимым рассчитывать электромагнитное поле от систем достаточно сложной конфигурации [150; 151]. Для этого зачастую применяются те или иные пакеты вычислительной электродинамики (ANSYS Emag, ANSYS Maxwell, Elmer). Однако, при этом возникает проблема сопряжения электродинамической и гидродинамической подзадач. Решение сопряженной МГД-задачи в полной постановке требует пересчета вычисленных электромагнитных характеристик с учетом движения проводящей среды на каждом временном шаге [152]. Дополнительную сложность при этом может представлять необходимость интерполяции решения электродинамической подзадачи на сетку гидродинамической подзадачи, поскольку характерные масштабы особенностей электродинамических и гидродинамических полей оказываются разными и, соответственно, требуют различного сеточного разбиения для корректного разрешения. Часто в технологических МГД-задачах наведенные электрическими индукторами токи оказываются значительно большими по сравнению с токами, индуцированными течением среды. В таком случае оказывается применимым электродинамическое приближение, в рамках которого оказывается достаточным решить электродинамическую задачу один раз до начала гидродинамических расчетов [153]. Ситуация значительно усложняется при рассмотрении неоднородных проводящих сред, к примеру, содержащих примеси, проводимость которых значительно отличается от проводимости основной жидкости. В этом случае перераспределение примеси приводит к изменению распределения эффективной электропроводности среды, что обуславливает необходимость пересчета распределения электромагнитных полей на каждом временном шаге даже при использовании электродинамического приближения (то есть при пренебрежении токами, индуцированными течением среды).

## 1.5 Выводы по главе

Как показывает ряд исследований, одной из ключевых причин снижения порога устойчивости канальных МГД-течений является перестройка профиля скорости, которая сопровождается появлением точек перегиба. Деформация профиля скорости может быть обусловлена действием различных механизмов, таких как рост специфических возмущений, влияние силы плавучести или неоднородное растекание тока, приводящее к пространственной неоднородности силы Лоренца. При этом во многих работах неоднородность растекания тока возникает за счет особенностей стенок канала – различия их проводимости или наличия локальных проводящих секций. Вместе с тем, недостаточно исследованной представляется постановка задачи, в которой неоднородным распределением свойств характеризуется сама проводящая среда.

Наличие неоднородностей в жидких металлах не всегда является негативным или дестабилизирующим фактором. В частности оно является необходимым для реализации ряда технологических методик измерения скорости течения жидких металлов. При этом определяющую роль играет время существования и устойчивость соответствующих неоднородных структур, которые в таком случае выступают в качестве трассеров, позволяющих судить о характеристиках потока.

В астрофизических задачах магнитной гидродинамики пространственно-временные вариации характеристик системы являются одним из ключевых факторов, обуславливающих возможность возникновения нетривиальной динамики астрофизических объектов. Классическим примером такого процесса является модель Паркера, которая позволила объяснить существование основного 11-летнего цикла солнечной активности как результат взаимного влияния спиральности, являющейся эффективной характеристикой мелкомасштабной турбулентной конвекции, и неоднородности вращения Солнца. Однако, наблюдаемое поведение магнитного поля Солнца демонстрирует вариации различных временных масштабов и не сводится к одному лишь основному циклу. Несмотря на то, что современные детальные модели астрофизических объектов, основанные на полной системе уравнений магнитной гидродинамики, оказываются способны воспроизводить наблюдаемый спектр солнечной активности, исследование возможности описания заполненного спектра в рамках физически

понятной модели Паркера с привлечением небольшого числа дополнительных гипотез представляется актуальной.

Таким образом, наличие пространственно-временных неоднородностей в МГД-течениях приводит к разнообразию эффектов, исследование различных аспектов которых является актуальной задачей магнитной гидродинамики, представляющей фундаментальный и прикладной интерес. При этом эффективными инструментами исследования могут быть как прямые численные расчеты, так и упрощенные модели, позволяющие детально разобраться с отдельными механизмами.

## ГЛАВА 2. ТЕЧЕНИЕ ГАРТМАНА ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВАХ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА

Как обсуждалось в разделе 1.1 настоящей работы, изменение порога устойчивости для течений гартмановского типа так или иначе связано с изменением профиля скорости и появлением в нем точек перегиба. Причиной перестройки профиля являются действие силы плавучести или неоднородность растекания электрического тока. В настоящей главе рассматривается еще одна возможная причина искажения профиля скорости течения, а именно неоднородность свойств жидкости.

### 2.1 Математическая постановка задачи

Рассмотрим течение вязкой неоднородной электропроводящей несжимаемой жидкости между двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии  $2h$ , перпендикулярно которым наложено однородное магнитное поле  $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_z$ . Течение вызвано наличием постоянного перепада давления вдоль канала. Обозначим координату вдоль направления течения  $x$ , координату поперек течения  $y$  и вертикальную координату  $z$ . Течение по  $x$  и  $y$  считаем периодическим. Стенки канала считаем непроводящими. Схема задачи приведена на рисунке 2.1.

Рассматривается течение при малых значениях магнитного числа Рейнольдса  $Re_m \ll 1$  и магнитного числа Прандтля  $Pr_m \ll 1$ . В таком случае магнитное поле, индуцированное течением среды, оказывается малым по сравнению с внешним и задачу можно рассматривать в рамках безындукционного приближения. Уравнение Навье-Стокса для рассматриваемого течения имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot 2\nu \mathbf{S} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_L, \quad (2.1)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z$  – скорость течения,  $p$  – давление,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$  – тензор скорости деформации (симметризованный градиент скорости). Сила Лоренца

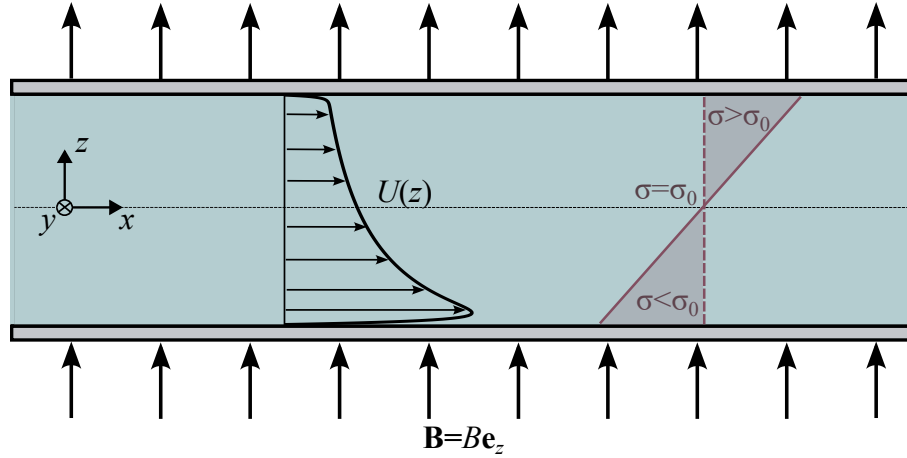


Рисунок 2.1 — Схематическая постановка задачи о течении Гартмана для жидкости с неоднородным распределением электропроводности

определяется соотношением

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

где наложенное магнитное поле есть  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ , а плотность электрического тока определяется законом Ома, обобщенным на случай движущейся электропроводящей среды,

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.3)$$

Здесь  $\sigma$  — электропроводность жидкости,  $\phi$  — электрический потенциал. Из условия неразрывности для электрического тока

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.4)$$

можно получить уравнение относительно электрического потенциала

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.5)$$

Постановка задачи дополняется граничными условиями прилипания для скорости

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad z = \pm 1 \quad (2.6)$$

и равенства нулю нормальной производной на стенках канала для электрического потенциала

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = \pm 1. \quad (2.7)$$

Выберем к качестве единиц измерения длины, скорости, времени, давления, индукции магнитного поля, плотности электрического тока и электрического потенциала соответственно величины  $h$ ,  $U$ ,  $h/U$ ,  $\rho U^2$ ,  $B$ ,  $\sigma_0 UB$ ,  $hUB$ . Здесь  $U$  – средняя скорость течения. Тогда система уравнений задачи в безразмерной форме принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \nu \mathbf{S} + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_z, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad z = \pm 1 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = \pm 1. \quad (2.12)$$

Здесь  $\sigma$  и  $\nu$  – функции, описывающие пространственную неоднородность свойств жидкости, а числа Гартмана  $\text{Ha} = Bh\sqrt{\sigma_0/\rho\nu_0}$  и Рейнольдса  $\text{Re} = Uh/\nu_0$  определены по средним значениям электропроводности  $\sigma_0$  и вязкости  $\nu_0$ .

Очевидно, что в физически реалистичных постановках необходимо предполагать, что вязкость и электропроводность жидкости зависят от пространственного распределения некоторой скалярной величины  $\theta$ , которая переносится вместе с жидкостью. В качестве такой величины могут выступать, к примеру, концентрация примеси, проводимость которой отличается от проводимости жидкости, или температура. В таком случае полная постановка задачи должна быть дополнена уравнением конвекции-диффузии для соответствующей величины. Однако для жидких металлов характерно малое значение гидродинамического числа Прандтля ( $\text{Pr} \sim 10^{-2}$ ), что означает, что температурное поле диффундирует значительно быстрее, чем передаётся импульс. В таком режиме неоднородности температуры сглаживаются практически мгновенно по сравнению с временем развития гидродинамических возмущений. Как следствие, обратное влияние течения на поле температуры пренебрежимо мало, и распределение скаляра можно считать «зафиксированным» и не зависящим ни от времени, ни от эволюции возмущений скорости.

Рассматривается случай линейных распределений электропроводности и вязкости по высоте канала

$$\sigma(z) = 1 + \kappa z, \quad (2.13)$$

$$\nu(z) = 1 + \varsigma z. \quad (2.14)$$

Выбор вида распределений обусловлен несколькими факторами. С одной стороны, линейные распределения с постоянными по высоте канала градиентами соответствующих величин являются достаточно простыми и определяются всего лишь двумя дополнительными параметрами  $-1 < \varkappa < 1$  и  $-1 < \varsigma < 1$ . Однако можно показать, что описанная постановка может быть строго выведена из полной системы уравнений, включающей в себя уравнение конвекции-диффузии некоторой скалярной величины. Рассматриваемое приближение «зафиксированных» распределений свойств среды соответствует пределу бесконечно малых чисел Прантдля.

## 2.2 Стационарные профили скорости

Найдем из системы уравнений (2.8)–(2.10) стационарные распределения скорости, давления и электрического потенциала. В силу периодичности задачи по координатам  $x$  и  $y$ , а также с учетом того, что течение вызвано наличием постоянного градиента давления вдоль канала, будем искать стационарные распределения скорости и потенциала в виде

$$\mathbf{U}_0 = U(z)\mathbf{e}_x, \quad \Phi_0 = \Phi_0(z). \quad (2.15)$$

Из уравнения (2.10) с учетом граничных условий Неймана на непроводящих стенках (2.12) получим  $\Phi_0 = \text{const}$ .

С учетом выбранной параметризации неоднородности свойств (2.13)–(2.14) уравнение для определения стационарного профиля скорости течения  $U(z)$  принимает вид

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = \frac{\text{Re}}{1 + \varsigma z} \frac{dP_0}{dx} + \text{Ha}^2 \left( \frac{1 + \varkappa z}{1 + \varsigma z} \right) U - \frac{\varsigma}{1 + \varsigma z} \frac{dU}{dz}. \quad (2.16)$$

Несложно заметить, что при  $\varkappa = 0$  и  $\varsigma = 0$  уравнение (2.16) принимает вид, аналогичный виду уравнения для определения профиля скорости для классического течения Гартмана.

Отметим, что это уравнение имеет симметрию относительно преобразования  $\{\varkappa \rightarrow -\varkappa, \varsigma \rightarrow -\varsigma, z \rightarrow -z\}$ . Это позволяет рассматривать только

положительные значения  $\varkappa$  или  $\varsigma$  – решения для соответствующих отрицательных значений могут быть получены отражением результирующих профилей скорости относительно плоскости  $Oxy$ . Далее рассматриваются только положительные значения  $\varkappa$ .

Постоянный продольный градиент давления можно определить, используя условие нормировки расхода

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} U(z) dz = 1. \quad (2.17)$$

Как и в случае классического течения Гартмана, условие (2.17) также позволяет исключить из рассмотрения число Рейнольдса. Таким образом, число Рейнольдса не влияет на форму безразмерного профиля скорости.

Аналитическое решение дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (2.16) выражается через специальные функции и представляется весьма громоздким. Однако это уравнение достаточно легко решается численно с использованием, к примеру, метода пристрелки. Полученные в результате численного решения профили скорости при различных значениях параметров задачи приведены на рисунке 2.2.

Основной интерес в рамках поставленной задачи представляют решения при  $\varkappa \neq 0$ . В этом случае профили скорости становятся асимметричными. Причиной такого искажения профиля является неоднородность продольной компоненты силы Лоренца  $(\mathbf{F}_L)_x \sim -\sigma U$ , которая появляется из-за неоднородного распределения электропроводности. В той части канала, где электропроводность выше среднего значения  $\sigma > \sigma_0$  (вблизи верхней стенки  $z = 1$ ), тормозящее действие силы Лоренца оказывается более эффективным, что приводит к локальному снижению скорости. Напротив, в области с пониженной электропроводностью  $\sigma < \sigma_0$  (вблизи стенки  $z = -1$ ) сила Лоренца слабее и, как следствие, наблюдается локальное увеличение скорости течения. Важной особенностью полученных профилей скорости оказывается появление в них точек перегиба при умеренных значениях  $Na$  и  $\varkappa$ . Их положение проиллюстрировано на рисунке 2.3.

Несмотря на то, что аналитическое решение уравнения (2.16) представляется весьма громоздким, оказывается возможным провести исследование порогов появления точек перегиба, исходя из достаточно простых асимптотических оценок. Так, при  $Na \gg 1$  и  $\varkappa \ll 1$  градиенты скорости в ядре течения

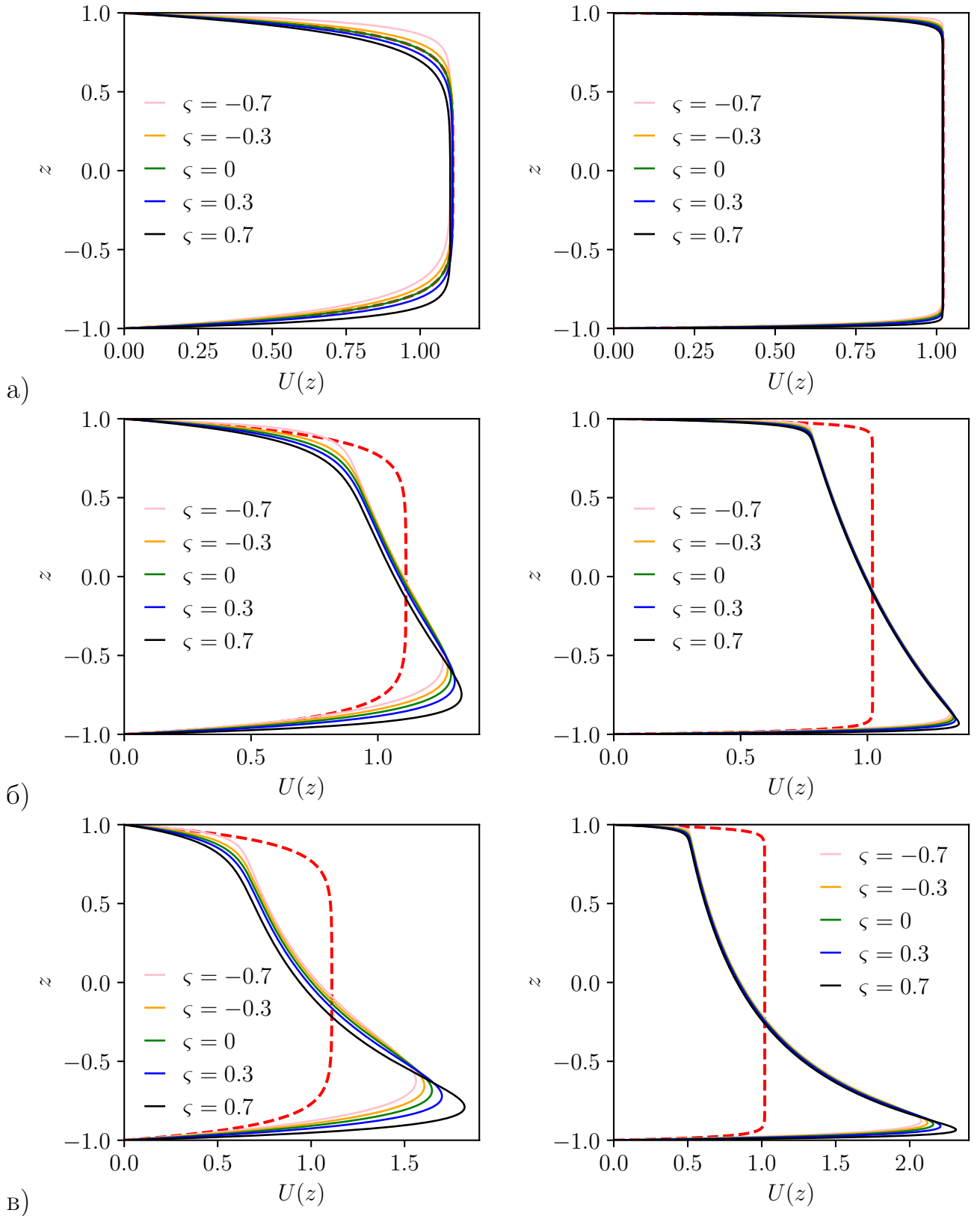


Рисунок 2.2 — Стационарные профили скорости при  $Na = 10$  (слева) и  $Na = 50$  (справа): а)  $\varkappa = 0$ , б)  $\varkappa = 0.3$ ,  $\varkappa = 0.7$ . Красной штриховой линией обозначены профили скорости для случая классического течения Гартмана ( $\varkappa = 0$ ,  $\zeta = 0$ )

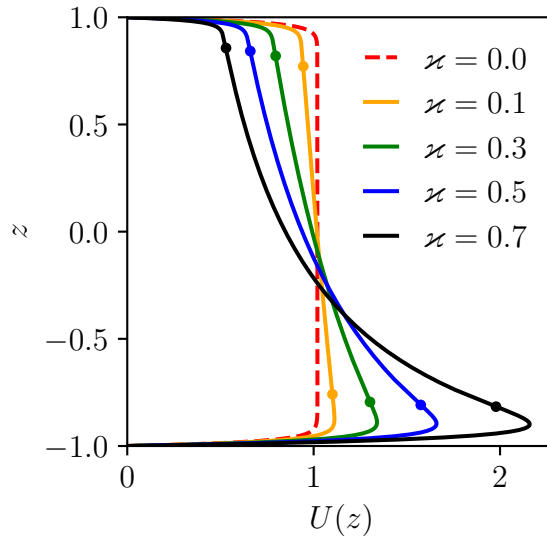


Рисунок 2.3 — Стационарные профили скорости при  $Ha = 50$  (слева),  $\varsigma = 0$  для различных значений параметра неоднородности электропроводности  $\varkappa$ . Маркерами обозначено положение точек перегиба

остаются малы, что позволяет пренебречь влиянием вязкости. В таком случае вдали от погранслоев вид профиля скорости может быть определен исходя из баланса между силой Лоренца и наложенным градиентом давления

$$\text{Re} \frac{dP_0}{dx} = Ha^2 \sigma(z) U(z), \quad (2.18)$$

откуда следует  $U(z) \sim 1/\sigma(z)$ . Полагая  $\varsigma \ll 1$  и учитывая погранслои по аналогии с тем, как это делается для классического течения Гартмана [28], для рассматриваемого случая линейного распределения вязкости и электропроводности получим асимптотическое выражение для профиля скорости в виде

$$U(z) \sim \frac{1}{1 + \varkappa z} - \frac{\exp \left[ -Ha \sqrt{\frac{1-\varkappa}{1-\varsigma}} (1+z) \right]}{1 - \varkappa} - \frac{\exp \left[ -Ha \sqrt{\frac{1+\varkappa}{1+\varsigma}} (1-z) \right]}{1 + \varkappa}. \quad (2.19)$$

Точки перегиба определяются как нули функции

$$U''(z) \sim \frac{2\varkappa^2}{(1 + \varkappa z)^3} - \frac{Ha^2 \exp \left[ -Ha \sqrt{\frac{1-\varkappa}{1-\varsigma}} (1+z) \right]}{1 - \varkappa} - \frac{Ha^2 \exp \left[ -Ha \sqrt{\frac{1+\varkappa}{1+\varsigma}} (1-z) \right]}{1 + \varkappa}. \quad (2.20)$$

Можно заметить, что при  $\varkappa = 0$  функция  $U''(z)$  не меняет знак. Это означает, что линейное распределение вязкости не может само по себе приводить к появлению точек перегиба.

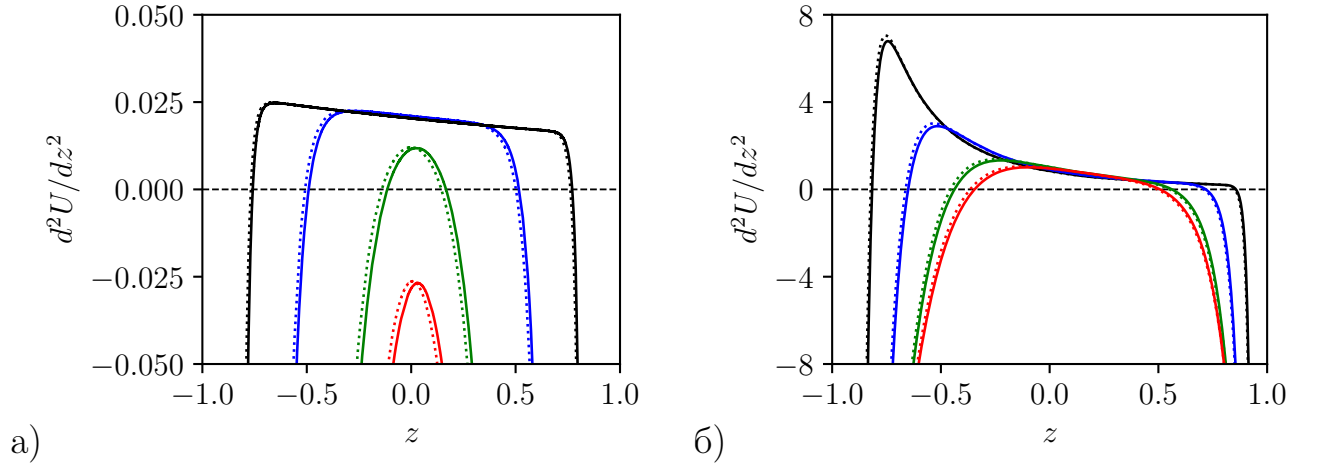


Рисунок 2.4 — Вторые производные профиля скорости  $d^2U/dz^2$  при а)  $\varkappa = 0.1$  и б)  $\varkappa = 0.7$ . Цвета соответствуют значениям чисел Гартмана  $Na = 8$  (красный),  $Na = 10$  (зеленый),  $Na = 20$  (синий) и  $Na = 50$  (черный). Сплошными линиями обозначены кривые для случая однородной вязкости  $\varsigma = 0$ , пунктирными — для случая  $\varsigma = 0.1$

С увеличением числа Гартмана точки перегиба появляются при все меньших значениях  $\varkappa$  в окрестности  $z = 0$  (см. рисунок 2.4(a)). Рассматривая предел  $\varkappa \rightarrow 0$  и полагая  $\varsigma = 0$ , получим из (2.20)

$$U''(0) \sim 2\varkappa^2 - 2Na^2 \exp[-Na]. \quad (2.21)$$

Из этого соотношения можно найти критическое значение  $\varkappa_{cr}(Na)$ , такое, что точки перегиба отсутствуют при  $\varkappa < \varkappa_{cr}$  и появляются при  $\varkappa > \varkappa_{cr}$ :

$$\varkappa_{cr} \approx Na \exp[-Na/2]. \quad (2.22)$$

Как видно из рисунка 2.5, это приближение достаточно хорошо согласуется с результатами численного решения уравнения (2.16) при  $Na \gtrsim 10$ . Значение  $\varkappa_{cr}(Na)$  быстро уменьшается с ростом  $Na$  и становится меньше чем  $10^{-3}$  при  $Na > 20$ .

Влияние неоднородности вязкости ( $\varsigma \neq 0$ ) на искажение стационарных профилей скорости менее выражено. Как показано на рисунке 2.6, неоднородность вязкости приводит к изменению толщины погранслоя, что в принципе может влиять на устойчивость течения вместе с наличием точек перегиба при  $\varkappa \neq 0$ . При этом неоднородность вязкости слабо влияет на сам порог появления точек перегиба (см. рисунок 2.4) и это влияние снижается с увеличением  $Na$  в силу роста влияния силы Лоренца (см. рисунок 2.5). Поскольку наиболее интересными с точки зрения приложений являются случаи умеренных и

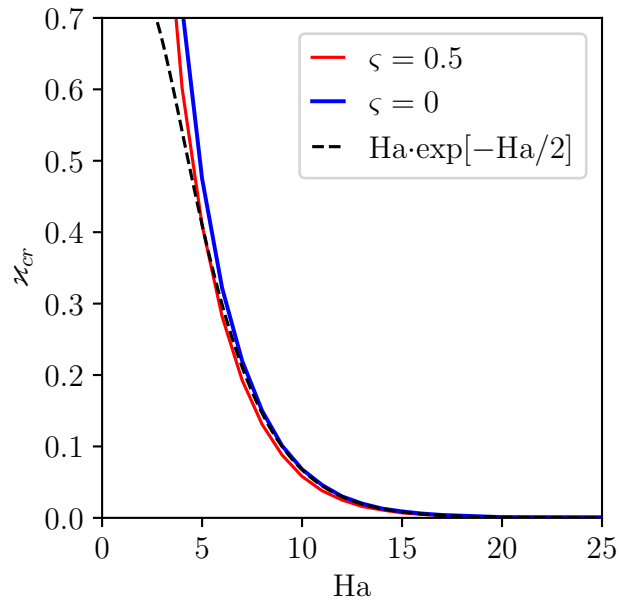


Рисунок 2.5 — Порог появления точек перегиба  $\mathcal{R}_{cr}$  как функция числа Гартмана  $Ha$  для двух различных значений  $\zeta$ . Сплошные линии получены в результате численного решения уравнения (2.16), черная штриховая линия соответствует асимптотическому соотношению (2.22)

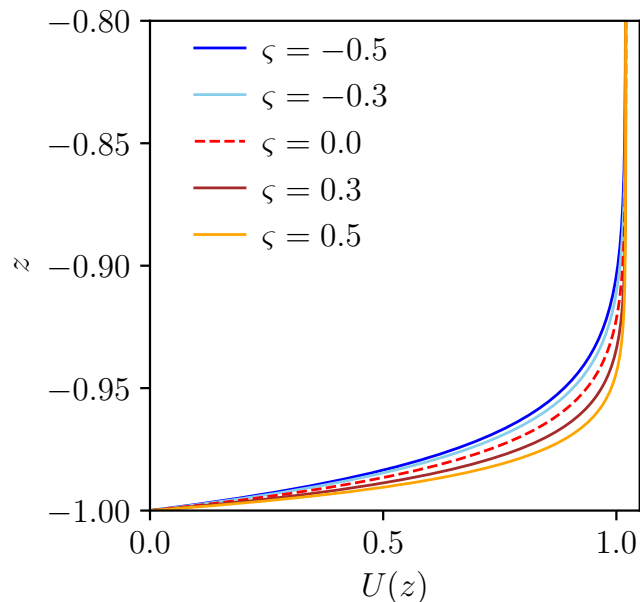


Рисунок 2.6 — Стационарные профили скорости вблизи стенки  $z = -1$  при  $Ha = 50$ ,  $\mathcal{R} = 0$  для случая неоднородной вязкости. Красная штриховая линия соответствует классическому течению Гартмана

больших чисел Гартмана  $Ha$ , далее мы будем рассматривать случай однородной вязкости  $\varsigma = 0$ .

Согласно классической теории гидродинамической устойчивости, наличие точки перегиба в профиле скорости в невязком пределе является необходимым условием существования неустойчивых мод. Это утверждение есть формулировка теоремы Рэля о точке перегиба [45]. Усиленное условие, предложенное Фьёртофтом [34], требует дополнительно, чтобы модуль градиента завихренности в точке перегиба достигал локального максимума. Однако хорошо известно, что выполнение критериев Рэля и Фьёртофта не гарантирует неустойчивость, а лишь указывает на её потенциальную возможность.

Таким образом, само по себе обнаружение точек перегиба не даёт немедленного ответа на вопрос об устойчивости течения, однако служит указанием на принципиальную возможность реализации еще одного механизма неустойчивости в течениях гартмановского типа. Это делает необходимым проведение линейного анализа устойчивости, чему и посвящён следующий раздел настоящей главы.

## 2.3 Линейный анализ устойчивости течения Гартмана при линейном распределении электропроводности жидкости

### 2.3.1 Вывод системы уравнений спектрально-амплитудной задачи

Линеаризуем систему уравнений (2.8)–(2.10) относительно малых возмущений скорости  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{U}_0$ , давления  $p' = p - P_0$  и электрического потенциала  $\phi' = \phi - \Phi_0$ . Линеаризованная система уравнений принимает вид (для удобства штрихи далее опущены и всюду в разделе подразумевается, что речь идет о малых возмущениях соответствующих величин)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U}_0 = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \frac{Ha^2}{\text{Re}} \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z), \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z). \quad (2.25)$$

Последнее уравнение удобно переписать в виде

$$\Delta\phi + \frac{\varkappa}{\sigma} \frac{\partial\phi}{\partial z} = \xi, \quad (2.26)$$

где  $\xi = \partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y$  – вертикальная компонента завихренности.

Преобразуем линеаризованную систему уравнений к системе скалярных уравнений относительно возмущений вертикальной скорости  $u_z$ , вертикальной завихренности  $\xi$  и электрического потенциала  $\phi$ . Взяв дивергенцию от уравнения (2.23) и учтя уравнение неразрывности, получим уравнение Пуассона для возмущения давления

$$\Delta p = -2 \frac{dU}{dz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \sigma \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.27)$$

Продифференцируем полученное уравнение по  $z$ . Получим

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial z} = -2 \frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial u_z}{\partial x} - 2 \frac{dU}{dz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \left( \sigma \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \varkappa \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \quad (2.28)$$

Далее возьмем лапласиан от уравнения для вертикальной компоненты скорости  $u_z$

$$\frac{\partial \Delta u_z}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta u_z}{\partial x} + 2 \frac{dU}{dz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{\partial \Delta p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta u_z. \quad (2.29)$$

Подставив в него (2.28), получим окончательно уравнение относительно  $u_z$  в виде

$$\frac{\partial \Delta u_z}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta u_z}{\partial x} - \frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta u_z - \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \left( \varkappa \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \quad (2.30)$$

Для вывода уравнения для вертикальной компоненты завихренности продифференцируем уравнение для продольной компоненты скорости  $u_x$  по  $y$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_x}{\partial y} + U \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{dU}{dz} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \sigma \left( -\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (2.31)$$

и вычтем из него уравнение для поперечной компоненты скорости  $u_y$ , продифференцированное по  $x$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_y}{\partial x} + U \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \sigma \left( -\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right). \quad (2.32)$$

Получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{dU}{dz} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \xi + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \sigma \left( -\xi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right). \quad (2.33)$$

Из уравнения для возмущений электрического потенциала (2.26) следует, что

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \xi = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\varkappa \partial \phi}{\sigma \partial z}. \quad (2.34)$$

С учетом этого получим окончательную форму уравнения для вертикальной компоненты завихренности в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \xi + \frac{dU}{dz} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \left( \varkappa \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right). \quad (2.35)$$

Для получения спектрально-амплитудных уравнений рассмотрим нормальные возмущения в виде

$$(u_z, \xi, \phi)(x, y, z, t) = (\hat{w}, \hat{\xi}, \hat{\phi})(z) \exp \{i(\alpha x + \beta y - \gamma t)\}, \quad (2.36)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – действительные продольное и поперечное волновые числа соответственно, а  $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$  – собственное значение. Подставляя этот анзац в полученные ранее уравнения для возмущений вертикальной скорости  $u_z$ , вертикальной завихренности  $\xi$  и электрического потенциала  $\phi$ , получим систему уравнений Орра-Зоммерфельда-Сквайера, обобщенную с учетом действия силы Лоренца

$$\begin{aligned} (U - c)(\hat{w}'' - k^2 \hat{w}) - U'' \hat{w} &= \\ &= \frac{1}{i\alpha \text{Re}} (\hat{w}^{IV} - 2k^2 \hat{w}'' + k^4 \hat{w}) - \frac{\text{Ha}^2}{i\alpha \text{Re}} (\varkappa \hat{w}' + \sigma \hat{w}''), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$(U - c) \hat{\xi} = \frac{1}{i\alpha \text{Re}} (\hat{\xi}'' - k^2 \hat{\xi}) + \frac{\beta}{\alpha} U' \hat{w} - \frac{\text{Ha}^2}{i\alpha \text{Re}} (\varkappa \hat{\phi}' + \sigma \hat{\phi}''), \quad (2.38)$$

$$\hat{\phi}'' - k^2 \hat{\phi} + \frac{\varkappa}{\sigma} \hat{\phi}' = \hat{\xi}. \quad (2.39)$$

Здесь  $c = \gamma/\alpha$  и  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . Постановка спектрально-амплитудной задачи дополняется граничными условиями

$$\begin{aligned} \hat{w}(-1) = \hat{w}(1) = 0, \quad \hat{w}'(-1) = \hat{w}'(1) = 0, \\ \hat{\xi}(-1) = \hat{\xi}(1) = 0, \quad \hat{\phi}'(-1) = \hat{\phi}'(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Полученная система уравнений может быть записана в операторной форме [154]:

$$\begin{aligned}
 -i\gamma \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dz^2} - k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{\xi} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} &= \\
 &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{OS} - \mathcal{L}_{Ha} & 0 & 0 \\ i\beta U' & \mathcal{L}_{SQ} & -\mathcal{L}_{Ha} \\ 0 & -1 & \frac{d^2}{dz^2} - k^2 + \frac{\varkappa}{\sigma} \frac{d}{dz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{\xi} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}. \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{L}_{OS} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 + i\alpha U'' - i\alpha U, \tag{2.42}$$

$$\mathcal{L}_{SQ} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) - i\alpha U, \tag{2.43}$$

есть классические операторы Орра-Зоммерфельда и Сквайра соответственно, а

$$\mathcal{L}_{Ha} = \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \frac{d}{dz} \left( \sigma \frac{d}{dz} \right). \tag{2.44}$$

Недиагональные члены в правой части уравнения соответствуют сопряжению между вертикальной скоростью и вертикальной завихренностью, а также между вертикальной завихренностью и электрическим потенциалом. Можно заметить, что при  $\beta = 0$  задача развязывается и для определения линейной устойчивости течения оказывается возможным решать только лишь уравнение Орра-Зоммерфельда (2.37).

Как и в случае других МГД-течений, в которых магнитное поле направлено перпендикулярно стенкам канала, остается справедливой теорема Сквайра [30; 31], согласно которой наиболее опасными являются двумерные возмущения. Показать это можно с использованием рассуждений, аналогичных тем, что приводятся в случае классических гидродинамических течений [154]. Рассмотрим случай  $\beta = 0$ . Уравнение Орра-Зоммерфельда в таком случае принимает вид

$$\begin{aligned}
 (U - c) (\hat{w}'' - \alpha_{2D}^2 \hat{w}) - U'' \hat{w} &= \\
 &= \frac{1}{i\alpha_{2D} \text{Re}_{2D}} (\hat{w}^{IV} - 2\alpha_{2D}^2 \hat{w}'' + \alpha_{2D}^4 \hat{w}) - \frac{\text{Ha}^2}{i\alpha_{2D} \text{Re}_{2D}} (\varkappa \hat{w}' + \sigma \hat{w}''). \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

Это уравнение совпадает с исходным уравнением (2.37) при  $\alpha_{2D} = k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  и  $\alpha_{2D} \text{Re}_{2D} = \alpha \text{Re}$ . Отсюда следует, что

$$\text{Re}_{2D} = \text{Re} \frac{\alpha}{k} < \text{Re}, \tag{2.46}$$

поэтому если некоторая трёхмерная мода неустойчива, то существует соответствующая двумерная мода, которая неустойчива при меньшем числе Рейнольдса. Отметим, что хотя строгого доказательства затухания мод Сквайра не приводится, при всех рассмотренных в задаче значениях параметров это в действительности было так, что подтверждает справедливость теоремы Сквайра применительно к рассматриваемой задаче.

### 2.3.2 Методы решения спектрально-амплитудной задачи и определения критических параметров

Система уравнений (2.37)–(2.39) с граничными условиями (2.40) решается численно спектральным методом, реализованным с помощью открытого программного пакета Dedalus [155]. Для дискретизации используется базис полиномов Чебышева первого рода  $T_n(z)$ . Искомые собственные функции ищутся в виде

$$\hat{w}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{w}_n T_n(z), \quad \hat{\xi}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_n T_n(z), \quad \hat{\phi}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\phi}_n T_n(z). \quad (2.47)$$

Для вычисления производных используются соотношения, связывающие производные от  $T_n(z)$  с полиномами Чебышева второго рода  $U_n(z)$ .

Подстановка разложений (2.47) в исходную систему уравнений и проекция на базис функций  $U_n(z)$  в соответствии с формулировкой метода Петрова-Галеркина позволяет свести исходную задачу к обобщенной алгебраической задаче на собственные значения вида

$$\mathbf{A}(\text{Ha}, \text{Re}, \varkappa, \alpha, \beta) \mathbf{x} = \gamma \mathbf{B}(\alpha, \beta) \mathbf{x}, \quad (2.48)$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор коэффициентов разложения

$$\mathbf{x} = \left\{ \hat{w}_0, \dots, \hat{w}_{N-1}, \hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_{N-1}, \hat{\phi}_0, \dots, \hat{\phi}_{N-1} \right\}, \quad (2.49)$$

а матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  состоят из коэффициентов спектрального разложения операторов в правой и левой частях уравнения (2.41) соответственно. Собственное значение с наибольшей мнимой частью  $\gamma_i$  и соответствующий ему собственный вектор  $\mathbf{x}$  определяют наиболее опасную моду возмущений.

Таблица 3 — Собственные значения  $c = \gamma/\alpha$  с наибольшей мнимой частью, рассчитанные для уравнения Орра-Зоммерфельда (OS) и полной системы спектрально-амплитудной задачи (OSS) с использованием разложения по  $N$  полиномам Чебышёва. Все вычисления выполнены при  $\text{Na} = 50$ ,  $\text{Re} = 25000$ ,  $\alpha = \pi/3$ ,  $\beta = 0$ ,  $\varkappa = 0.7$

N	$c$ , OS	$c$ , OSS
48	$1.9055151103 + 0.013998877i$	$1.9055151103 + 0.013998877i$
64	$1.9054773186 + 0.014278013i$	$1.9054773186 + 0.014278013i$
96	$1.9054663707 + 0.014275107i$	$1.9054663707 + 0.014275107i$
128	$1.9054664185 + 0.014275090i$	$1.9054664185 + 0.014275090i$
192	$1.9054664051 + 0.014275092i$	$1.9054664051 + 0.014275092i$
256	$1.9054663719 + 0.014275087i$	$1.9054663720 + 0.014275087i$
384	$1.9054663810 + 0.014275092i$	$1.9054663810 + 0.014275092i$
512	$1.9054663916 + 0.014275107i$	$1.9054663918 + 0.014275107i$
768	$1.9054663820 + 0.014275090i$	$1.9054663822 + 0.014275090i$

Для учета граничных условий используется обобщенный  $\tau$ -метод, который заключается в замене строк матрицы системы, которые соответствуют старшим модам полиномиального разложения для каждой из искомым функций, уравнениями, выражающими граничные условия.

Сходимость решения при увеличении числа мод, используемых в спектральном разложении, показана в Таблице 3 как для уравнения Орра-Зоммерфельда (2.37), так и для полной системы уравнений спектрально-амплитудной задачи (2.37)–(2.39). Поскольку обе формулировки аналитически эквивалентны в пределе  $\beta = 0$ , вычисленные значения совпадают с точностью до численной погрешности, которая исчезает при увеличении числа мод в разложении. Вследствие справедливости теоремы Сквайра и с учетом результатов исследования сходимости метода, все расчеты линейной устойчивости для рассматриваемой нами задачи проводятся для уравнения Орра-Зоммерфельда при  $\beta = 0$  с использованием  $N = 384$  мод в спектральном разложении (2.47).

Известно, что решения спектрально-амплитудных задач с помощью спектральных методов обычно содержат фиктивные моды, которые возникают из-за недостаточного спектрального разрешения, используемого при разложении [156]. Ключевое свойство таких фиктивных мод заключается в том, что

при увеличении  $N$  соответствующее им собственное значение стабилизируется и сходится к истинному. Поэтому при определении наименее устойчивой моды дополнительно проводился расчет при  $N = 512$ . Принималось, что сходимость достигнута, если наибольшая разница для  $\gamma_r$  и  $\gamma_i$  не превышала  $10^{-5}$ .

Для определения критических параметров, то есть таких минимальных значений числа Рейнольдса  $Re_{cr}(Ha, \varkappa)$  и волнового числа  $\alpha_{cr}(Ha, \varkappa)$ , при которых появляется неустойчивая мода, используется специально разработанный итерационный алгоритм, идеологически схожий с методом дихотомии. Алгоритм работает в некотором заданном диапазоне волновых чисел  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ . Итерации начинаются с  $Re_{min}$ , такого что  $\gamma_i < 0$  при  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ , и  $Re_{max}$ , такого что  $\gamma_i$  имеет два нуля  $\alpha_1^*$  и  $\alpha_2^*$  в интервале  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ . Итерации деления отрезка пополам продолжаются до тех пор, пока не будет найдено  $Re_{cr}$ , при котором  $\gamma_i$  имеет два нуля, удовлетворяющих условию  $|\alpha_2^* - \alpha_1^*| < 10^{-6}$ . Критическое волновое число при этом определяется как  $\alpha_{cr} = (\alpha_1^* + \alpha_2^*)/2$ . Корректность процедуры определения критических параметров была проверена путем воспроизведения известных результатов для течения Пуазейля [154] и классического течения Гартмана [31].

### 2.3.3 Неустойчивость гартмановского погранслоя

В результате решения уравнения Орра-Зоммерфельда обнаружены два типа неустойчивости, которые значительно различаются по своим характеристикам. Первый тип неустойчивости – это неустойчивость гартмановского погранслоя. Далее в тексте характеристики такого типа неустойчивости обозначены как НГП. В формулах соответствующие этому типу неустойчивости величины помечаются индексом HLI (Hartmann Layer Instability).

В случае однородной электропроводности при  $\varkappa = 0$  порог неустойчивости гартмановского погранслоя соответствует значениям  $Re_{cr} = 47345Ha$  при  $\alpha_{cr} = 0.1615Ha \approx 1/(6\delta_{Ha})$ , что хорошо согласуется с результатами, полученными ранее для классического течения Гартмана [28–31]. На рисунке 2.7 представлена дисперсионная кривая (зависимость скорости роста наименее устойчивой моды от длины волны), полученная при  $Ha = 50$ . Можно заметить, что при  $Re > Re_{cr}$  неустойчивые моды находятся в узком диапазоне волновых

чисел. Вид неустойчивой собственной моды и соответствующее ему поле возмущений вертикальной скорости  $u_z(x, z) = \Re [\hat{w}(z)e^{i\alpha x}]$  приведены на рисунке 2.8. Хорошо видно, что наиболее опасные возмущения оказываются локализованы вблизи погранслоя.

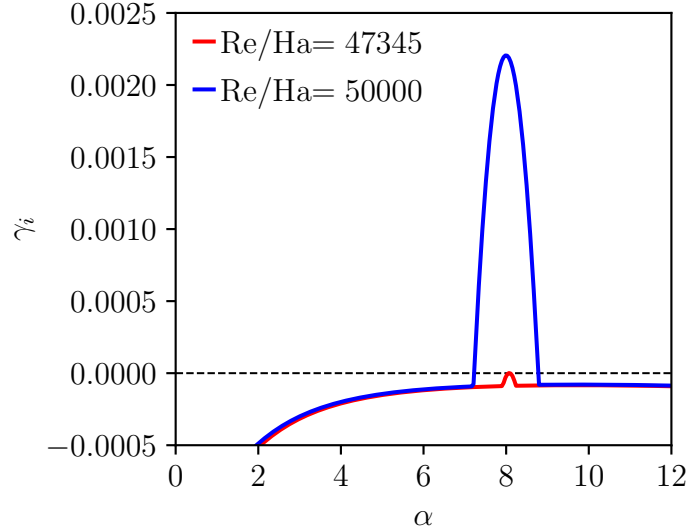


Рисунок 2.7 — Дисперсионная кривая при  $Na = 50$ ,  $\varkappa = 0$

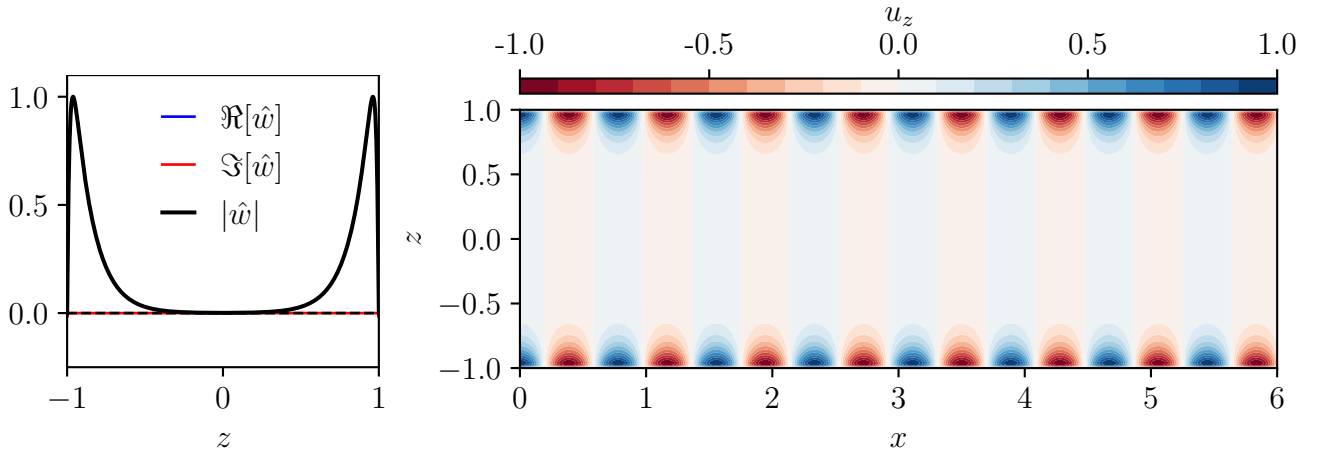


Рисунок 2.8 — Наименее устойчивая собственная мода уравнения Ора–Зоммерфельда при  $Na = 50$ ,  $\varkappa = 0$ ,  $Re = 2.5 \times 10^6$ ,  $\alpha = 8$  (слева) и соответствующее поле возмущений вертикальной скорости (справа)

Характеристики погранслойной неустойчивости при  $\varkappa > 0$  отличаются от таковых при  $\varkappa = 0$ . Из-за асимметрии профиля скорости соответствующие собственные моды также становятся асимметричными. Как показано на рис. 2.3, локальная скорость основного течения выше вблизи стенки  $z = -1$ . Следовательно, критическое число Рейнольдса соответствует нейтральным собственным модам, возмущения скорости которых сосредоточены лишь в одном

гартмановском погранслое, прилегающем к этой стенке. При этом гартмановский погранслой у стенки  $z = 1$  также становится неустойчивым при более высоких значениях  $Re$ . Интересно, что поскольку погранслой вблизи стенки  $z = 1$  тоньше, его неустойчивость связана с возмущениями меньшего характерного масштаба длины, то есть с собственными модами, имеющими большие значения  $\alpha$ . Таким образом, при одном и том же числе Рейнольдса оба гартмановских погранслоя становятся неустойчивыми, но при разных характерных масштабах длины возмущений. Это продемонстрировано на рисунке 2.9, где можно видеть два пика на дисперсионной кривой при  $Re/Na = 121000$ : один при  $\alpha \approx 5$  (соответствует наиболее быстрорастущей собственной моде, локализованной вблизи  $z = -1$ ) и другой при  $\alpha \approx 9$  (соответствует наиболее быстрорастущей собственной моде, локализованной вблизи  $z = 1$ ). Отметим также, что по сравнению с результатами при  $\varkappa = 0$  пики на дисперсионных кривых оказываются значительно шире. Дополнительной иллюстрацией служит рисунок 2.10 – для одних и тех же параметров течения растущие собственные моды локализованы либо вблизи  $z = -1$ , либо вблизи  $z = 1$  в зависимости от значения  $\alpha$ .

Важным является то, что критическое значение числа Рейнольдса существенно снижается по сравнению с результатами для однородной проводимости жидкости. Этот факт обусловлен локальным увеличением скорости вблизи нижней стенки  $z = -1$ . Аналогично, большее значение числа Рейнольдса для погранслойной неустойчивости вблизи верхней стенки  $z = 1$  может быть объяснено локальным снижением скорости относительно среднего значения.

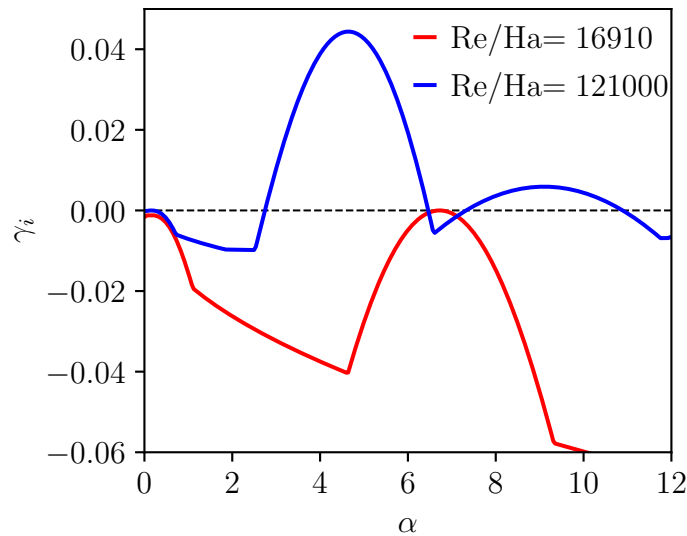


Рисунок 2.9 — Дисперсионная кривая при  $Na = 50$ ,  $\varkappa = 0.5$

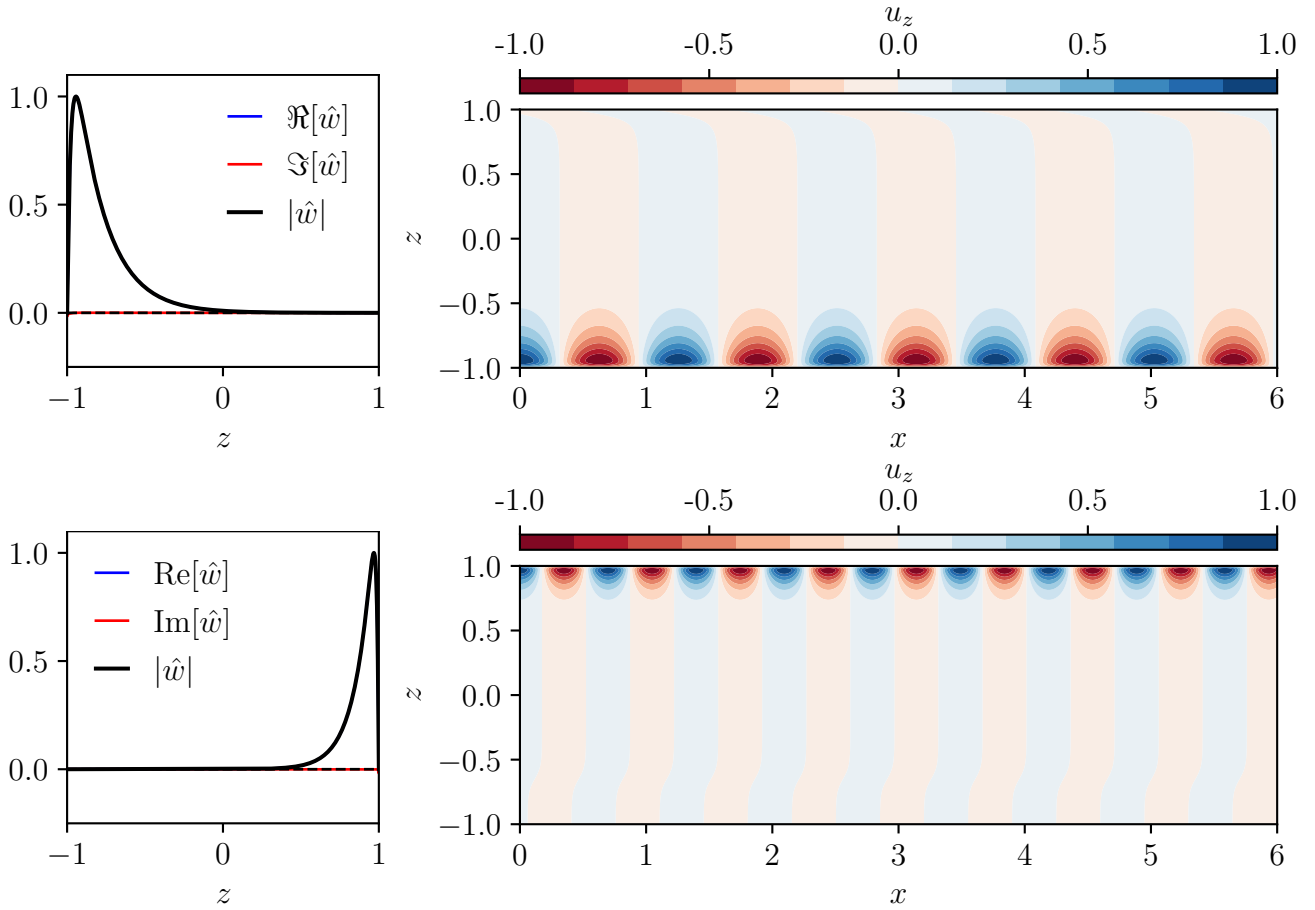


Рисунок 2.10 — Наименее устойчивые собственные моды уравнения Орра–Зоммерфельда при  $Na = 50$ ,  $\varkappa = 0.5$ ,  $Re = 6.05 \times 10^6$  (слева) и соответствующие им поля возмущений вертикальной скорости (справа). Здесь  $\alpha = 5$  (вверху) и  $\alpha = 9$  (внизу)

### 2.3.4 Неустойчивость точки перегиба

Как было показано, профили скорости при  $\varkappa > 0$  имеют точки перегиба. Это открывает возможность для качественно иного типа линейной неустойчивости, который не характерен для классического течения Гартмана. Намек на него можно заметить на рисунке 2.9. При достаточно большом градиенте электропроводности ( $\varkappa = 0.5$ ) при  $Re/Na = 16910$  (красная кривая) возмущения с волновым числом  $\alpha \approx 6$ , локализованные вблизи нижней стенки канала, становятся неустойчивыми. Однако также хорошо заметен некоторый вторичный пик в области малых волновых чисел. Этот пик достаточно медленно приближается к нейтральной оси с ростом  $Re$  и при  $Re/Na = 121000$  проявляется новая длинноволновая неустойчивость (синяя кривая на рисунке 2.10). Таким образом, при  $\varkappa = 0.5$  длинноволновая неустойчивость появляется при значительно

большем критическом числе Рейнольдса, нежели неустойчивость гартмановского погранслоя.

С ростом  $\varkappa$  ситуация меняется. К примеру, как показано на рисунке 2.11, при  $\varkappa = 0.7$  длинноволновая неустойчивость проявляется уже при  $Re_{cr}/Ha = 353$ , в то время как погранслоем вблизи  $z = -1$  становится неустойчивым при  $Re_{cr}/Ha = 8400$ .

Существенным отличием обнаруженной неустойчивости от неустойчивости погранслоя является то, что неустойчивая мода возмущений вертикальной скорости сосредоточена вдали от стенки. Наиболее быстрорастущие моды длинноволновой неустойчивости имеют вид поперечных валов, которые расположены в ядре течения.

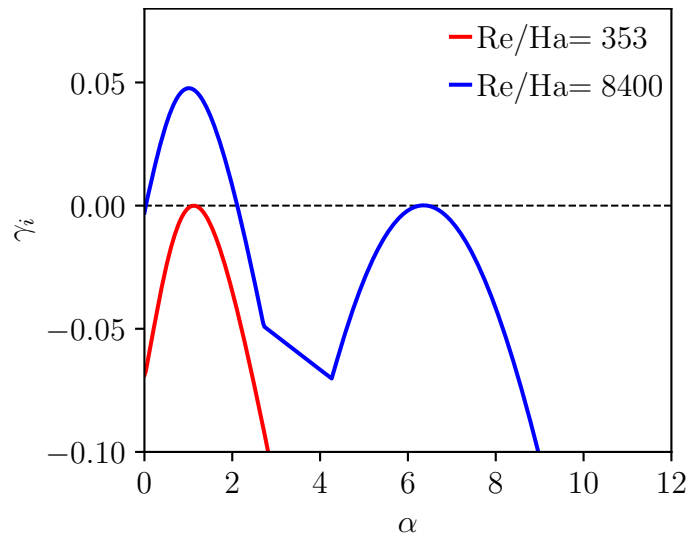


Рисунок 2.11 — Дисперсионная кривая при  $Ha = 50$ ,  $\varkappa = 0.7$

Связь между обнаруженной длинноволновой неустойчивостью и точками перегиба в профиле скорости по-видимому пока не может быть доказана строго, поскольку классическая неустойчивость точки перегиба, определяется для невязких течений без учёта МГД-эффекта [45]. Тем не менее, оказывается возможным привести ряд убедительных доводов в пользу существования такой связи. По этой причине длинноволновую неустойчивость далее будем называть неустойчивостью точки перегиба (НТП), а соответствующие этой неустойчивости характеристики пометать индексом IPI (Inflection Point Instability).

Один из аргументов заключается в локализации неустойчивых собственных мод и соответствующих возмущений скорости вблизи точек перегиба. Как показано на рисунке 2.12, собственная мода продольной скорости, которая

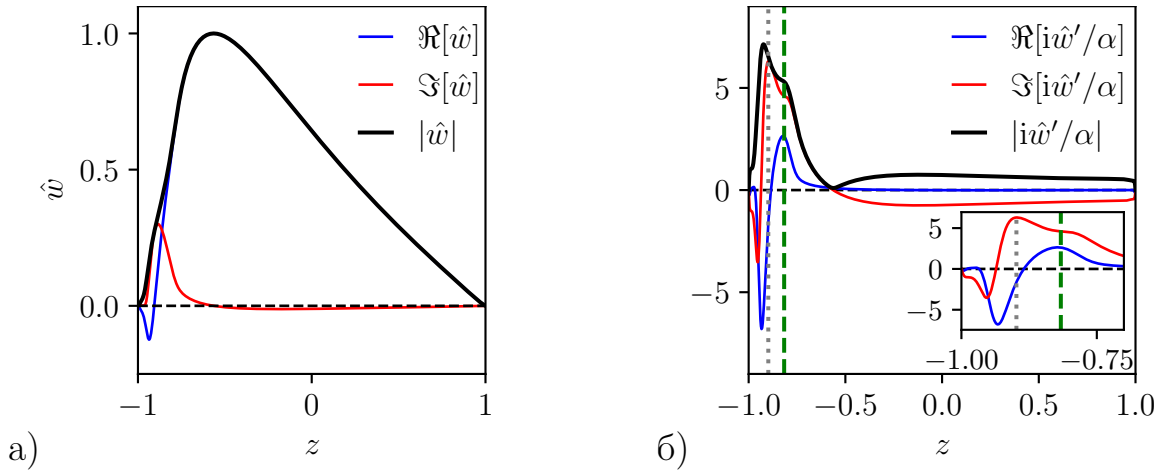


Рисунок 2.12 — Наименее устойчивая собственная мода уравнения Орра–Зоммерфельда (а) и соответствующая ей мода возмущений продольной скорости  $\hat{u}_x = i\hat{w}'/\alpha$  (б) при  $Na = 50$ ,  $\varkappa = 0.7$ ,  $Re = 25000$ ,  $\alpha = \pi/3$ . Штриховая линия соответствует положению точки перегиба. Серая пунктирная линия указывает положение максимума в профиле скорости

связана с собственной модой уравнения Орра–Зоммерфельда  $\hat{w}$  соотношением  $\hat{u}_x = i\hat{w}'/\alpha$ , имеет максимум  $\Re[\hat{u}_x]$  в непосредственной близости от точки перегиба (см. рисунок 2.12(б)). При этом максимум  $\Im[\hat{u}_x]$  совпадает с пиком профиля основной скорости. Как продемонстрировано на рисунке 2.13, и возмущения продольной скорости  $u_x$ , и полная энергия двумерных возмущений  $E_{2D} = u_x^2 + u_z^2$  локализованы в окрестности точки перегиба.

Второй аргумент основан на анализе поведения фазовой скорости  $c = \gamma/\alpha$ . На рисунке 2.14 приведены результаты расчетов для критических значений  $Re_{cr}$ ,  $\alpha_{cr}$ . Можно заметить, что действительная часть фазовой скорости хорошо коррелирует со значением профиля скорости в точке перегиба. Это наблюдение согласуется со сценарием, при котором неустойчивость развивается вокруг точки перегиба, а растущие возмущения увлекаются средним течением.

Ещё один аргумент в поддержку сходства между механизмом НТП и невязким механизмом классической неустойчивости точки перегиба представлен на рисунке 2.15(а). Как видно из представленных результатов, скорость роста длинноволновой неустойчивости имеет невязкий предел. Она стремится к предельному значению при увеличении числа Рейнольдса, причем это значение практически перестает меняться, начиная с  $Re \approx 50Re_{cr}$ . Это наблюдение также позволяет нам оценить предельные скорости роста  $\gamma_i^\infty$ , соответствующие невязкому пределу НТП для различных значений  $Na$  и  $\varkappa$  (см. рису 2.15(б)).

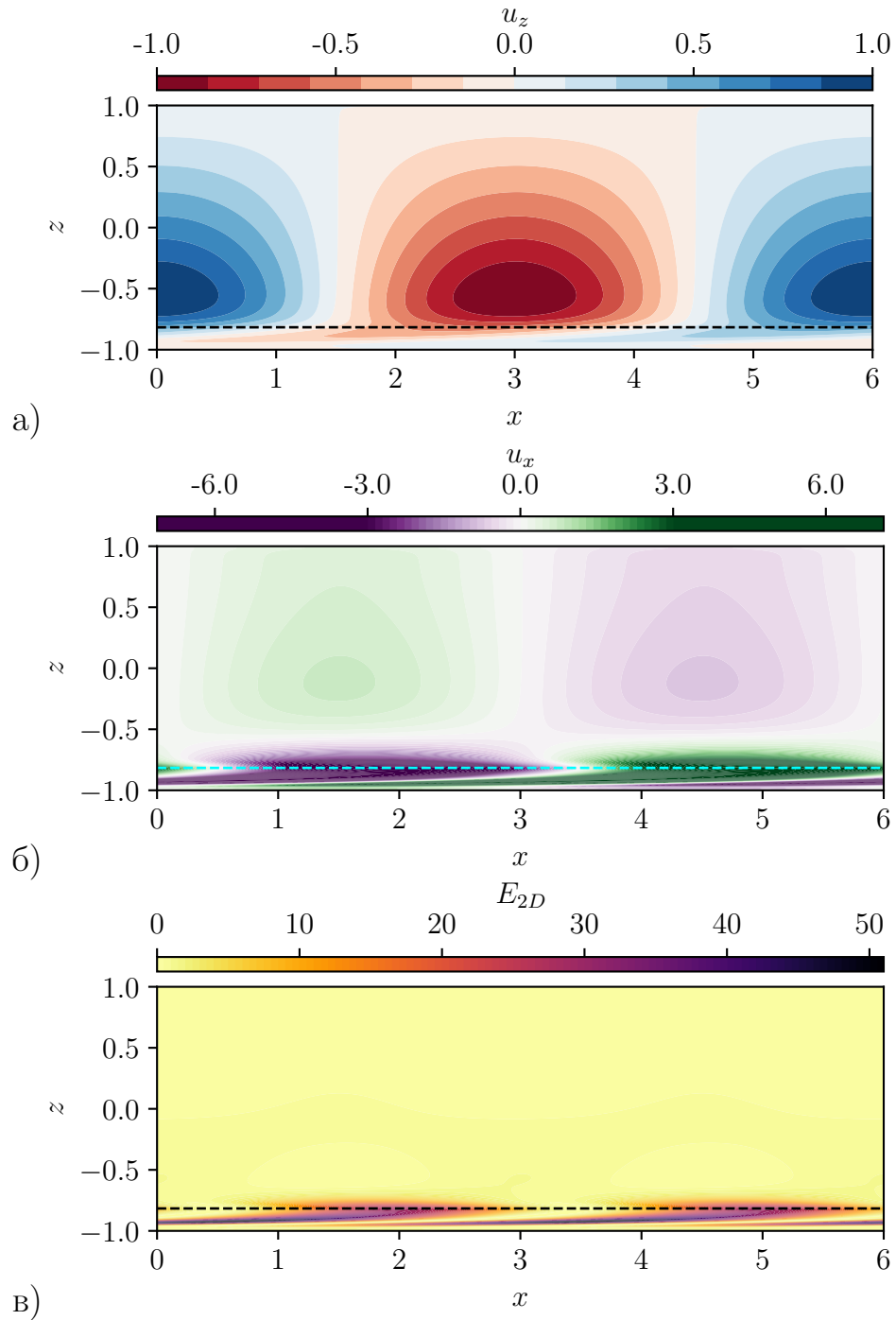


Рисунок 2.13 — Поля возмущений вертикальной (а) и продольной (б) скоростей, а также распределение энергии возмущений  $E_{2D} = u_x^2 + u_z^2$  (в) при  $Na = 50$ ,  $\varkappa = 0.7$ ,  $Re = 25000$ ,  $\alpha = \pi/3$ . Штриховая линия соответствует положению точки перегиба

Поскольку разница между  $\gamma_i|_{Re/Re_{cr}=100}$  и  $\gamma_i|_{Re/Re_{cr}=500}$  составляет менее 1%, на практике используется оценка  $\gamma_i^\infty \approx \gamma_i|_{Re/Re_{cr}=200}$ .

Таким образом, описанные свойства полученных решений позволяют заключить, что найденный тип неустойчивости действительно связан с наличием

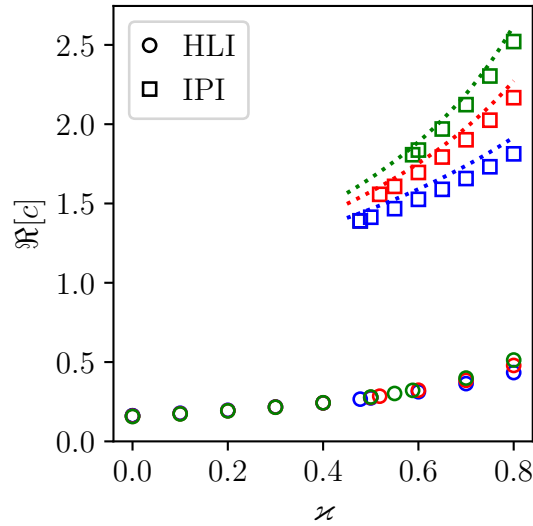


Рисунок 2.14 — Действительная часть фазовой скорости, рассчитанная для критических параметров  $Re_{cr}, \alpha_{cr}$  при  $Ha = 25$  (синий),  $Ha = 50$  (красный) и  $Ha = 100$  (зелёный) в зависимости от градиента электропроводности  $\kappa$ . Пунктирные линии соответствуют значениям основной скорости в точке перегиба

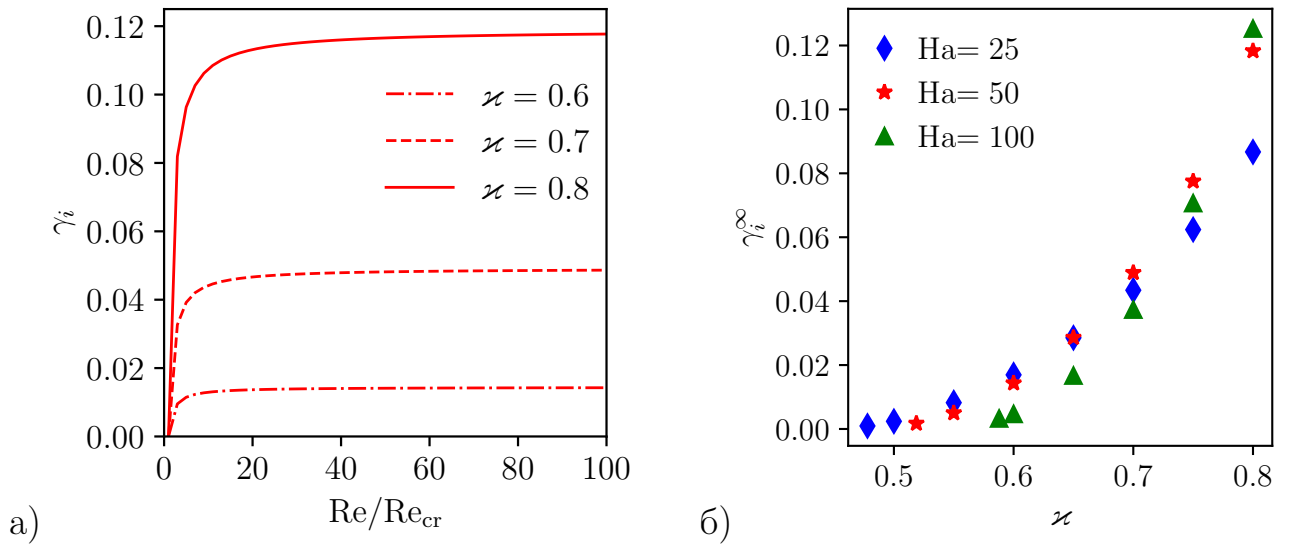


Рисунок 2.15 — (а) Зависимость скорости роста НТП от  $Re/Re_{cr}$  при  $Ha = 50$  для различных  $\kappa$ , рассчитанная при критических волновых числах  $\alpha_{cr}$ , и (б) предельная скорость роста НТП как функция  $\kappa$  при  $Ha = 25$  (синий),  $Ha = 50$  (красный) и  $Ha = 100$  (зелёный)

точки перегиба, которая располагается вблизи максимума профиля скорости. Однако важно отметить, что неустойчивых мод, связанных со второй точкой перегиба вблизи верхней стенки (где скорость течения ниже), обнаружено не было.

### 2.3.5 Сравнение критических параметров двух типов линейной неустойчивости

Разделение в пространстве волновых чисел позволяет нам рассчитать пороги линейной устойчивости  $Re_{cr}$  для неустойчивостей типов НГП и НТП по отдельности. Результаты расчетов сведены на рисунке 2.16.

При  $\varkappa = 0$  электропроводность жидкости однородна, профиль скорости совпадает с профилем классического течения Гартмана и не имеет точек перегиба. При низких и умеренных значениях градиента электропроводности  $\varkappa \lesssim 0.5$  критические числа Рейнольдса для неустойчивости гартмановского погранслоя оказываются значительно ниже, чем для неустойчивости точки перегиба. При этом  $Re_{cr}^{HLI}$  уменьшается с увеличением  $\varkappa$ . Эта тенденция объясняется перекосом профиля скорости с ростом  $\varkappa$  и появлением областей, где скорость течения локально возрастает по сравнению со средним значением.

Результаты, представленные на рисунке 2.16, показывают, что при каждом рассмотренном в работе значении  $Na$  может существовать пороговое значение  $\varkappa_{lim}^{IPI}$ , ниже которого НТП не возникает даже при очень больших значениях  $Re$ . Этот факт является примечательным и может послужить основой для дальнейших исследований, касающихся связи точки перегиба и возникновения линейной неустойчивости течений жидкости с конечной вязкостью. Представляется, что для возникновения неустойчивости в точке перегиба должны быть достаточно высокими локальные значения числа Рейнольдса и амплитуды завихренности. Отчасти это также объясняет то, что даже при больших градиентах электропроводности НТП обнаруживается вблизи точки перегиба при  $z < 0$ , но не проявляется вблизи её аналога при  $z > 0$ . Вопросы существования предельного значения  $\varkappa_{lim}^{IPI}$  для НТП и обнаружения неустойчивости в окрестности второй точки перегиба не рассматриваются подробнее главным образом потому, что они относятся к не имеющей явного практического значения задаче о линейной устойчивости уже сильно неустойчивого течения при  $Re \gg Re_{cr}^{HLI}$ .

При  $\varkappa > \varkappa_{lim}^{IPI}$  критическое число Рейнольдса для НТП  $Re_{cr}^{IPI}$  очень быстро снижается и при некотором значении  $\varkappa_e$  сравнивается с критическим числом Рейнольдса для неустойчивости погранслоя  $Re_{cr}^{HLI}$ . Таким образом, при  $\varkappa = \varkappa_e$  нейтральные кривые НГП и НТП в плоскости параметров  $\varkappa - Re_{cr}$  пересекаются. Соответствующие значения чисел Рейнольдса для различных чисел Гартмана

приведены в таблице 4 вместе со значениями  $\alpha_{\text{cr}}$  для обоих типов неустойчивости. Отдельно подчеркнем, что найденные значения  $\varkappa_e$  существенно выше тех значений  $\varkappa$ , при которых появляются точки перегиба.

Таблица 4 — Значения параметров, при которых нейтральные кривые НГП и НТП пересекаются

Ha	$Re_{\text{cr}}$	$\varkappa_e$	$\alpha_{\text{cr}}^{\text{HLI}}$	$\alpha_{\text{cr}}^{\text{IPI}}$
25	425000	0.4779	3.76	0.26
50	800800	0.5188	6.68	0.31
100	1352000	0.5879	11.9	0.38

Скорость убывания  $Re_{\text{cr}}^{\text{IPI}}$  при  $\varkappa > \varkappa_e$  оказывается значительно большей, чем скорость убывания  $Re_{\text{cr}}^{\text{HLI}}$ . Это приводит к тому, что при больших  $\varkappa$  критическое значение для НТП оказывается на порядок ниже, чем для погранслоевой неустойчивости. Так, к примеру, при  $Ha = 50$  и  $\varkappa = 0.7$  неустойчивость точки перегиба возникает при  $Re = 17665$  ( $Re/Ha = 353.3$ ), тогда как НГП появляется при значительно большем  $Re \approx 420000$  ( $Re/Ha = 8400$ ).

Представленные на рисунке 2.16 результаты позволяют также оценить зависимость  $Re_{\text{cr}}$  и  $\alpha_{\text{cr}}$  от числа Гартмана. Можно предположить, что линейная зависимость критических параметров от  $Ha$  для гартмановского погранслоя  $Re_{\text{cr}} \sim Ha$ ,  $\alpha_{\text{cr}} \sim Ha$ , ожидаемая для НГП при  $\varkappa = 0$  [28; 31], остается применимой также и при умеренных  $\varkappa > 0$  (см. рис. 2.16(в,г)). При этом для неустойчивости точки перегиба критическое волновое число  $\alpha_{\text{cr}}$  практически не зависит от  $Ha$  (см. рис. 2.16(б)), а зависимость  $Re_{\text{cr}}^{\text{IPI}}$  от числа Гартмана не является универсальной.

В порядке обсуждения можно упомянуть также вопрос о выборе параметризации неоднородности свойств и определения значений управляющих параметров. В рассматриваемом в главе случае локальное изменение электропроводности отсчитывалось от среднего поперек канала значения, которое достигалось в центре канала. Соответствующее число Гартмана также определялось по среднему значению электропроводности. Интересно рассмотреть также альтернативную параметризацию, при которой электропроводность (и, соответственно, число Гартмана) определяется относительно максимального или минимального значения. Для определенности рассмотрим случай, в котором проводимость распределена таким образом, что снизу она остается

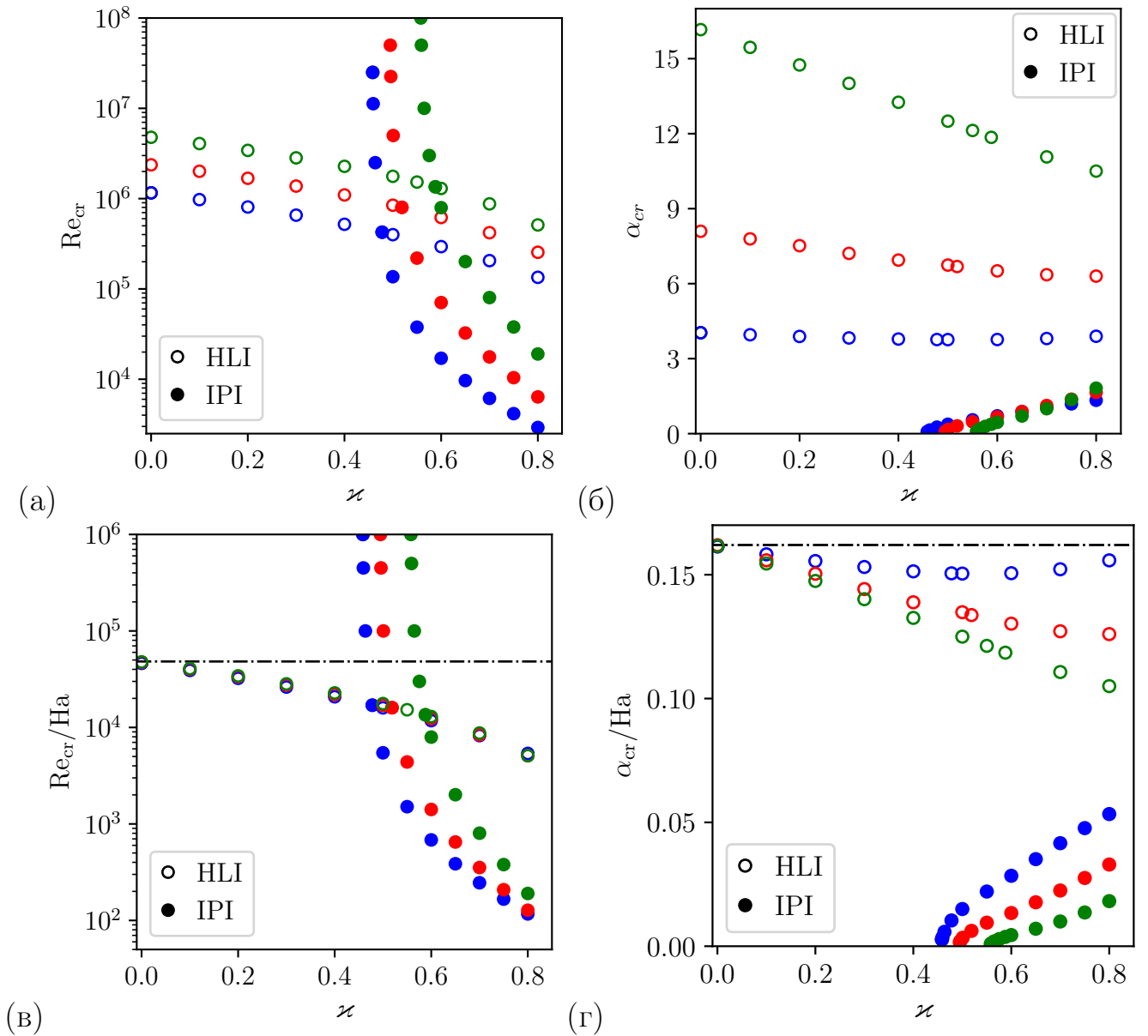


Рисунок 2.16 — Пороговые значения параметров линейной устойчивости в зависимости от  $z$  при  $Ha = 25$  (синий),  $Ha = 50$  (красный) и  $Ha = 100$  (зелёный). Здесь (а) критическое число Рейнольдса  $Re_{cr}$ , (б) критическое волновое число  $\alpha_{cr}$ , (в, г) нормированные значения  $Re_{cr}$  и  $\alpha_{cr}$  соответственно. Чёрная штрихпунктирная линия на (в, г) соответствует порогу линейной неустойчивости классического течения Гартмана [31]

неизменной по сравнению с однородным течением, а сверху увеличивается (не обсуждая физические причины такого возможного изменения):

$$\sigma(z) = \sigma_b [1 + \chi(z + 1)], \quad \chi > 0. \quad (2.50)$$

Тогда на верхней стенке имеем  $\sigma(1) = \sigma_b(1 + 2\chi)$ . Пусть число Гартмана при этом определяется по минимальному значению проводимости  $\text{Ha}' = Bh\sqrt{\sigma_b/\rho\nu}$ . В таком случае локальное число Гартмана увеличивается с высотой. Исходя из того, что для обоих видов параметризации вид профиля скорости, а значит и силы Лоренца, должен совпадать, можно получить связь между параметрами исходной (в терминах  $\text{Ha}$  и  $\varkappa$ ) и перенормированной ( $\text{Ha}'$  и  $\chi$ ) постановок

$$\text{Ha}' = \text{Ha}\sqrt{1 - \varkappa}, \quad \chi = \frac{\varkappa}{1 - \varkappa}. \quad (2.51)$$

Пусть рассматривается течение Гартмана однородной жидкости при  $\text{Ha} = 50$ . Граница линейной устойчивости в таком случае есть  $\text{Re}_{\text{cr}} \approx 50000\text{Ha} = 2.5 \times 10^6$ . Пусть затем распределение электропроводности изменилось таким образом, что вблизи верхней стенки проводимость повысилась в 4 раза ( $\chi = 3$ ). В терминах исходной параметризации, которая использовалась всюду в главе, это соответствует  $\varkappa = 0.6$  и  $\text{Ha} = 79.057$ . Критическое число Рейнольдса для неустойчивости точки перегиба при этом  $\text{Re}_{\text{cr}}^{\text{PI}} = 291828$ , т.е. все равно значительно ниже исходной границы линейной устойчивости.

#### 2.4 Прямое численное моделирование развития неустойчивости точки перегиба в течении Гартмана с линейно распределенной электропроводностью

С целью подтверждения результатов линейного анализа, а также для иллюстрации развития неустойчивости, проведено прямое численное моделирование. Следует сразу подчеркнуть, что это моделирование служит именно демонстрацией перехода, предсказанного линейным анализом устойчивости, но не отражает в полной мере реальной нелинейной эволюции течения. Это связано с тем, что линейное распределение  $\sigma$  предполагается неизменным на протяжении всего перехода. В действительности с ростом амплитуды возмущений поперечный перенос скалярного поля, которое определяет распределение

электропроводности, становится значительным. Это приводит к существенному искажению исходного распределения  $\sigma$ .

Полная система уравнений (2.8)–(2.10) решалась численно с использованием конечно-разностной схемы второго порядка аппроксимации по пространству и по времени, обобщенной на случай неоднородной электропроводности. Исходная схема неоднократно использовалась для моделирования МГД-течений при больших числах  $Ha$  [157–159]. Расчеты выполнялись на совмещенной сетке, однородной по координатам  $x$  и  $y$  и сгущающейся вблизи стенок по координате  $z$  согласно преобразованию

$$z = \frac{\text{th}(A\zeta)}{\text{th}A}. \quad (2.52)$$

Здесь  $\zeta$  – перемасштабированная вертикальная координата, для которой сеточное разбиение однородно;  $A$  – коэффициент, определяющий степень сгущения сетки. Для разрешения гартмановских погранслоев во всех расчетах полагалось  $A = 2$ . Консервативность схемы обеспечивается вычислением пространственных производных с использованием интерполяции на полуцелые точки сетки в соответствии с подходом, предложенным в работах [160; 161]. Схема является полностью консервативной в невязком пределе относительно массы, импульса и электрического заряда.

Дискретизация по времени выполняется с использованием схемы Адамса-Бэшфорда второго порядка. Алгоритм перехода с временного шага ( $n$ ) на шаг ( $n + 1$ ) содержит следующие шаги:

1. По известному с предыдущего временного шага полю скорости  $\mathbf{u}^{(n)}$  определяется распределение электрического потенциала

$$\begin{aligned} \Delta\phi^{(n)} + \frac{\varkappa}{1 + \varkappa z} \frac{\partial\phi^{(n)}}{\partial z} &= \nabla \cdot (\mathbf{u}^{(n)} \times \mathbf{e}_z), \\ \frac{\partial\phi^{(n)}}{\partial z} &= 0, \quad z = \pm 1. \end{aligned} \quad (2.53)$$

2. Вычисляется плотность электрического тока

$$\mathbf{j}^{(n)} = (1 + \varkappa z) \left( -\nabla\phi^{(n)} + \mathbf{u}^{(n)} \times \mathbf{e}_z \right). \quad (2.54)$$

3. Вычисляется вектор

$$\mathbf{F}^{(n)} = \mathbf{u}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^{(n)} + \frac{Ha^2}{\text{Re}} \mathbf{j}^{(n)} \times \mathbf{e}_z. \quad (2.55)$$

4. Определяется промежуточное поле скорости  $\mathbf{u}^*$

$$\frac{3\mathbf{u}^* - 4\mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} = 2\mathbf{F}^{(n)} - \mathbf{F}^{(n-1)}, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{0}, \quad z = \pm 1.$$

5. Решается уравнение Пуассона для давления

$$\Delta p^{(n+1)} = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial z} = 0, \quad z = \pm 1.$$

6. Определяется поле скорости на новом временном шаге

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^* - \frac{2}{3}\Delta t \nabla p^{(n+1)}. \quad (2.58)$$

Уравнения для электрического потенциала и давления решались с использованием прямого решателя, основанного на алгоритме циклической редукции, реализованного с использованием программного модуля для решения разделимых эллиптических уравнений Fishpack. Стоит отметить, что при постановке задачи с перемешивающимся распределением электропроводности уравнение для электрического потенциала перестает быть разделимым и для его решение требуется использование специальных процедур. Для распараллеливания вычислений используется комбинированный OpenMP+MPI подход.

Помимо полной нелинейной системы также решались линеаризованные уравнения. Это делалось для сопоставления результатов моделирования с результатами линейного анализа, а также для оценки влияния структур, неоднородных по координате  $y$ . Расчеты в линеаризованной и полной постановках начинались с поля скорости в виде случайного трехмерного шума заданной амплитуды. Моделирование в рамках линеаризованной задачи велось до выхода скорости роста энергии возмущений на постоянное значение. Нелинейные расчеты продолжались до перехода течение в состояние турбулентности, либо до затухания начальных возмущений.

Результаты решения линеаризованных уравнений подтвердили отсутствие влияния неоднородных по  $y$  структур на рост возмущений на линейном этапе. Также было показано, что для различных наборов значений параметров ( $Na$ ,  $Re$ ,  $\kappa$ ) результаты моделирования хорошо совпадают с результатами линейного анализа устойчивости. Расхождение в скоростях роста наименее устойчивых мод возмущений составило порядка 1%.

В силу отсутствия влияния поперечно неоднородных структур на линейный рост возмущений НТП, решение полной нелинейной системы проводилось в расчетной области размером  $[0, 6] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  на сетке  $128 \times 64 \times 128$  элементов. Шаг по времени во всех расчетах был постоянный и составлял  $\Delta t = 10^{-3}$ . Расчеты проводились при  $Na = 50$  для нескольких значений  $15000 \leq Re \leq 75000$  и  $0.5 \leq \varkappa \leq 0.7$ . Значения параметров были специально выбраны так, чтобы была возможность наблюдать лишь неустойчивость точки перегиба.

Во всех рассмотренных расчетах наблюдался сверхкритический переход в соответствии с результатами линейного анализа, то есть при  $Re < Re_{cr}$  происходило затухание начальных возмущений, а при  $Re > Re_{cr}$  – рост с последующим переходом в турбулентность. Так как сценарий затухания начальных возмущений не представляет особого интереса, далее подробно рассмотрим эволюцию течения в закритическом режиме при  $\varkappa = 0.7$ ,  $Re = 25000 = 1.415 Re_{cr}^{IPI}$ .

На рисунке 2.17 представлены зависимости от времени энергии возмущений каждой из компонент скорости

$$E_x = \frac{1}{V} \int_V (u_x - U)^2 dV, \quad E_y = \frac{1}{V} \int_V u_y^2 dV, \quad E_z = \frac{1}{V} \int_V u_z^2 dV \quad (2.59)$$

и скоростей роста энергии возмущений каждой из компонент

$$\gamma_x = \frac{1}{2E_x} \frac{dE_x}{dt}, \quad \gamma_y = \frac{1}{2E_y} \frac{dE_y}{dt}, \quad \gamma_z = \frac{1}{2E_z} \frac{dE_z}{dt}. \quad (2.60)$$

Расчет начинался с трехмерного шума амплитудой  $10^{-2}$ . На начальном этапе (до  $t \approx 100$ ) наблюдается затухание начальных возмущений, которое затем сменяется экспоненциальным ростом возмущений вертикальной скорости  $u_z$  (начиная с  $t \approx 150$ ) и возмущений продольной скорости  $u_x$  (начиная с  $t \approx 350$ ). Этап экспоненциального роста продолжается до  $t \approx 450$ . Скорость роста возмущений вертикальной скорости при этом достигает значения  $\gamma_z = 0.013$ , что отличается от результата решения уравнения Орра-Зоммерфельда при соответствующих параметрах  $\gamma_i = 0.014375$  менее чем на 10%. Занижение скорости роста при моделировании обусловлено диссипативной ошибкой используемой схемы. Исоповерхности возмущений вертикальной скорости при  $t = 450$  показаны на рисунке 2.18. Можно видеть, что растущие возмущения представляют собой крупномасштабные структуры, однородные вдоль координаты  $y$ .

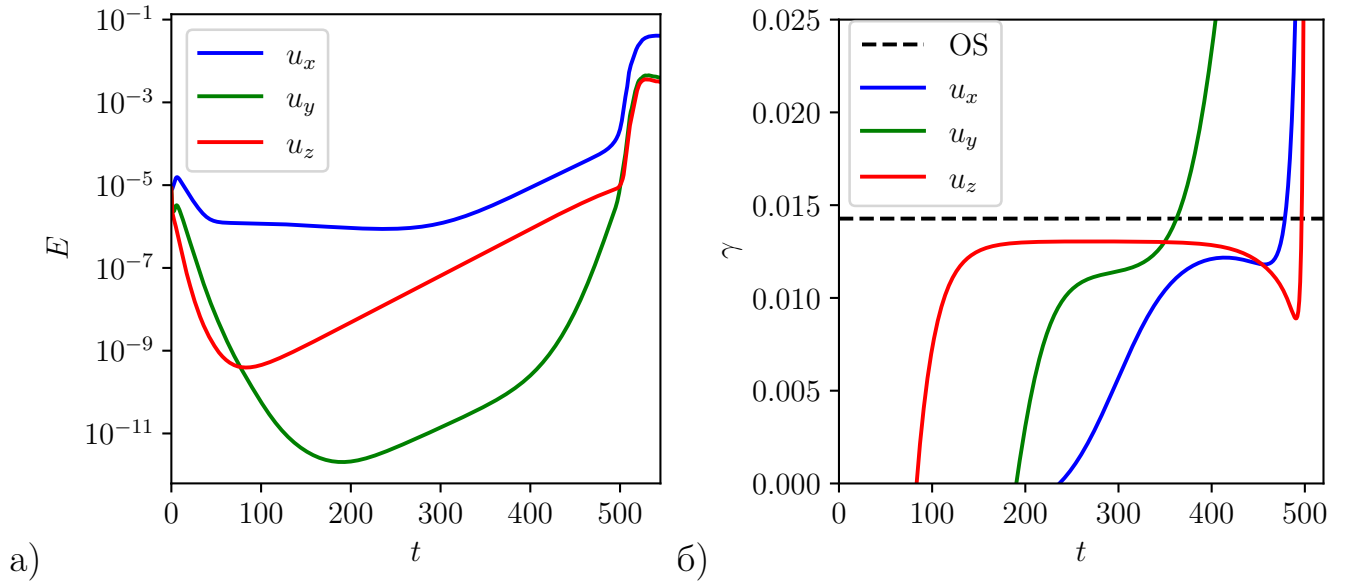


Рисунок 2.17 — Зависимости кинетической энергии возмущений различных компонент скорости (а) и скоростей роста каждой из компонент (б) от времени. Расчеты проведены при  $Na = 50$ ,  $Re = 25000$ ,  $\varkappa = 0.7$ . Штриховая линия на подрисунке (б) соответствует значению скорости роста, полученному в результате решения уравнения Орра-Зоммерфельда (2.37)

Вторая стадия эволюции течения связана с развитием вторичной неустойчивости, которая отчетливо проявляется в виде резкого увеличения скорости роста энергии возмущений поперечной компоненты скорости  $u_y$ , начиная с  $t \approx 350$ . Растущие возмущения представляют собой вытянутые в направлении течения структуры, локализованные в окрестности точки перегиба. При  $t \approx 490$  энергия возмущений поперечной скорости  $E_y$  оказывается сопоставима с энергией возмущений вертикальной скорости  $E_z$ .

Наконец, на третьей стадии происходит нелинейное взаимодействие возмущений, приводящее к значительному искажению мод НТП (см. рисунок 2.18 при  $t = 505$ ) и сопровождающееся резким увеличением скорости роста энергии возмущений всех трех компонент скорости. Наконец, при  $t \approx 530$  течение становится турбулентным.

Описанный сценарий (начальное затухание возмущений – этап экспоненциального роста мод НТП – возникновение вторичной неустойчивости – нелинейное взаимодействие и последующий переход в турбулентность) наблюдался во всех закритических режимах вне зависимости от начальной амплитуды трехмерного шума. Таким образом можно заключить, что результаты прямо-

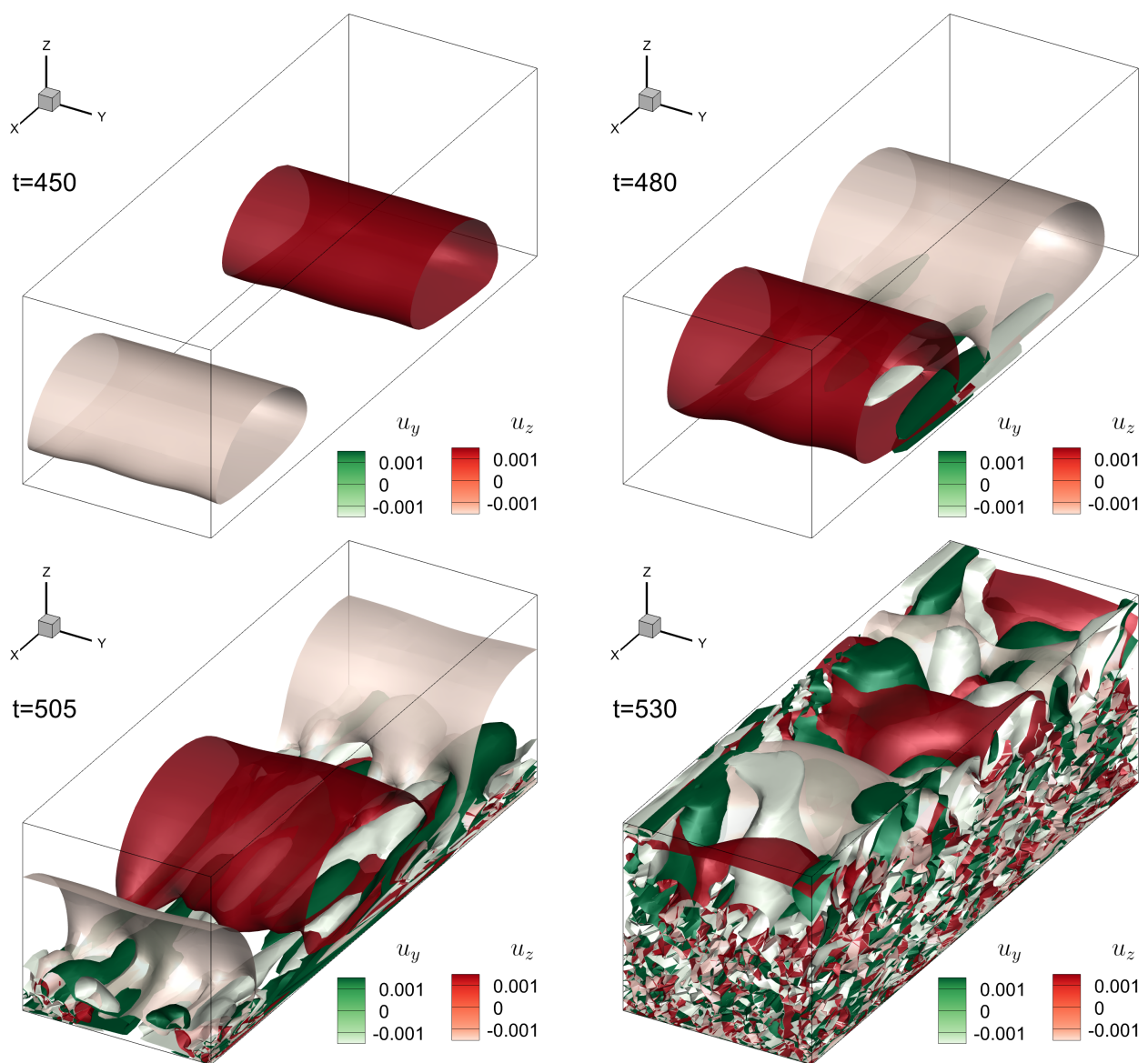


Рисунок 2.18 — Исоповерхности возмущений компонент скорости  $u_z$  (красно-белый) и  $u_y$  (бело-зеленый) в различные моменты времени. Расчеты проведены при  $Na = 50$ ,  $Re = 25000$ ,  $\kappa = 0.7$

го численного моделирования согласуются с результатами линейного анализа устойчивости.

Еще раз подчеркнем, что проведенное моделирование является в большей степени иллюстрацией. Тем не менее, рассмотренная постановка с «замороженной» электропроводностью может быть получена как предельный случай бесконечно малых значений чисел Прандтля и Грасгофа при рассмотрении задачи с температурной зависимостью электропроводности. Для неизотермического течения в канале, к примеру, с холодной нижней стенкой и горячей верхней распределение температуры будет, очевидно, линейным по высоте канала. Приняв линейную зависимость электропроводности от температуры получим линей-

ное же распределение электропроводности и стационарный профиль скорости, аналогичный рассмотренному в настоящей главе. При малом, но отличном от нуля значении числа Прандтля (характерного для жидких металлов) значимое различие с полученными результатами может наблюдаться, по-видимому, на последней стадии эволюции течения, когда возмущения температуры станут достаточно большими.

## 2.5 Выводы по главе

Показано, что неоднородное распределение электропроводности жидкости приводит к существенной перестройке профиля скорости МГД-течения гартмановского типа. Для линейного распределения электропроводности получены асимметричные стационарные профили скорости, характеризующиеся наличием точек перегиба.

В рамках линейного анализа исследована устойчивость полученных профилей в зависимости от величины градиента электропроводности  $\kappa$ . Обнаружены два типа линейной неустойчивости. Первый тип связан с неустойчивостью гартмановского погранслоя (НГП). Наименее устойчивые возмущения для неустойчивости такого типа характеризуются большими значениями волновых чисел и локализованы в погранслое. Второй тип неустойчивости связан с наличием точки перегиба вблизи максимума в профиле скорости. Наименее устойчивые возмущения НТП имеют форму крупномасштабных структур, сосредоточенных в ядре течения и характеризующихся малым значением волновых чисел. Соответствующие моды возмущений продольной скорости и пространственное распределение энергии возмущений оказываются локализованными вблизи точки перегиба.

Определены критические значения числа Рейнольдса для обоих типов неустойчивости в зависимости от величины градиента электропроводности. Показано, что критическое число Рейнольдса для НГП снижается с увеличением  $\kappa$ . Неустойчивость точки перегиба возникает при некотором значении  $\kappa$ , которое существенно больше порога появления точек перегиба в профиле скорости. Критическое число Рейнольдса для НТП быстро уменьшается с увеличением  $\kappa$  и оказывается на порядок ниже по сравнению с критическим числом Рей-

нольдса для НГП при больших  $\mathcal{R}$ . Критическое волновое число для мод НТП не зависит от числа Гартмана и определяется только градиентом электропроводности.

В рамках прямого численного моделирования проиллюстрирован сценарий развития неустойчивости точки перегиба с последующим переходом течения в турбулентность. Результаты моделирования хорошо согласуются с результатами линейного анализа устойчивости.

Результаты главы опубликованы в статьях [3; 6].

## ГЛАВА 3. ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ В МГД-УСТРОЙСТВАХ

Проведенный обзор показывает, что пространственные неоднородности среды в технологических МГД-процессах могут выступать в принципиально разных качествах. В процессах, реализующих контроль характеристик течения локализованные неоднородности необходимы, поскольку именно они выступают трассерами, по движению которых можно судить о скорости течения. В других процессах, характерных в первую очередь для металлургии, наличие неоднородностей зачастую нежелательно, поскольку оно может приводить к ухудшению свойств получаемых изделий. Отсюда возникает задача реализации эффективного перемешивающего течения. В обоих случаях центральным является вопрос о том, как эволюционирует неоднородность и как на эту эволюцию влияет структура самого течения. В настоящей главе исследуется главным образом первый вопрос, а именно рассматривается влияние диффузионных свойств среды на появление систематической погрешности при оценке скорости течения вихрепролетным методом.

Все варианты метода лагранжевых меток базируются на гипотезе Тейлора о том, что регистрируемые возмущения «вморожены» в жидкость. Как известно, металлы обладают высокими электро- и теплопроводностью, что приводит к искажению меток за счет диффузии. Это может быть причиной появления систематической ошибки в оценке скорости даже в ламинарных режимах течения. Таким образом, количественная оценка возникающей погрешности и, как следствие, границ применимости метода лагранжевых меток представляет собой практически важную задачу.

### 3.1 Постановка задачи

Для демонстрации влияния диффузии на точность измерения скорости методом лагранжевых меток рассмотрим одномерный перенос скалярной величины  $\theta$  потоком жидкости вдоль оси  $Ox$ . Предполагается, что скорость потока  $V$  постоянна и однородна. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  распределение скаляра  $\theta_0$  однородно всюду, за исключением некоторой локализованной

области вблизи точки  $x_0$ . Тогда задача сводится к исследованию эволюции начального возмущения скаляра, которое переносится однородным течением со скоростью  $V$ , а также расплывается и затухает вследствие диффузии.

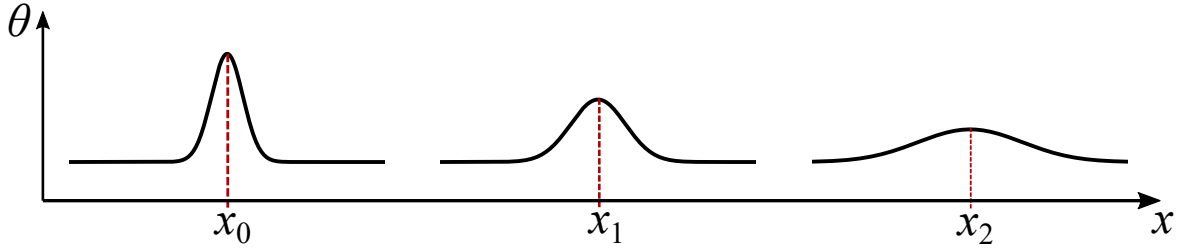


Рисунок 3.1 — Схема процесса определения скорости методом лагранжевых меток: начальное возмущение генерируется в точке  $x_0$ , а затем переносится потоком и регистрируется в точках  $x_1$  и  $x_2$

На примере одномерной задачи можно смоделировать процедуру определения скорости методом лагранжевых меток. Для этого требуется в каждый момент времени  $t$  определять значение скаляра в двух пространственных точках  $x_1$  и  $x_2$ . На основе полученных двух временных сигналов  $\theta_1(t) = \theta(x_1, t)$  и  $\theta_2(t) = \theta(x_2, t)$  скорость течения может быть определена как

$$V^* = \frac{x_2 - x_1}{\operatorname{argmax} [\theta_2(t)] - \operatorname{argmax} [\theta_1(t)]}, \quad (3.1)$$

Схема постановки задачи приведена на рисунке 3.1.

Одномерное уравнение переноса скаляра с учетом диффузии имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + V \frac{\partial \theta}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

где  $\beta$  — коэффициент диффузии. Считается, что положение максимума начального распределения скаляра и положение точек регистрации сигналов находятся достаточно далеко от границ области, так что влиянием граничных условий можно пренебречь и рассматривать задачу на бесконечной прямой. Выбирая в качестве характерных единиц длины, скорости, времени и скаляра расстояние между точками регистрации сигналов  $d = x_2 - x_1$ , скорость потока  $V$ ,  $d/V$  и  $\Theta = \max [\theta_0]$  соответственно, получим обезразмеренную форму уравнения (3.2)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} = \operatorname{Pe}^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (3.3)$$

где  $\operatorname{Pe} = Vd/\beta$  — аналог числа Пекле, характеризующего отношение диффузионного времени к адвективному. Важное отличие от классического числа Пекле

заключается в том, что в качестве характерного масштаба выбран не характерный размер системы, а характерное расстояние вдоль распространения потока.

Формальное аналитическое решение уравнения (3.3) записывается с помощью интеграла Пуассона

$$\theta(x, t) = \frac{\sqrt{\text{Pe}}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(x') \exp \left[ -\text{Pe} \frac{(x - x' - t)^2}{4t} \right] dx'. \quad (3.4)$$

Для получения модельных сигналов интеграл (3.4) вычислялся численно с использованием быстрого преобразования Фурье и теоремы о свертке. Дополнительно уравнение (3.3) также решалось численно в пространстве Фурье, после чего на каждом шаге по времени проводилось обратное преобразование, что позволяло получить искомые сигналы. Оба подхода ожидаемо дали идентичный результат.

### 3.2 Перенос единичных возмущений простой формы

В качестве начальной формы возмущений рассматривались несколько функций, а именно: одиночный импульс

$$\theta_0(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0, \end{cases} \quad (3.5)$$

функция Гаусса

$$\theta_0(x) = \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{b^2} \right], \quad (3.6)$$

а также ее первая

$$\theta_0(x) = -\frac{\sqrt{2e}}{b} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{b^2} \right] (x - x_0) \quad (3.7)$$

и вторая

$$\theta_0(x) = \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{b^2} \right] - \frac{2}{b^2} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{b^2} \right] (x - x_0)^2 \quad (3.8)$$

производные. Здесь  $x_0$  соответствует положению центра симметрии начального возмущения и может интерпретироваться как положение точки генерации

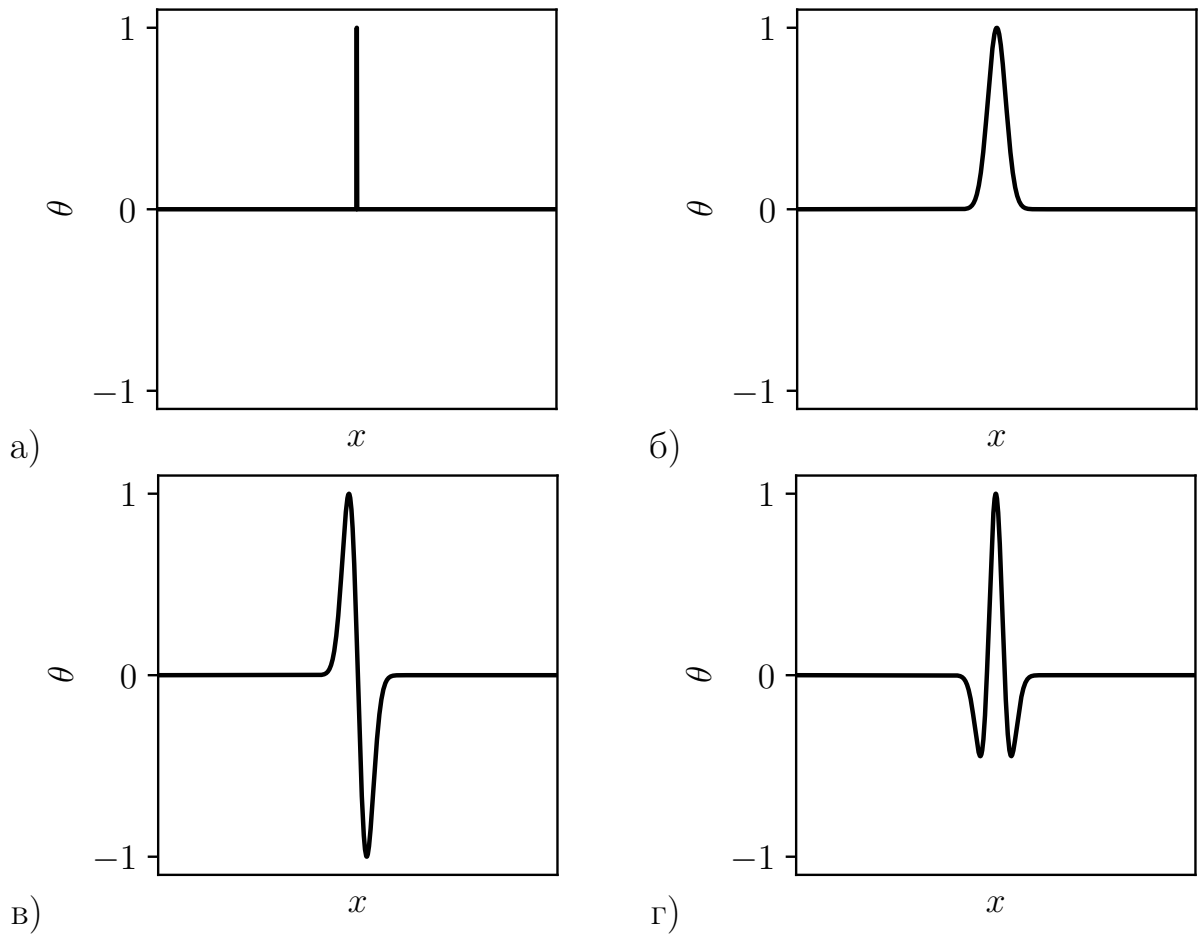


Рисунок 3.2 — Вид рассмотренных начальных возмущений: а) единичный импульс (3.5), б) функция Гаусса (3.6), в) первая производная функции Гаусса (3.7), г) вторая производная функции Гаусса (3.8)

лагранжевой метки, а параметр  $b$  в формулах (3.6)–(3.8) характеризует эффективную ширину метки. Вид рассмотренных начальных возмущений показан на рисунке 3.2. Во всех расчетах использовались значения параметров  $x_0 = 0.25$  и  $b = 1/20\sqrt{10}$ . Это соответствует ситуации, в которой эффективная ширина лагранжевой метки мала по сравнению с расстоянием между датчиками. Отметим, что отрицательные значения скалярной величины допустимы, потому что в качестве нее разумно рассматривать нормированное отклонение какой-либо характеристики жидкости от ее среднего значения.

Вычисления скорости показывают, что до некоторого значения числа Пекле восстанавливаемое значение скорости переноса систематически оказывается выше, чем реальная скорость потока (которая в безразмерной постановке задачи есть 1). При этом, начиная со значений числа Пекле порядка  $5 \cdot 10^{-3}$ , для всех рассмотренных типов начальных возмущений скорость течения восстанавливается точно (с точностью до значения, соответствующего частоте дискретизации

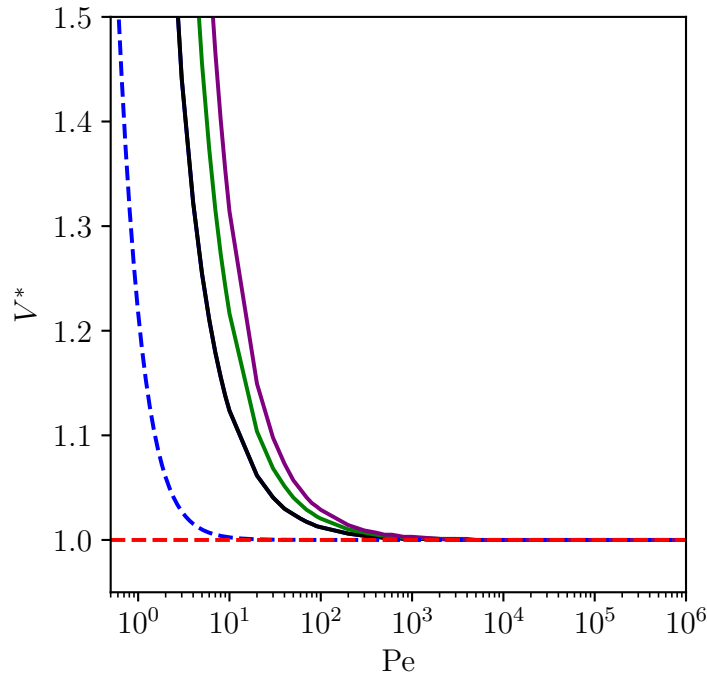


Рисунок 3.3 — Отношение вычисленной скорости к истинной в зависимости от числа Пекле для различных распределений (синий — одиночный импульс, черный — функция Гаусса, зеленый — первая производная функции Гаусса, фиолетовый — вторая производная функции Гаусса). Синей штриховой линией показано аналитическое решение для начального возмущения в виде дельта-функции

сигналов). Зависимость восстановленной скорости от числа Пекле представлена на рисунке 3.3. Можно заметить, что для более простых начальных возмущений (одиночный импульс и функция Гаусса) пороговое значение числа Пекле меньше, чем для знакопеременных начальных возмущений.

Причина появления систематической погрешности связана с влиянием диффузии в процессе переноса возмущения. По мере прохождения метки мимо «датчика» возмущение продолжает размываться. Это приводит к тому, что форма получаемого сигнала становится асимметричной, а его максимум смещается влево (см. рисунок 3.4). При малых числах Пекле это смещение оказывается существенным, что в результате приводит к систематическому завышению скорости. При этом важно оговориться, что в физическом пространстве возмущение продолжает оставаться симметричным.

В предельном случае начального возмущения в виде дельта-функции восстановленная скорость быть получена аналитически. При такой форме начального возмущения интеграл (3.4) легко вычисляется и для сигналов  $\theta_1(t)$  и

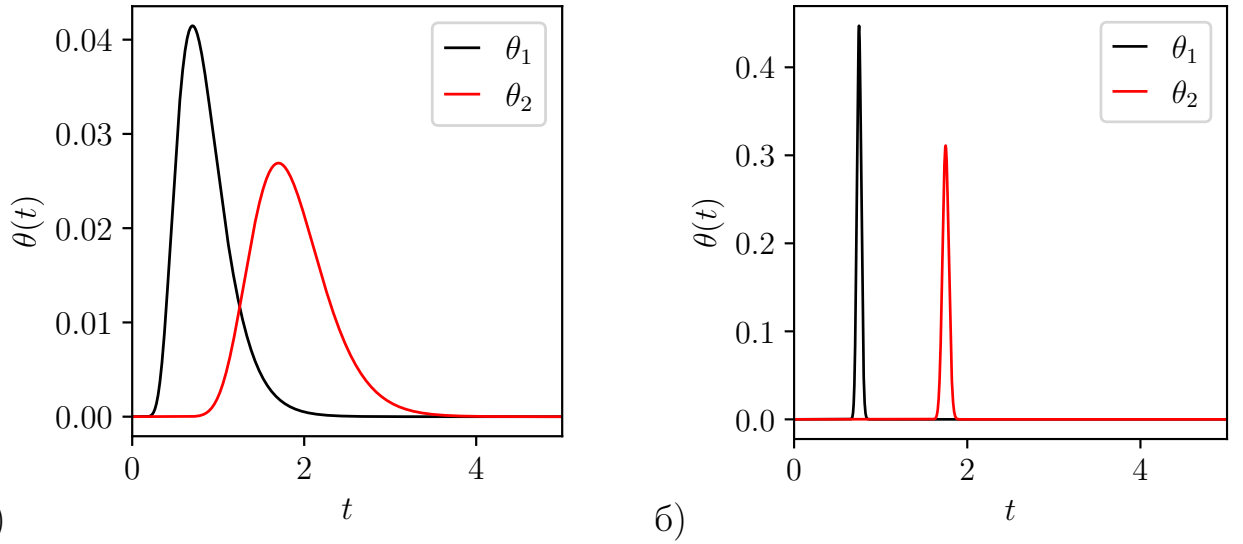


Рисунок 3.4 — Временные сигналы при различных значениях числа Пекле для начального распределения в виде функции Гаусса:  $Pe = 20$  (а),  $Pe = 3000$  (б). Черная линия соответствует сигналу, снятому в точке  $x_1$ , красная — сигналу в точке  $x_2$

$\theta_2(t)$  могут быть получены явные выражения:

$$\theta_i(t) = \frac{\sqrt{Pe}}{2\sqrt{\pi t}} \exp \left[ -Pe \frac{(t + x_0 - x_i)^2}{4t} \right], \quad (3.9)$$

где  $i = 1, 2$ . Максимум по  $t$  найденных функций достигается в точках

$$t_i = \frac{\sqrt{1 + Pe^2(x_i - x_0)^2} - 1}{Pe}, \quad (3.10)$$

а скорость, соответствующая сдвигу по времени между максимумами двух сигналов, определяется выражением

$$V^* = \frac{1}{t_2 - t_1} = \frac{Pe}{\sqrt{1 + Pe^2(x_2 - x_0)^2} - \sqrt{1 + Pe^2(x_1 - x_0)^2}}. \quad (3.11)$$

Из рисунка 3.3 видно, что найденная аналитически скорость для начального возмущения в виде дельта-функции становится близка к заданной скорости потока при значительно более малых числах Пекле. Это подтверждает гипотезу о том, что чем более «простая» функция используется в качестве формы начального возмущения, тем ниже значения требуемых чисел Пекле для достижения максимальной точности определения скорости.

### 3.3 Перенос возмущений в виде волновых пакетов

Реальные сигналы, регистрируемые, например, термодарами при использовании метода температурной корреляционной расходомерии, зачастую имеют достаточно сложный спектральный состав. Известно, что высокие гармоники затухают быстрее низких. Спектр рассмотренных в качестве начальных возмущений функций содержит частоты в большом диапазоне. Под действием диффузии высокочастотная часть быстро затухает, а сохранение низкочастотной составляющей в конечном итоге обеспечивает возможность зарегистрировать возмущение по мере его прохождения через точки измерения.

Иная ситуация может иметь место в случае начальных возмущений, пространственный спектр которых сосредоточен в некотором узком диапазоне частот. При больших значениях коэффициента диффузии, либо при большом расстоянии между точками регистрации сигналов, амплитуда такого высокочастотного возмущения может стать настолько малой, что сигнал не сможет быть зарегистрирован.

Для оценки влияния диффузионного эффекта в описанном случае высокочастотных возмущений рассматривались начальные возмущения в виде локализованные волновых пакетов

$$\theta_0(x) = \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{b^2} \right] \sin(2\pi k_0 kx). \quad (3.12)$$

Вид таких начальных возмущений представлен на рисунке 3.5. В расчетах использовались значения параметров  $b = 1/40\sqrt{\ln 2}$ ,  $k_0 = 20$ .

Для каждого значения частоты начального возмущения  $k$  искалось минимальное значение числа Пекле, при котором скорость переноса определяется точно. Дополнительно также определялось наименьшее значение числа Пекле, при котором сигнал в точке  $x_2$  в принципе может быть получен. Для этого принималось, что возмущение скаляра может быть зарегистрировано, если его амплитуда не меньше, чем  $10^{-3}$  (начальная амплитуда возмущения равна 1).

Показано, что диффузионный эффект имеет место только для низкочастотных возмущений с  $k < 3$ . Для того, чтобы возмущение с большей собственной частотой волнового пакета было зарегистрировано во второй точке, необходимы такие большие значения чисел Пекле, при которых диффузионный эффект уже не наблюдается и скорость потока может быть оценена точно.

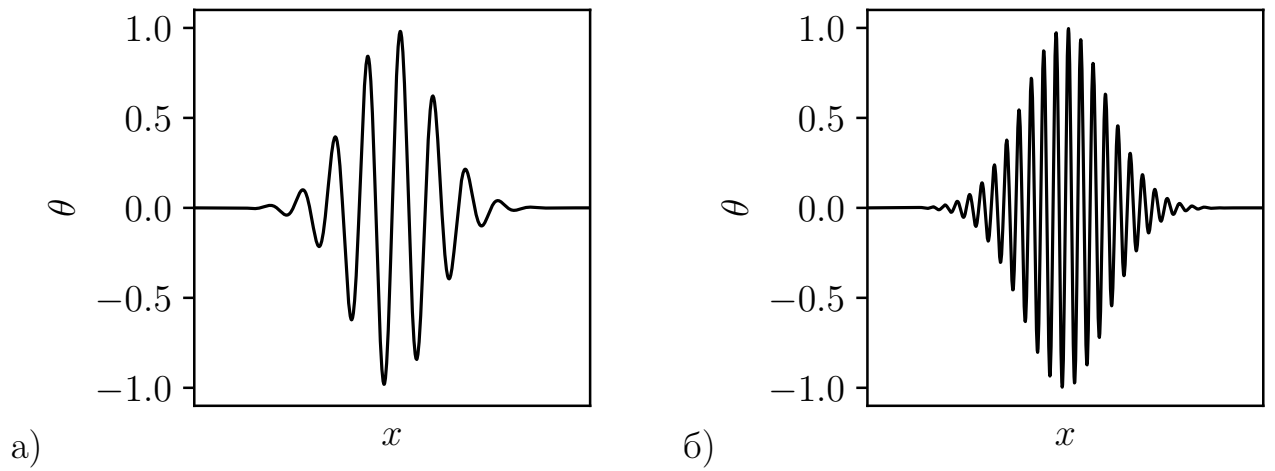


Рисунок 3.5 — Вид начальных возмущений в виде локализованных волновых пакетов при (а)  $k = 3$  и (б)  $k = 8$

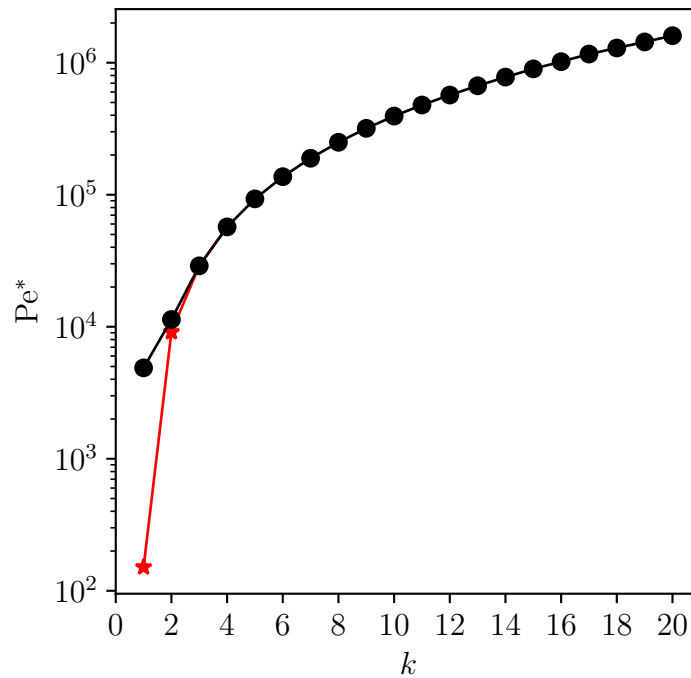


Рисунок 3.6 — Зависимости минимального числа Пекле, при котором скорость потока определяется точно (черная линия), и минимального числа Пекле, при котором начальное возмущение может быть зарегистрировано в точке  $x_2$ , от частоты начального возмущения

Зависимость найденных минимальных чисел Пекле от собственных частот начальных возмущений приведена на рисунке 3.6. Таким образом можно сделать вывод, что для высокочастотных возмущений диффузионная погрешность несущественна, если сигнал доступен для регистрации на втором датчике в точке  $x_2$ .

### 3.4 Оценки влияния турбулентной диффузии

Для иллюстрации того, как диффузионный эффект может сказываться на оценке скорости в реальных технологических задачах, можно провести следующие рассуждения. Течения в каналах технологических устройств почти всегда являются турбулентными. Наличие турбулентности приводит к увеличению эффективных коэффициентов диффузии. Рассмотрим расходомер вихрепролетного типа, для которого лагранжевыми метками являются локализованные вихревые возмущения, а коэффициентом диффузии – вязкость жидкости.

Влияние турбулентной диффузии может существенно уменьшить эффективное значение параметра  $Pe$  и привести к появлению систематической погрешности определения скорости вследствие диффузионного эффекта. Отметим, что поскольку в знаменателе в этом случае стоит вязкость, то, строго говоря, это уже не число Пекле, но суть получающегося параметра остается той же. Из экспериментов Никурадзе [162] известно, что распределение турбулентной вязкости по радиусу трубы круглого сечения имеет максимум на половине радиуса и в большом диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = UR/\nu$  ( $U$  – характерная скорость течения,  $R$  – радиус трубы,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости) справедлива оценка

$$\frac{\nu_T}{u_\tau R} = 0.01 \div 0.08, \quad (3.13)$$

где  $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$  – динамическая скорость, определяемая через касательное напряжение на стенке  $\tau_0$  и плотность жидкости  $\rho$ . Оценку для динамической скорости можно получить, используя соотношение [163]

$$u_\tau R = \nu\sqrt{2Re}. \quad (3.14)$$

Тогда для турбулентной вязкости имеем

$$\nu_T \in (0.01 \nu\sqrt{2Re}; 0.08 \nu\sqrt{2Re}). \quad (3.15)$$

С использованием (3.15) можно сделать следующие количественные оценки. Пусть жидкость с кинематической вязкостью  $2.5 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$  течет в канале радиусом 5 см со скоростью 5 см/с. Пусть расстояние между точками регистрации возмущений составляет 1 см. Числа Рейнольдса и Пекле (без учета

турбулентной вязкости) равны в таком случае соответственно  $Re = 10000$  и  $Re = 2000$ . Оценивая число Пекле с учетом турбулентной вязкости

$$Re_T = \frac{Vd}{\nu + \nu_T}, \quad (3.16)$$

получим в зависимости от положения вихря по радиусу канала  $Re_T \approx 160 \div 830$ . При таких значениях числа Пекле погрешность определения скорости может составлять несколько процентов (см. рисунок 3.3). При увеличении скорости в 4 раза ( $Re = 40000$ ) ламинарное число Пекле достигает  $Re = 8000$ , а учет турбулентной вязкости приводит к оценке  $Re_T \approx 340 \div 2100$ . Таким образом, можно сделать вывод о том, что диффузионный эффект в течениях с развитой турбулентностью может приводить к появлению систематической ошибки при определении скорости вихрепролетным методом.

### 3.5 Выводы по главе

На примере одномерного уравнения переноса скалярной величины с учетом диффузии проведено моделирование процесса измерения скорости течения методом лагранжевых меток. Суть метода заключается в оценке времени прохождения метки между двумя расположенными вдоль направления течения датчиками. Показано, что в жидких металлах, которые характеризуются высокими значениями теплопроводности, диффузионный эффект может приводить к систематическому завышению оценки скорости. Определено минимальное значение числа Пекле, начиная с которого диффузионные эффекты не вносят погрешность в измерения. Показано отсутствие диффузионного эффекта для высокочастотных сигналов в силу быстрого затухания возмущений. Приведены оценки чисел Пекле с учетом турбулентных коэффициентов переноса.

Результаты главы опубликованы в статье [4].

## ГЛАВА 4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ В ПРОСТЫХ МОДЕЛЯХ СОЛНЕЧНОГО ДИНАМО

Одной из центральных задач магнитной гидродинамики является задача генерации крупномасштабного магнитного поля астрофизическими объектами. Необходимым условием реализации такого процесса наряду с дифференциальным вращением является наличие спиральности, появление которой обуславливается влиянием вращения системы на мелкомасштабные конвективные вихревые структуры. В этом смысле неоднородность проводящей среды является определяющим фактором, обеспечивающим нетривиальную динамику процесса.

Ярким проявлением неоднородного во времени проявления звездного магнетизма является циклическая активность звезд, например Солнца. Существование основного цикла солнечной активности достаточно успешно описывается моделью Паркера [108]. В рамках этой модели причиной цикла оказывается волна крупномасштабного магнитного поля, которая распространяется от полюсов к экватору. Возбуждение волны связано с взаимодействием двух основных механизмов: дифференциального вращения и генерацией средней спиральности вследствие влияния силы Кориолиса. Однако, как уже было отмечено в разделе 1.3 настоящей работы, реальный солнечный спектр не сводится лишь к основному циклу и содержит временные колебания различных временных масштабов. Вид спектра солнечной активности приведен на рисунке 4.1. Современные модели солнечного динамо, которые основаны на полной системе нелинейных уравнений МГД, позволяют воспроизводить основной цикл, который возникает на фоне непрерывного спектра вариаций солнечной активности с разными временными масштабами. Однако эти результаты не снимают вопрос о выделении механизмов, ответственных за появление сплошного спектра. В связи с этим принципиальный вопрос о воспроизведении непрерывной компоненты спектра в рамках физически прозрачной модели Паркера остается актуальным.

Солнечное динамо возбуждает множество растущих и осциллирующих собственных решений, каждое из которых ответственно за определённую часть спектра активности. Можно предположить, что уравнения кинематического динамо средних полей действительно содержат непрерывный спектр наряду с

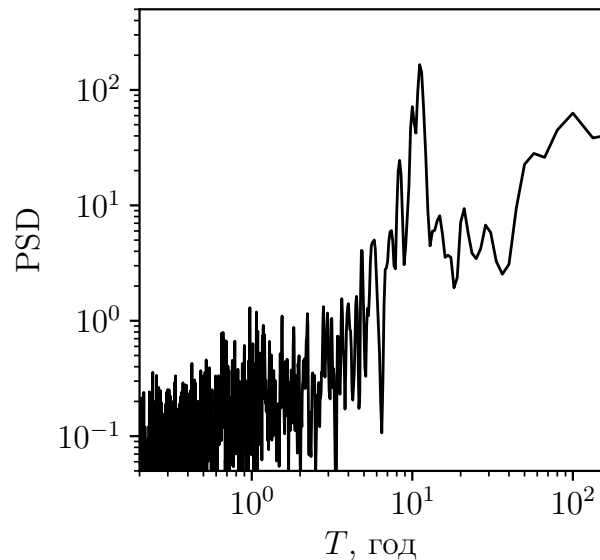


Рисунок 4.1 — Спектральная плотность вариаций солнечной активности, вычисленная по данным о среднемесечном числе групп солнечных пятен [85]

растущим и осциллирующим собственным решением. Проблема, однако, в том, что уравнения динамо сложнее и менее исследованы, чем уравнение Шредингера, и до сих пор неясно, как проверить это предположение.

Простым предположением, которое могло бы объяснить возникновение заполненного спектра на фоне устойчивого периодического режима в рамках моделей паркеровского типа, представляется идея о реализации аналога динамического хаоса. Подобные размышления неоднократно предлагались в качестве альтернативного объяснения причины появления заполненного спектра [128; 129]. Другой возможный вариант объяснения заключается в том, что механизмы генерации солнечного динамо, такие как дифференциальное вращение и спиральность, получаемые как результат усреднения по ансамблю конвективных вихрей, содержат существенный статистический шум из-за умеренного числа конвективных ячеек.

Предложенные объяснения представляют собой вполне реалистичные варианты механизмов, которые, кроме того, могут действовать одновременно. Выделение роли конкретного механизма в рамках реалистичной модели солнечного динамо является нетривиальной задачей. Поэтому представляется разумным исследовать вопрос на примерер упрощённой динамо-модели, которая является достаточно простой, чтобы предпринять аналитическое исследование для проверки одного или нескольких упомянутых выше эффектов. В настоящем разделе работы предпринимается попытка рассмотреть в рамках простой динамо-модели динамический хаос и стохастическую вариацию

управляющего параметра как факторы, приводящие к появлению непрерывной компоненты спектра солнечной активности, с целью выяснения, какой из них более реалистично воспроизводит феноменологию Солнца.

#### 4.1 Модель Паркера

Уравнения Паркера могут быть выведены из уравнения электродинамики средних полей. Для идеально проводящей однородной изотропной среды уравнение Штеенбека-Краузе-Рэдлера [95] имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \nabla \times \alpha \mathbf{B} - \nabla \times (\beta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{U} = \Omega r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi$  – среднее поле скорости вращающейся звезды [14] в сферической системе координат  $\{r, \theta, \varphi\}$ , где начало координат расположено в центре звезды, а широта  $\theta$  отсчитывается от полюса;  $\Omega$  – угловая скорость вращения. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  описывают вклад средних турбулентной спиральности и магнитной диффузии соответственно. Турбулентная магнитная диффузия  $\beta$  дальше считается постоянной и однородной, что позволяет исключить из рассмотрения эффекты диамагнитного вытеснения среднего магнитного поля [15; 106]. Величина  $\alpha$  полагается зависящей от широты, а также от амплитуды среднего поля. Выберем в качестве единицы длины внутренний радиус конвективной зоны звезды  $R$ , в качестве единицы времени диффузионное время  $R^2/\beta$ , а в качестве единиц магнитного поля, спиральности и градиента угловой скорости величины  $B_0$ ,  $\alpha_{\max}$  и  $|\nabla \Omega|_{\max}$  соответственно. Тогда уравнение Штеенбека-Краузе-Рэдлера примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = R_\alpha \nabla \times \alpha \mathbf{B} + R_\Omega \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}, \quad (4.2)$$

где

$$R_\alpha = \frac{\alpha_{\max} R}{\beta}, \quad (4.3)$$

$$R_\Omega = \frac{|\nabla \Omega|_{\max} R^3}{\beta} \quad (4.4)$$

есть безразмерные комплексы, характеризующие интенсивность источников генерации крупномасштабного магнитного поля – а именно альфа-эффекта и дифференциального вращения соответственно [106].

Одной из ключевых идей, лежащих в основе модели Паркера, является разделение среднего магнитного поля  $\mathbf{B}$  на тороидальную  $\mathbf{B}_T$  и полоидальную  $\mathbf{B}_P$  составляющие [17]

$$\mathbf{B}_T = B(r, \theta, t)\mathbf{e}_\varphi, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B}_P = \nabla \times \mathbf{A}_T, \quad (4.6)$$

где  $\mathbf{A}_T = A(r, \theta, t)\mathbf{e}_\varphi$  – тороидальная составляющая магнитного потенциала. Использование разложения среднего поля на тороидальную и полоидальную составляющие позволяет перейти от векторного уравнения (1.21) к системе скалярных уравнений относительно функций  $A$  и  $B$ . Подробный вывод уравнений Паркера из уравнения Штеенбека-Краузе-Рэдлера приводится, к примеру, в [110]. Далее кратко описываются некоторые основные предположения и упрощения.

Подставляя (4.5) и (4.6) в (4.2), получим

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_\alpha \alpha B + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin \theta) \right) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = & R_\Omega G \frac{\partial}{\partial \theta} (rA \sin \theta) - R_\Omega G^\theta \frac{\partial}{\partial r} (rA \sin \theta) - \\ & - R_\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rB) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B \sin \theta) \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где введены обозначения

$$G = \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad G^\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \quad (4.9)$$

для параметров, характеризующих дифференциальное вращение звезды.

Поскольку генерация поля происходит в основном в тонком конвективном слое, можно ввести малый параметр  $\lambda = h/R$ , где  $h$  – толщина конвективной зоны. Основной процесс динамо происходит в области  $1 < r < 1 + \lambda$ . Вводя новую радиальную переменную  $\varrho = (r - 1)/\lambda$ , можно переписать уравнения динамо внутри конвективной оболочки  $0 \leq \varrho \leq 1$  в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_\alpha \alpha B + \frac{\lambda^{-2}}{1 + \varrho \lambda} \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} ((1 + \varrho \lambda)A) + \frac{1}{(1 + \varrho \lambda)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin \theta) \right), \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = & R_\Omega G \frac{\partial}{\partial \theta} ((1 + \varrho \lambda)A \sin \theta) - R_\Omega G^\theta \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial \varrho} ((1 + \varrho \lambda)A \sin \theta) - \\ & - R_\alpha \frac{\lambda^{-2}}{1 + \varrho \lambda} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \alpha \frac{\partial}{\partial \varrho} ((1 + \lambda \varrho)A) \right) + \frac{\lambda^{-2}}{1 + \varrho \lambda} \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} ((1 + \varrho \lambda)B) + \\ & + \frac{1}{(1 + \varrho \lambda)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B \sin \theta) \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Считается, что генерация поля за счет дифференциального вращения намного эффективнее, чем генерация за счет альфа-эффекта, то есть  $R_\Omega \gg R_\alpha$ . Механизм такого типа называется  $\alpha\omega$ -динамо. В этом случае можно пренебречь третьим слагаемым в уравнении (4.11) по сравнению с первым. Также предполагается, что радиальный градиент угловой скорости много больше меридианального, так что второе слагаемое в уравнении (4.11) также оказывается мало. Наконец, учитывая, что конвективная оболочка является тонкой, можно положить  $1 + \lambda\rho \rightarrow 1$  в обоих уравнениях. Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_\alpha \alpha B + \lambda^{-2} \frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin \theta) \right), \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_\Omega G \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin \theta) + \lambda^{-2} \frac{\partial^2 B}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B \sin \theta) \right). \quad (4.13)$$

Поскольку наиболее интересным представляется случай большой мощности источников генерации, можно также пренебречь эффектами кривизны [164] и радиальной диффузией. Уравнения  $\alpha\omega$ -динамо при этом принимают вид уравнений динамо Паркера [108]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_\alpha \alpha B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_\Omega G \sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}, \quad (4.15)$$

где поля  $A$  и  $B$  зависят только от широты и от времени.

В зависимости от значений параметров, решения линейных уравнений Паркера представляют собой затухающие, либо экспоненциально растущие колебания. Поскольку в реальности крупномасштабное поле Солнца безусловно не растет неограничено, для реалистичной (хотя и сильно упрощенной) модели требуется введение еще одного механизма, а именно – нелинейного механизма подавления растущего поля. Физически такой механизм соответствует подавлению турбулентной конвекции в сильном магнитном поле. Его математическая формализация выражается зависимостью  $\alpha(B)$ . Один из простых вариантов такой зависимости может быть записан в виде

$$\alpha(B) = \frac{\alpha_0(\theta)}{1 + \xi^2 B^2}, \quad (4.16)$$

где  $\xi$  – параметр, характеризующий уровень насыщения динамо [15], а  $\alpha_0(\theta)$  – широтное распределение спиральности. Далее в расчетах используется

$\alpha_0(\theta) = \cos \theta$ . Отметим, что зачастую также используются более сложные виды распределения спиральности, например  $\alpha_0(\theta) = \cos(\theta) \sin^2(\theta)$ , которые в целом могут влиять на результаты моделирования процесса генерации поля в рамках схемы  $\alpha\omega$ -динамо [165], однако для рассматриваемой упрощенной модели это влияние невелико. Другая простая параметризация механизма подавления спиральности имеет вид [166]

$$\alpha(B) = \alpha_0(\theta) (1 - \xi^2 B^2). \quad (4.17)$$

В такой модели величина  $\alpha$  может менять свой знак при сильных магнитных полях. Отметим, что возможность изменения знака альфа-эффекта может быть правдоподобной гипотезой при объяснении некоторых особенностей звездного магнетизма [167]. Существуют также динамические нелинейные модели, в которых влияние мелкомасштабной магнитной спиральности описывается дополнительным эволюционным уравнением [106; 124; 168].

Система уравнений (4.14)-(4.15) с учетом механизмов нелинейного подавления спиральности (4.16) или (4.17) содержит четыре управляющих параметра:  $R_\alpha$ ,  $R_\Omega$ ,  $G$  и  $\xi$ . Производя замену переменных

$$\tilde{A} = \frac{\xi A}{R_\alpha}, \quad \tilde{B} = \xi B, \quad (4.18)$$

можно привести уравнения Паркера к однопараметрическому виду

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} = \alpha(\tilde{B}) \tilde{B} + \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \theta^2}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial t} = D \sin \theta \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial \theta^2}, \quad (4.20)$$

где единственным параметром является динамо-число  $D = R_\alpha R_\Omega G$  (тильды у переменных  $A$  и  $B$  для удобства опущены). Динамо-число может быть как положительным, так и отрицательным. При  $D < 0$  динамо-волна распространяется от полюсов к экватору, а при  $D > 0$  наоборот – от экватора к полюсу. Для Солнца характерное значение динамо-числа составляет  $D_s \sim -10^4$  [106; 124]. Отметим, что возможна и другая параметризация, в рамках которой динамо-число оказывается в уравнении для  $A$ . Такая параметризация соответствует другому масштабированию переменной  $A$ . Характер решений нелинейной системы от выбора способа сведения к динамо-числу при этом не зависит.

Уравнения Паркера (4.19) и (4.20) с учетом механизмов подавления спиральности (4.16) и (4.17) и граничными условиями

$$A(0, t) = A(\pi, t) = 0, \quad B(0, t) = B(\pi, t) = 0 \quad (4.21)$$

решались численно методом конечных разностей. Разрешение сетки по широте составляло 400 элементов. Для интегрирования по времени использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным временным шагом  $10^{-5}$ . Начальные условия задавались в виде

$$A(\theta, 0) = \sum_{k=0}^{10} \tilde{a}_k \sin(2k-1)\theta, \quad B(\theta, 0) = \sum_{k=0}^{10} \tilde{b}_k \sin 2k\theta. \quad (4.22)$$

где величины  $\tilde{a}_k$  и  $\tilde{b}_k$  задавались как случайно распределенные по равномерному закону действительные числа в диапазоне  $[-0.01, 0.01]$ . Вид пространственной зависимости в начальных условиях был обусловлен требованием наличия дипольной симметрии, в соответствии с которым величина  $A$  должна быть симметричной относительно экватора, а величина  $B$  – антисимметричной относительно экватора.

## 4.2 Маломодовая модификация модели Паркера

Наблюдаемое поведение солнечной активности сочетает в себе элементы как регулярного (динамического), так и стохастического поведения. Основная частота солнечного цикла (порядка 11 лет) является достаточно стабильной, тогда как некоторые другие особенности солнечной активности, например квазидвухлетние колебания, являются составляющими непрерывного спектра вариаций солнечной активности. Представляется, что хотя бы на качественном уровне солнечная активность может допускать описание в терминах ограниченного числа переменных, то есть в рамках маломодовой динамической системы.

Модели типа динамических систем применительно к задачам самовозбуждения магнитного поля предлагались начиная с работ Булларда [127] и Рикитаке [82]. Рузмайкин [128] использовал модифицированную систему Лоренца для описания квазипериодических модуляций и появления глобальных минимумов наподобие минимума Маундера. Варианты динамических систем

для описания нерегулярной солнечной активности были предложены позднее в работах Тобиаса и соавторов [129; 130; 169]. Недостатком предложенных подходов представляется то, что ни одна из моделей не была основана на физической модели солнечного динамо – это были либо простые структурные модели (Буллард и Рикитакэ); либо сведение к известной системе, допускающей существование странного аттрактора (Рузмайкин); либо построение системы исходя из желаемых свойств решений на основе анализа симметрии и требуемой для этого бифуркационной структуры (Тобиас и др.).

Маломодовую модель динамо можно построить на основе нелинейной модели Паркера [131]. Для этого по аналогии с методологией получения других моделей гидродинамического типа необходимо выполнить проецирование исходных уравнений Паркера на некоторый базис, после чего оставить в рассмотрении конечное число мод. На основе 4-модовой [132] и 6-модовой [170] систем были исследованы, например, возможность воспроизведения квазидвух-летнего цикла, инверсий геодинамо [171], возникновения параметрического резонанса при модуляции динамо-числа [172]. В рамках поставленной задачи наиболее интересной является задача исследования решений с хаотическим поведением, которые могут возникать в системах подобного типа.

Для вывода маломодовой модификации модели Паркера переменные модели  $A$  и  $B$  раскладываются в ряд Фурье с учетом их симметрии относительно экватора. Оставляя по две старшие моды для каждой переменной

$$A(\theta, t) = a_1(t) \sin(\theta) + a_2(t) \sin(3\theta), \quad (4.23)$$

$$B(\theta, t) = b_1(t) \sin(2\theta) + b_2(t) \sin(4\theta), \quad (4.24)$$

и подставляя эти разложения в уравнения Паркера (4.14)-(4.15) с учетом механизма подавления спиральности (4.17), после проецирования на соответствующий базис получим четырехмодовую модификацию модели Паркера [132]

$$\dot{a}_1 = -a_1 + \frac{1}{2}b_1 - \frac{3}{8}b_1 (b_1^2 + 2b_2^2), \quad (4.25)$$

$$\dot{a}_2 = -9a_2 + \frac{1}{2}(b_1 + b_2) - \frac{3}{8}(b_1 + b_2)(b_1^2 + b_1b_2 + b_2^2), \quad (4.26)$$

$$\dot{b}_1 = \frac{D}{2}(a_1 - 3a_2) - 4b_1, \quad (4.27)$$

$$\dot{b}_2 = \frac{3D}{2}a_2 - 16b_2. \quad (4.28)$$

Матрица Якоби для четырехмодовой модели имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & J_{13} & J_{14} \\ 0 & -9 & J_{23} & J_{24} \\ \frac{1}{2}D & -\frac{3}{2}D & -4 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}D & 0 & -16 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

где соответствующие элементы

$$\begin{aligned} J_{13} &= \frac{1}{2} - \frac{3b_1^2}{4} - \frac{3}{8}(b_1^2 + 2b_2^2), \\ J_{14} &= -\frac{3}{2}b_1b_2, \\ J_{23} &= \frac{1}{2} - \frac{3}{8}(b_1 + b_2)(2b_1 + b_2) - \frac{3}{8}(b_1^2 + b_1b_2 + b_2^2), \\ J_{24} &= \frac{1}{2} - \frac{3}{8}(b_1 + b_2)(b_1 + 2b_2) - \frac{3}{8}(b_1^2 + b_1b_2 + b_2^2). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Полученная система уравнений (4.25)-(4.28) решалась численно неявным методом Рунге-Кутты 5-го порядка, реализованном в библиотеке SciPy для языка программирования Python. Начальные условия для всех переменных задавались случайными числами в диапазоне  $[-10^{-3}, 10^{-3}]$ .

#### 4.2.1 Карта режимов 4-модовой модели Паркера

Полученная 4-модовая динамическая система демонстрирует большое количество разных режимов в зависимости от значения  $D$ . Схематическая карта режимов представлена на рисунке 4.2.

В области положительных значений динамо-числа при  $0 \leq D \lesssim 26$  единственным положением равновесия является тривиальное, которое является устойчивым. Соответственно, в этом диапазоне значений динамо-числа решения системы оказываются затухающими. При  $D = 26.0435$  в результате вилочной бифуркации от тривиального равновесия отделяется пара новых устойчивых ветвей, а нулевое равновесие становится неустойчивым. Поэтому в диапазоне  $26 \lesssim D \lesssim 68$  решения системы являются стационарными. При  $D = 68.613$  пара устойчивых решений теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова-Хопфа, в результате чего в системе реализуется режим

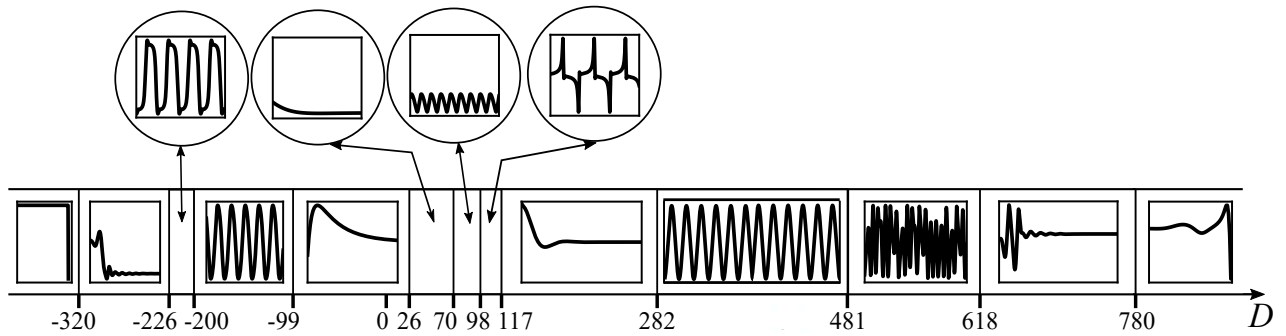


Рисунок 4.2 — Карта режимов маломодовой модели Паркера. Описание соответствующих режимов см. в таблице 5

Таблица 5 — Поведение решений маломодовой модели Паркера в различных диапазонах динамо-числа

Диапазон значений динамо-числа	Поведение решений
$-320 \lesssim D \lesssim -226$	стационарное решение
$-226 \lesssim D \lesssim -220$	динамо-всплески
$-200 \lesssim D \lesssim -99$	квазигармонические колебания
$-99 \lesssim D \lesssim -26$	затухание
$26 \lesssim D \lesssim 68$	стационарное решение
$68 \lesssim D \lesssim 98$	васцилляции
$98 \lesssim D \lesssim 117$	динамо-всплески
$117 \lesssim D \lesssim 282$	затухание
$282 \lesssim D \lesssim 481$	квазигармонические колебания
$481 \lesssim D \lesssim 618$	динамический хаос
$618 \lesssim D \lesssim 780$	стационарное решение

васцилляций – периодических колебаний вблизи ненулевых положений равновесия. При  $D = 117.9565$  в системе реализуется обратная вилочная бифуркация, в результате которой нулевое положение равновесия вновь становится устойчивым и решения затухают при  $118 \lesssim D \lesssim 282$ . В диапазоне  $98 \lesssim D \lesssim 118$  наблюдается переходный режим в виде сильно негармонических периодических колебаний, которые напоминают известные в астрофизике динамо-всплески. При  $D = 282.82$  в системе реализуется бифуркация Андронова-Хопфа для тривиального равновесия. В результате этой бифуркации затухающее решение сменяется периодическими квазигармоническими колебаниями в диапазоне  $282 \lesssim D \lesssim 460$ . После переходных режимов при  $460 \lesssim D \lesssim 481$  в системе появляется довольно широкая область динамического хаоса  $481 \lesssim D \lesssim 618$ ,

поведение решений в которой будет подробнее описано далее. При  $D > 618$  решения системы становятся стационарными. Вид некоторых характерных решений для положительных значений  $D$  представлен на рисунке 4.3.

Поведение системы в области отрицательных значений динамо-числа оказывается чуть менее разнообразным. При больших по модулю отрицательных значениях  $-320 \lesssim D \lesssim -226$  наблюдаются стационарные режимы, связанные с существованием в системе пары устойчивых положений равновесия. После узкой переходной области  $-226 \lesssim D \lesssim -220$ , в которой наблюдается подобие динамо-всплесков, решения системы принимают вид квазигармонических колебаний при  $-220 \lesssim D \lesssim -99$ . При  $D = -99.196$  неустойчивое тривиальное положение равновесия становится устойчивым в результате обратной бифуркации Андронова-Хопфа и вплоть до  $D = 0$  решения системы затухают. Вид некоторых характерных решений для отрицательных значений  $D$  представлен на рисунке 4.4. Подчеркнем, что в области отрицательных значений  $D$  хаотических режимов не обнаруживается.

#### 4.2.2 Динамический хаос в 4-модовой модели Паркера

Как было отмечено, при  $D_H = 282.82$  в системе происходит бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой в фазовом пространстве появляется предельный цикл. Этот цикл соответствует периодическим квазигармоническим колебаниям с частотой  $f_0 \approx 1.16$  (в безразмерных единицах). При небольших значениях надкритичности  $D - D_H$  частота колебаний изменяется линейно с ростом  $D$ , а амплитуда колебаний увеличивается пропорционально  $\sqrt{D - D_H}$ . Спектр колебаний при этом содержит только нечетные кратные гармоники. На рисунке 4.5 представлен фазовый портрет системы при значении динамо-числа  $D = 290$ , построенный в переменных  $\{b_1, b_2\}$ . Далее в работе все фазовые портреты маломодовой системы строятся именно в этих переменных, поскольку переменные  $a_1$  и  $a_2$ , соответствующие модам тороидального потенциала, оказываются на порядок меньше мод тороидального поля. На этом же рисунке 4.5 приведена спектральная плотность энергии колебаний, вычисленная по эволюции старшей моды тороидального поля  $b_1$ .

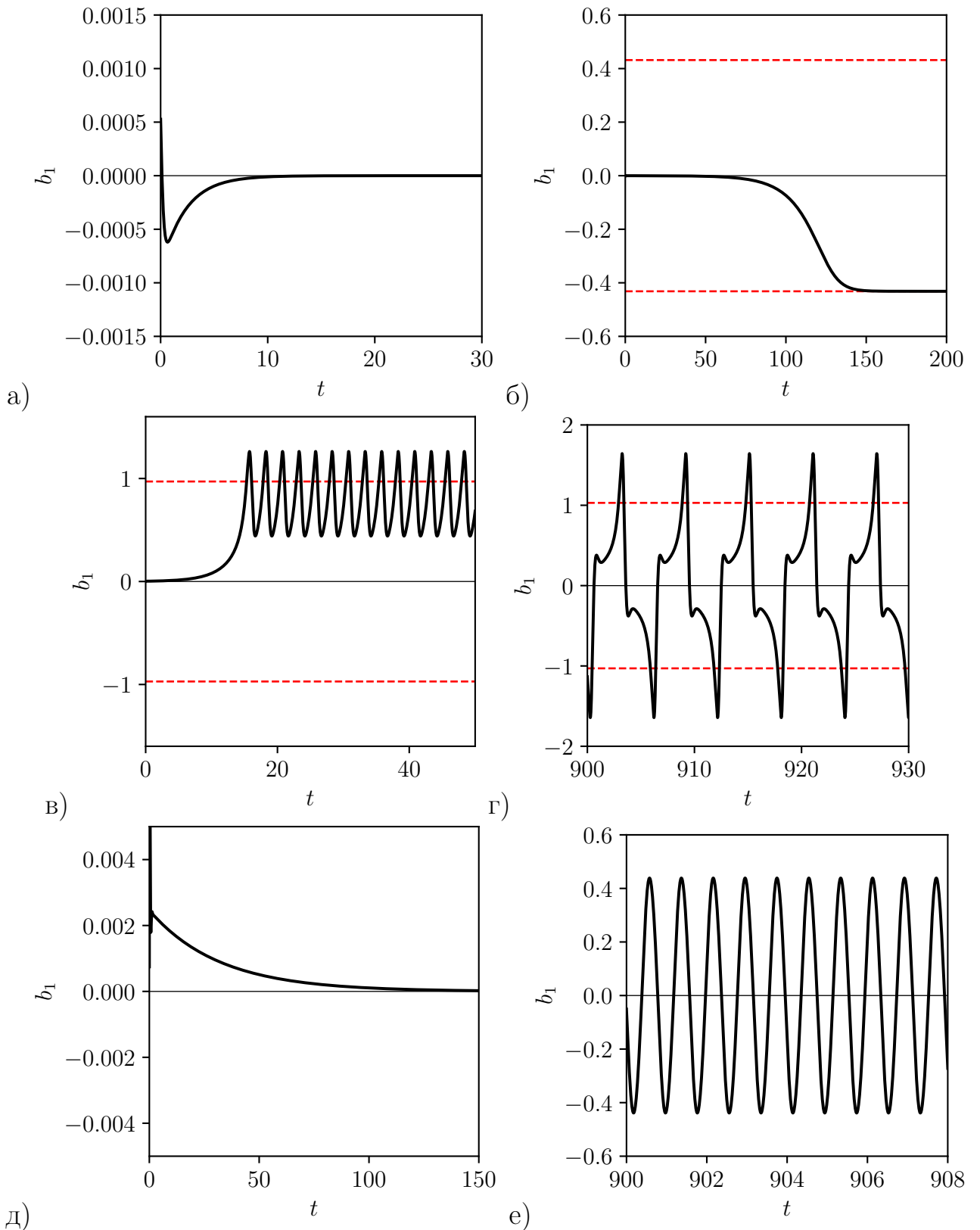


Рисунок 4.3 — Характерный вид решений маломодовой модели Паркера на примере переменной  $b_1$  в области  $D > 0$ : (а) —  $D = 10$  (затухание); (б) —  $D = 30$  (стационарное решение); (в) —  $D = 80$  (васцилляци); (г) —  $D = 110$  (динамовсплески); (д) —  $D = 120$  (затухание); (е) —  $D = 350$  (квазигармонические колебания). Красной штриховой линией обозначены устойчивые нетривиальные положения равновесия

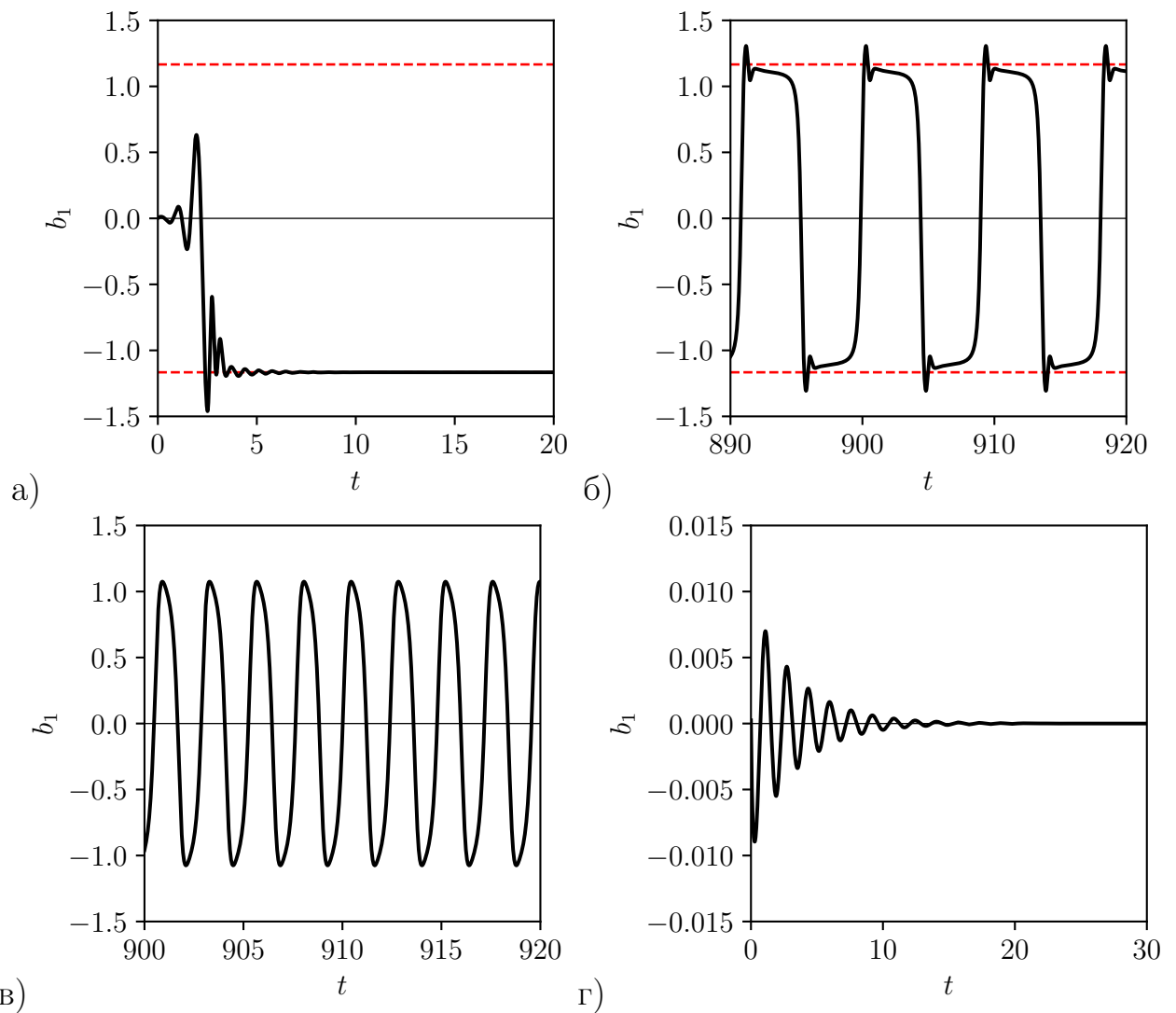


Рисунок 4.4 — Характерный вид решений маломодовой модели Паркера на примере переменной  $b_1$  в области  $D < 0$ : (а) —  $D = -300$  (стационарное решение); (б) —  $D = -225$  (динамо-всплески); (в) —  $D = -180$  (квазигармонические колебания); (г) —  $D = -80$  (затухание). Красной штриховой линией обозначены устойчивые нетривиальные положения равновесия

С увеличением  $D$  форма колебаний начинает постепенно искажаться. В частности, при  $D \approx 411$  в спектре колебаний появляются четные гармоники (см. рисунок 4.6).

Переход к хаосу с увеличением динамо-числа происходит по сценарию последовательности бифуркаций удвоения периода. Первая из них имеет место при  $D_1 \approx 463$ . Фазовый портрет и спектральная плотность мощности колебаний после первой бифуркации удвоения периода приведены на рисунке 4.7. Последующие бифуркации происходят при  $D_2 \approx 474.7$ ,  $D_3 \approx 477.2$ ,  $D_4 \approx 477.8$ ,  $D_5 \approx 477.9$  и так далее. На рисунке 4.8 приведена последовательность фазовых портретов после нескольких бифуркаций.

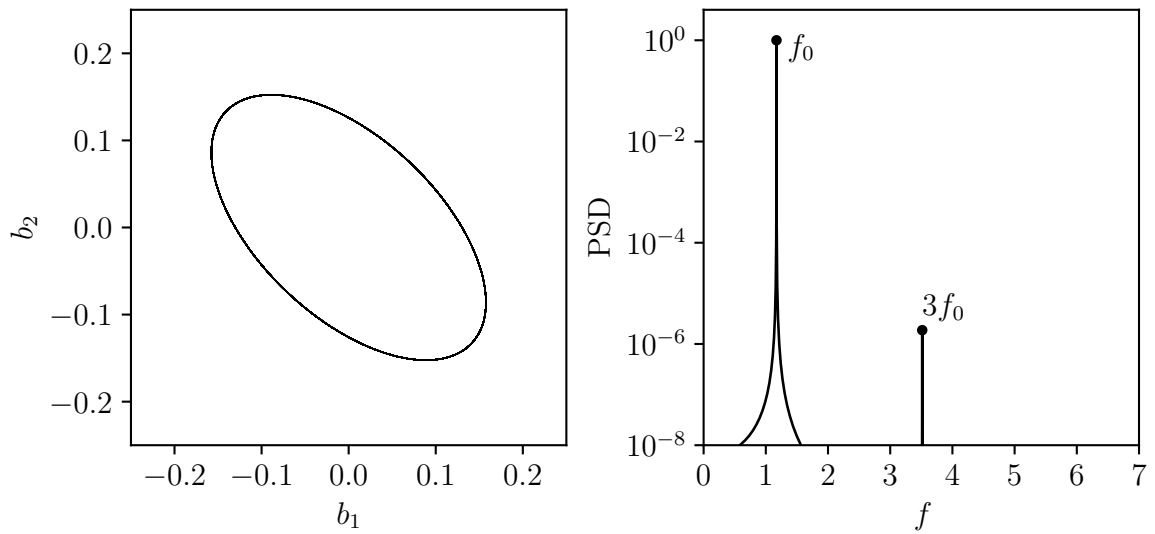


Рисунок 4.5 — Фазовый портрет маломодовой модели Паркера в переменных  $\{b_1, b_2\}$  при  $D = 290$  (слева) и спектральная плотность энергии колебаний переменной  $b_1$  (справа), нормированная на максимальное значение

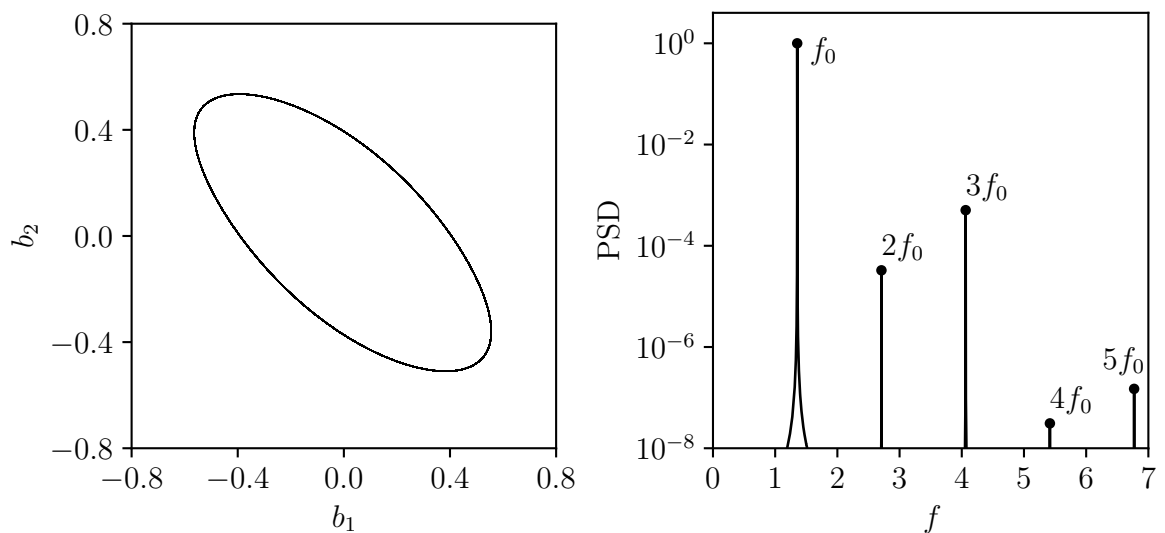


Рисунок 4.6 — Фазовый портрет маломодовой модели Паркера в переменных  $\{b_1, b_2\}$  при  $D = 411$  (слева) и спектральная плотность энергии колебаний переменной  $b_1$  (справа), нормированная на максимальное значение

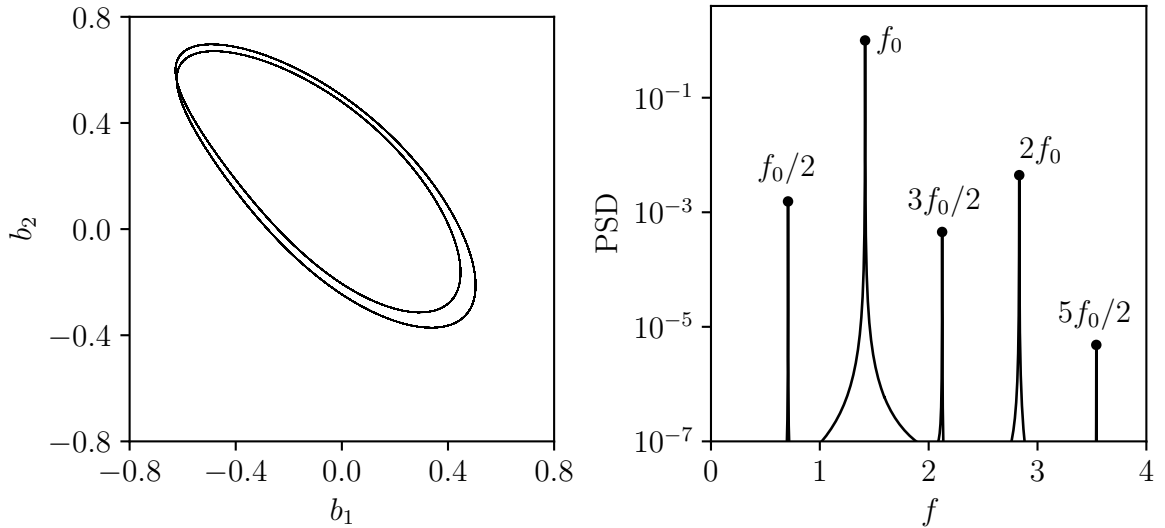


Рисунок 4.7 — Фазовый портрет маломодовой модели Паркера в переменных  $\{b_1, b_2\}$  после первой бифуркации удвоения периода при  $D = 465$  (слева) и спектральная плотность энергии колебаний переменной  $b_1$  (справа), нормированная на максимальное значение

На рисунке 4.9 приведена бифуркационная диаграмма маломодовой модели Паркера, построенная по значениям локальных максимумов колебаний переменной  $b_1$ . Можно видеть, что плотно заполненный участок диаграммы начинается примерно при  $D \approx 481$ . Это значение можно воспринимать как некоторую оценку положения границы появления динамического хаоса. Интересно, что почти сразу за этим идет первое окно периодичности  $482.2 < D < 483.1$ .

Решения системы в различных частях зоны динамического хаоса различаются как по виду колебаний, так и по спектральному составу. На рисунках 4.10–4.12 приведены спектральные плотности энергии и развертки переменной  $b_1$  при различных значениях динамо-числа в диапазоне, в котором возникают хаотические колебания. Для получения сглаженных спектров использовался метод Уэлша, в рамках которого исследуемый сигнал разбивается на отдельные фрагменты. Искомая спектральная плотность сигнала при этом вычисляется как средний по всем фрагментам спектр энергии. Отметим, что для вычисления спектров не используется вейвлет-преобразование. Это обусловлено тем, что с одной стороны наиболее интересными являются интегральные характеристики колебаний, а с другой – тем, что в рамках рассматриваемых простых моделей нет особенных трудностей с получением временных сигналы такой длины, которой будет достаточно для накопления статистики колебаний и получения сглаженного спектра. Подчеркнем, что в силу сложившейся в астрофизике тра-

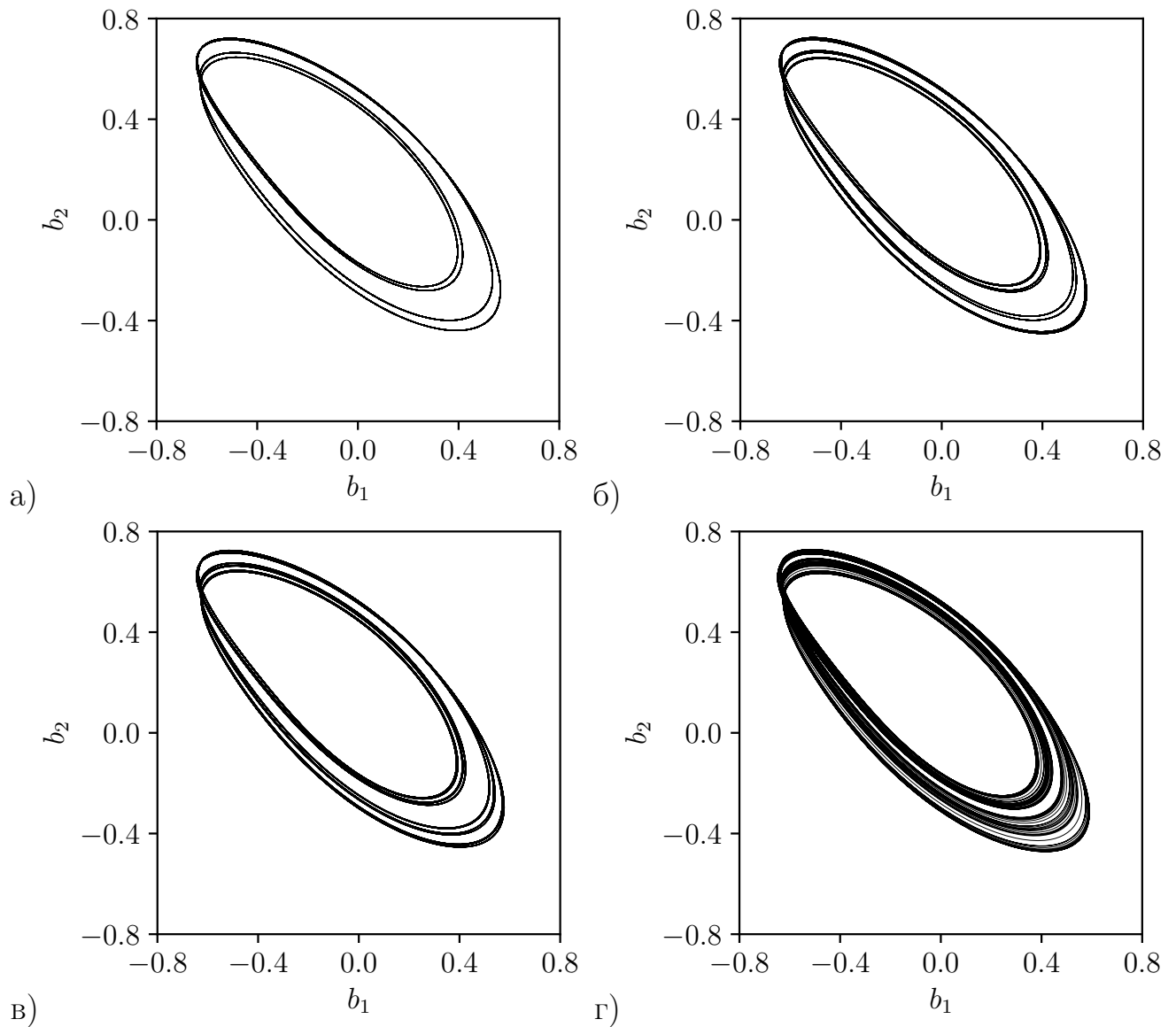


Рисунок 4.8 — Фазовые портреты маломодовой модели Паркера в переменных  $\{b_1, b_2\}$  при (а)  $D = 476$ , (б)  $D = 477.5$ , (в)  $D = 477.85$ , (г)  $D = 480$

диции, все спектры далее в главе приводятся не в терминах частоты колебаний  $f$ , а в периодах колебаний  $T = 1/f$ .

Характерные спектры вблизи левой границы области динамического хаоса (см. рисунок 4.10) имеют сильно выделенный пик, который связан с наличием выделенной частоты колебаний. Также в спектре можно увидеть вторичные пики, соответствующие кратным частотам. Форма колебаний остается близкой к гармоническим. Сплошная составляющая спектра при этом набирается за счет нерегулярной вариации амплитуды колебаний.

В середине диапазона существования хаотических решений (см. рисунок 4.11) основная частота колебаний в спектре остается, однако становится существенно менее выделенной. Пики, связанные с кратными частотами колеба-

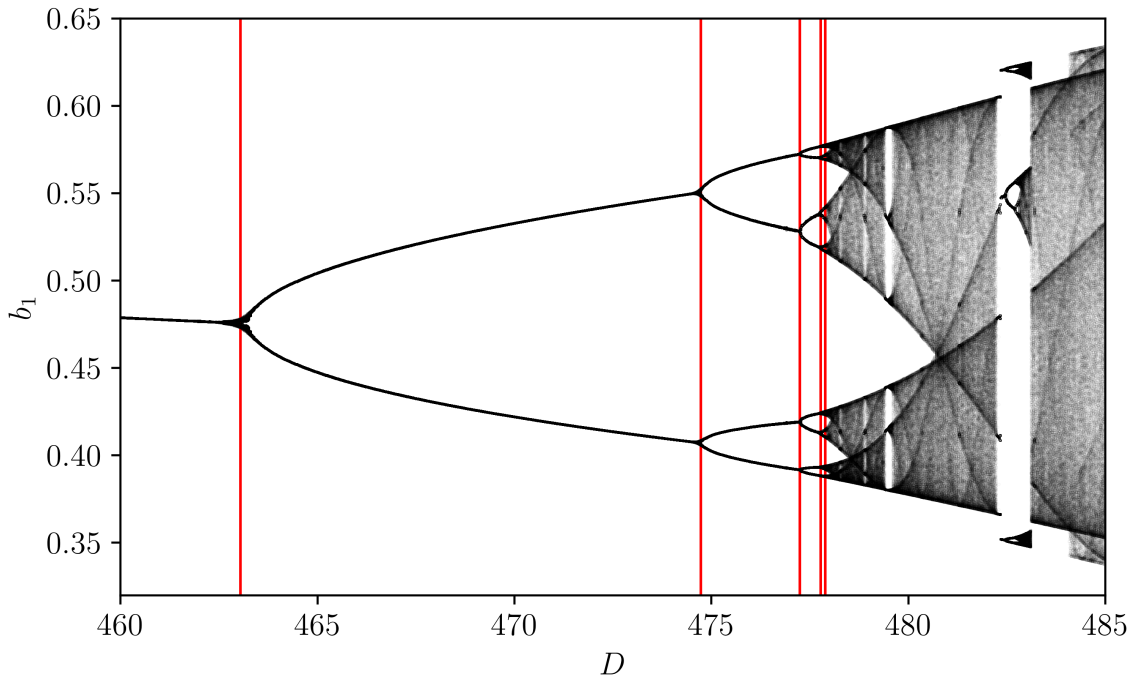


Рисунок 4.9 — Бифуркационная диаграмма для маломодовой модели Паркера. Вертикальными красными линиями отмечены первые 5 бифуркаций удвоения периода

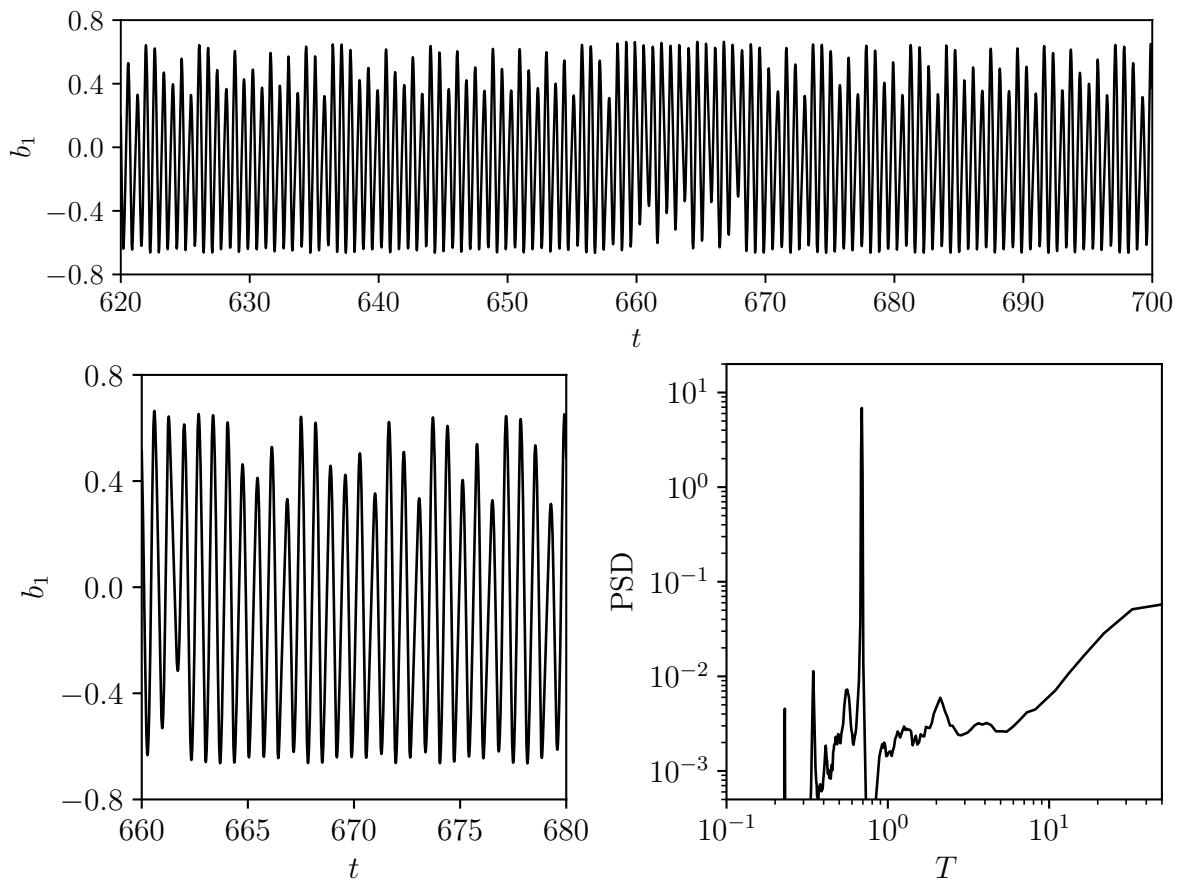


Рисунок 4.10 — Временная развертка переменной  $b_1$  (вверху), ее фрагмент (слева внизу) и спектральная плотности энергии колебаний (внизу справа) при  $D = 490$

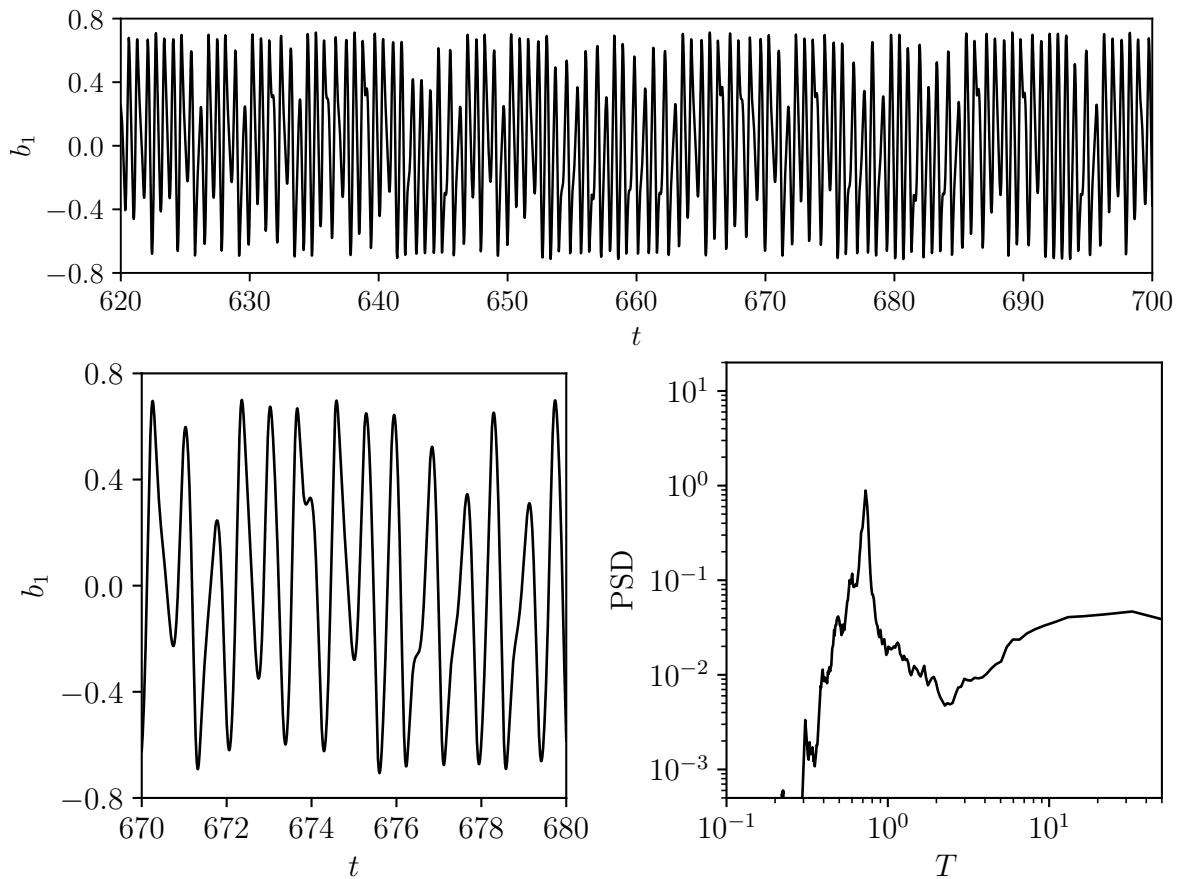


Рисунок 4.11 — Временная развертка переменной  $b_1$  (вверху), ее фрагмент (слева внизу) и спектральная плотности энергии колебаний (внизу справа) при  $D = 550$

ний, исчезают. При этом появляются вторичные пики, которые можно связать с повторяющимися участками фазовых траекторий. Форма колебаний несколько искажается по сравнению с той, которая имеет место при значениях  $D$  вблизи границы появления динамического хаоса.

При дальнейшем увеличении управляющего параметра характер колебаний становится все более сложным. Это приводит к тому, что ближе к правой границе рассматриваемого диапазона динамо-числа выделенная частота расплывается (см. рисунок 4.12), а спектр колебаний уплотняется. Форма самих колебаний оказывается сильно негармонической.

Приведенные результаты демонстрируют качественное различие характеристик колебаний в маломодовой модели Паркера в зависимости от значения динамо-числа внутри области динамического хаоса. Однако, вместе с тем, интересным представляется вопрос о возможности количественной оценки «степени хаотичности» того или иного решения. Кроме того, как было показано на бифуркационной диаграмме, внутри диапазона динамо-числа, в котором возникают

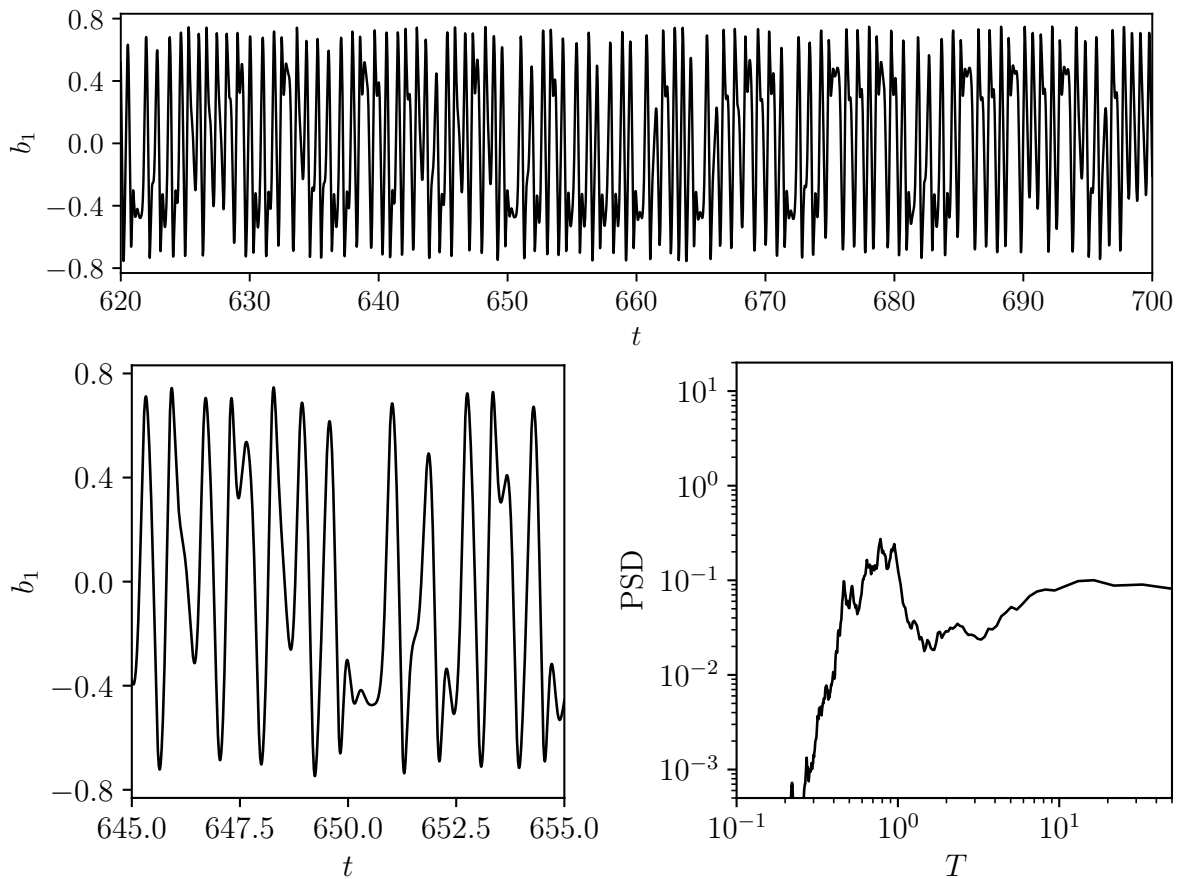


Рисунок 4.12 — Временная развертка переменной  $b_1$  (вверху), ее фрагмент (слева внизу) и спектральная плотности энергии колебаний (внизу справа) при  $D = 615$

хаотические решения, присутствуют также вкрапления периодических режимов. Такая ситуация в целом не является чем-то необычным – наличие окон периодичности известно в том числе для классической системы Лоренца [126]. С точки зрения задач, связанных с поведением магнитных полей астрофизических объектов, наличие тонкой структуры в параметрическом пространстве также является весьма интересным. Если области хаотических и регулярных режимов чередуются, то можно представить себе сценарий, при котором малое изменение управляющего параметра приведет к кардинальной смене поведения системы.

В целом вопрос однозначного разделения хаотических и регулярных режимов в различных нелинейных системах зачастую оказывается далеко не тривиальным. Основой многих методов оценки сложности решений динамических систем являются подходы, связанные вычислением показателей Ляпунова или информационной энтропии.

Ключевым моментом при использовании многих методов оценки сложности поведения системы оказывается выбор временного масштаба. К таковым можно отнести, например, шаг выборки при оценке информационной энтропии или временной сдвиг при построении фазового пространства при использовании подхода Такенса для оценки размерности аттрактора [173]. Вместо выбора произвольного масштаба в основу метода можно положить характерные времена, присущие самому решению, тем самым исключив необходимость выбора какого-либо характерного времени.

При анализе поведения динамических систем широко используются различные способы снижения размерности, основанные на методе сечений Пуанкаре [174]. При анализе временного поведения решений, возникающих в динамической системе, вместо набора величин, отображающих топологию множества точек в пространстве, необходимо использовать другой набор, отображающий свойства множества некоторых характерных времен эволюции системы. Так как аттрактор диссипативной системы сосредоточен в ограниченной области пространства, то можно ввести понятие времени возвращения, понимая под ним время прохождения фазовой точки от одного пересечения плоскости Пуанкаре до следующего. Ранее подобный подход использовался применительно к системе Лоренца с целью выделения повторяющихся фрагментов фазовых траекторий [175].

Для анализа «степени хаотичности» режимов поведения маломодовой модели Паркера в исследуемой области предложен анализ статистики времен возвращения. Суть метода заключается в определении в исследуемом сигнале локальных максимумов и соответствующих им моментов времени  $t_i$ . На основе этих значений определяется полный набор времен возвращения  $T_i = t_i - t_{i-1}$ .

Статистические свойства набора времен возвращения оценивались на основе метода гистограмм. Для построения гистограмм диапазон возможных значений времен возвращения  $[T_{\min}, T_{\max}]$  разбивался на  $N$  равных интервалов

$$\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N-2} < \tau_{N-1}, \quad (4.31)$$

где

$$\tau_k = T_{\min} (1 + \delta k), \quad k = 0..N - 1, \quad (4.32)$$

$\delta = (T_{\max} - T_{\min})/N$  – ширина каждого интервала. Под гистограммой при этом понимается набор значений  $\{n_k\}$

$$n_k = \sum_i I_{[\tau_{k-1}, \tau_k]}(T_i), \quad (4.33)$$

где  $I$  – индикаторная функция

$$I = \begin{cases} 1, & T_i \in [\tau_{k-1}, \tau_k], \\ 0, & T_i \notin [\tau_{k-1}, \tau_k]. \end{cases} \quad (4.34)$$

В качестве количественной характеристики, по значениям которой можно судить о режиме поведения решений динамической системы, используется количество ненулевых значений  $n_k$  в полученной гистограмме

$$N_T = N (n_k | n_k \neq 0). \quad (4.35)$$

Очевидно, в случае чисто периодического режима в гистограмме времен возвращения оказывается заполненным только один интервал, так что  $N_T = 1$ . В более сложных периодических режимах с несколькими характерными временами колебаний в гистограммах заполняются несколько ячеек. Наконец, в хаотическом сигнале заполненной оказывается некоторый конечный диапазон ячеек, а параметр  $N_T$  возрастает по мере расширения заполненной области времен. Тем не менее, для введенной меры все равно остается некоторый произвол, связанный с тем, какие значения относить к периодическим режимам, а какие к хаотическим. Для нормированной на максимальное значение меры заполненности гистограммы было принято  $N_T \lesssim 0.25$  для периодических режимов и  $N_T \gtrsim 0.75$  для хаотических.

На рисунке 4.13 приведены гистограммы времен возвращения для маломодовой модели Паркера для четырех различных значений динамо-числа. В периодическом режиме при  $D = 450$  заполненной оказывается лишь одна ячейка в гистограмме. С увеличением управляющего параметра ширина заполнения гистограммы увеличивается. Это качественно согласуется с видами спектров, которые приведены на рисунках 4.10–4.12.

Существенным преимуществом предложенного метода перед классическими (вычисление показателей Ляпунова, перестановочной энтропии, энтропии Колмогорова-Синая) является относительная простота вычисления и хорошая чувствительность к смене характера решения при малых изменениях управляющего параметра.

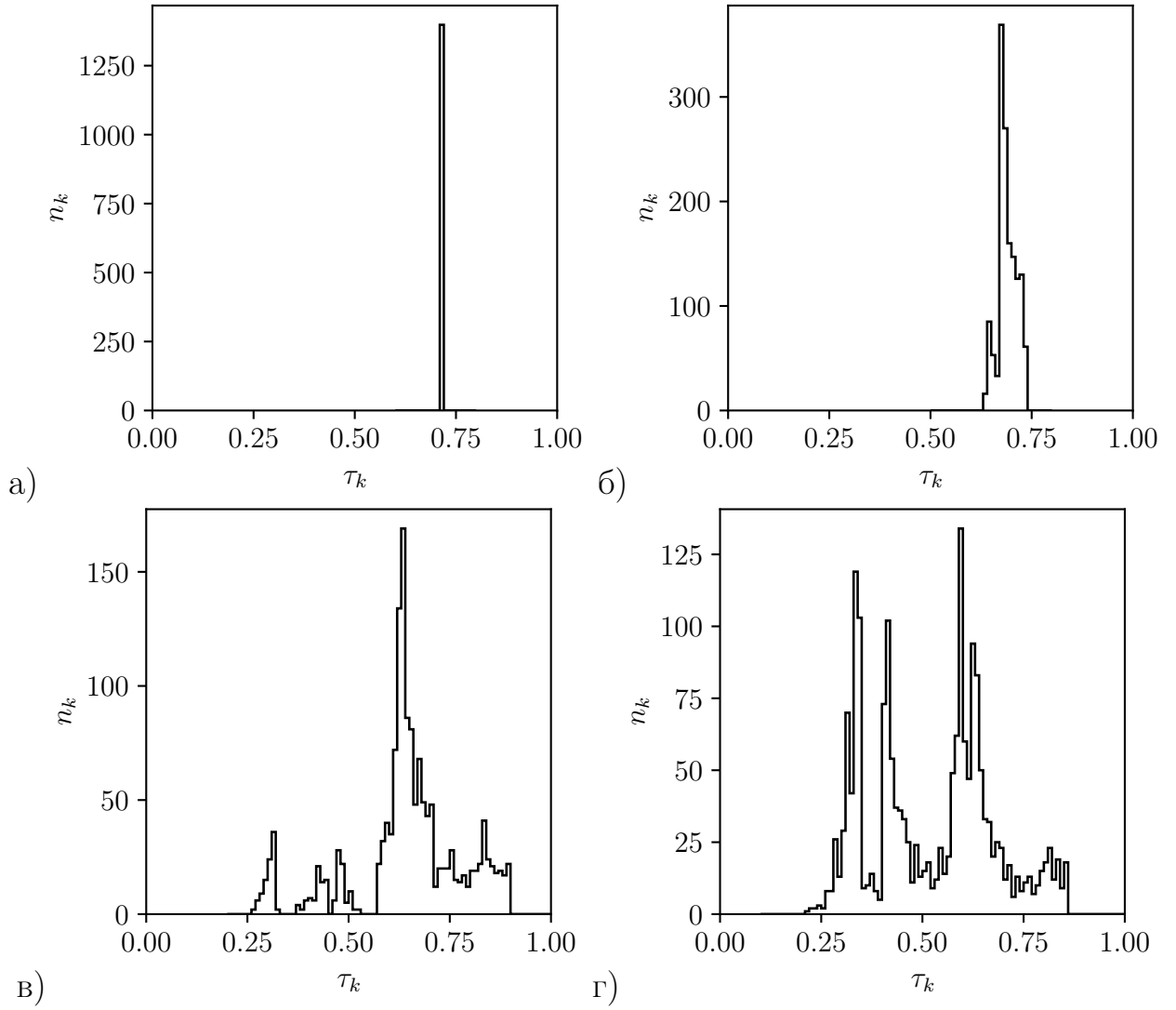


Рисунок 4.13 — Гистограммы времен возвращения маломодовой системы Паркера при (а)  $D = 450$ , (б)  $D = 490$ , (в)  $D = 550$ , (г)  $D = 615$

Верификация метода была выполнена на примере системы Лоренца,

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(y - x), \\
 \dot{y} &= -xz + rx - y, \\
 \dot{z} &= xy - \beta z,
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

карта режимов которой хорошо известна [176]. Параметры  $\sigma = 10$  и  $\beta = 8/3$  в расчетах были фиксированными, так что единственным управляющим параметром являлась величина  $r$ . Результат вычисления нормированной меры заполненности гистограммы  $N_T(r)$  для системы Лоренца приведен на рисунке 4.14. Можно видеть, что предложенный метод достаточно точно воспроизвел границы существования странного аттрактора  $24.74 < r < 214.36$  и описанные в [176] окна периодичности при  $99.54 < r < 100.8$  и при  $145 < r < 166$ .

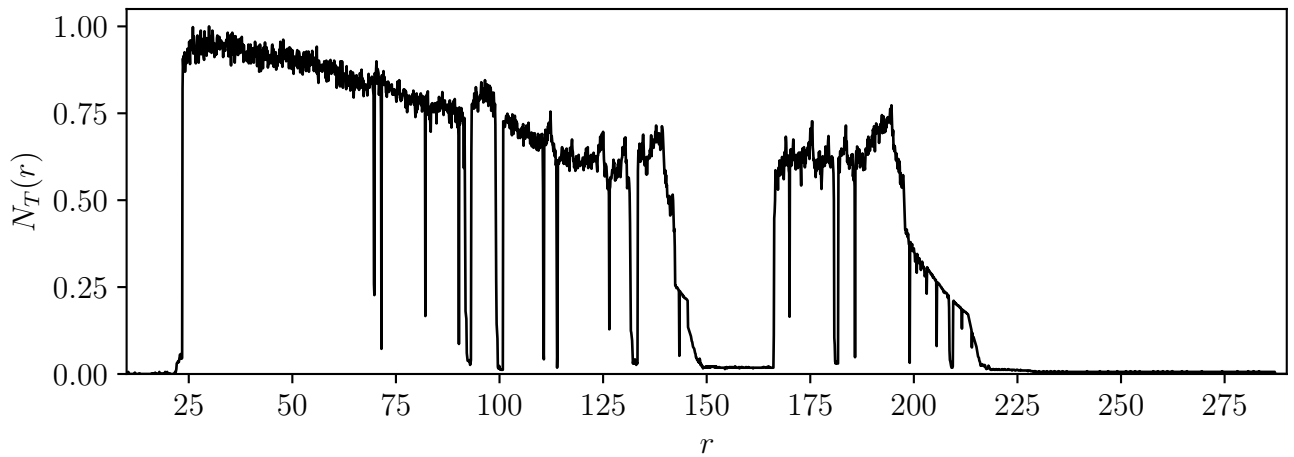


Рисунок 4.14 — Зависимость меры заполненности гистограммы колебаний  $N_T$  от параметра  $r$  для системы Лоренца

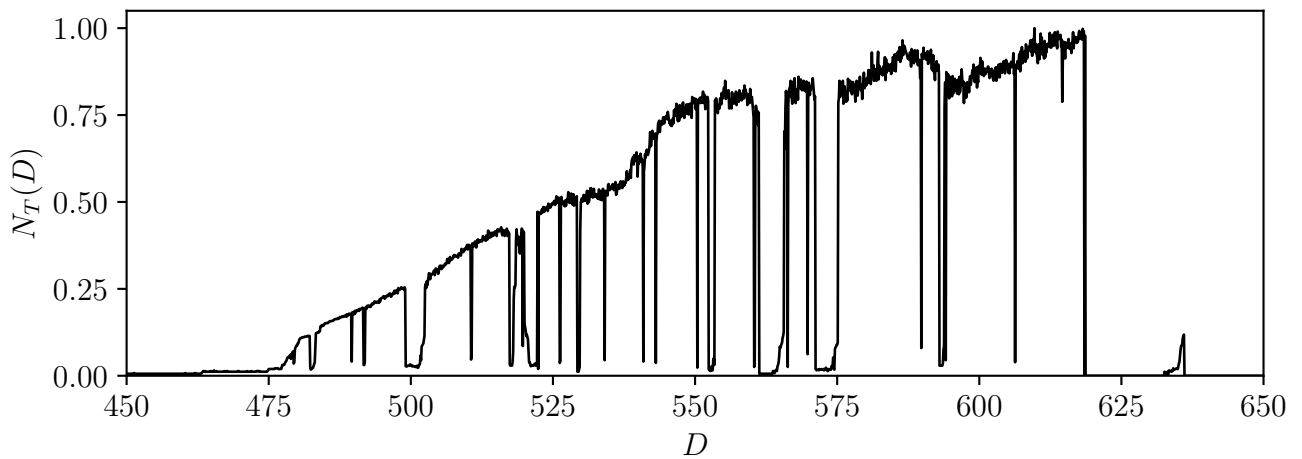


Рисунок 4.15 — Зависимость меры заполненности гистограммы колебаний  $N_T$  от параметра динамо-числа для маломодовой модели Паркера

Применение метода оценки степени заполненности гистограммы времен возврата для четырехмодовой модели Паркера позволило получить карту области динамического хаоса, которая представлена на рисунке 4.15. Примечательным отличием от системы Лоренца оказывается то, что степень хаотичности почти монотонно нарастает по мере увеличения управляющего параметра. При этом согласно формальному критерию  $N_T \gtrsim 0.75$  решения становятся хаотичными только при  $D \approx 530$ , причем величина  $N_T$  в диапазоне  $475 < D < 530$  растет почти линейно. Окна периодичности разбросаны в исследуемой области значений динамо-числа почти равномерно, однако при этом не наблюдается широких окон (как в системе Лоренца при  $145 < r < 166$ ). Другой интересный факт связан с очень резким исчезновением хаотических режимов по сравнению с системой Лоренца, где наблюдается плавное снижение  $N_T$  вблизи правой границы области хаоса. Решения на границе при этом ведут себя

весьма специфичным образом: после старта с некоторых начальных условий траектории системы некоторое (достаточно большое) время движутся по хаотическому аттрактору, после чего система приходит в состояние устойчивого равновесия и все колебания исчезают.

### 4.3 Воспроизведение спектра солнечной активности с использованием простых моделей

Для ответа на вопрос о возможности воспроизведения спектра активности Солнца с использованием описанных моделей для начала нужно определиться с тем, в каком диапазоне динамо-числа эти модели могут воспроизводить динамику, напоминающие основной цикл. Иначе говоря, требуется определить, при каких значениях управляющего параметра решения системы выглядят как периодические или хаотические колебания, сохраняющие дипольную симметрию полей  $A$  и  $B$ . Карта режимов квазигармонических и хаотических режимов приведена на рисунке 4.16.

Как видно из представленной карты режимов, диапазон значений динамо-числа, в которых наблюдаются периодические и хаотические режимы с дипольной симметрией существенно зависит от механизма нелинейности. Так, модель с механизмом подавления спиральности  $\alpha = \alpha_0/(1 + B^2)$  (далее в тексте будет обозначена как PA) демонстрирует колебания, качественно напоминающие основной цикл солнечной активности в большом диапазоне отрицательных значений динамо-числа вплоть до  $D \approx -10^{-4}$ . Это объясняется эффективным подавлением спиральности с ростом магнитного поля, так что даже при достаточно больших  $B$  решения системы остаются устойчивыми. Модели, основанные на механизме подавления спиральности  $\alpha = \alpha_0(1 - B^2)$  (соответствующая полная модель далее обозначена как PB, а ее маломодовая модификация как PL4), демонстрируют ограниченные решения в значительно более узком диапазоне динамо-числа. Это связано с тем, что спиральность эффективно подавляется лишь в ограниченном диапазоне амплитуд магнитного поля. Однако, как представляется, возможность смены знака спиральности при умеренных амплитудах поля способствует появлению хаотических колебаний.

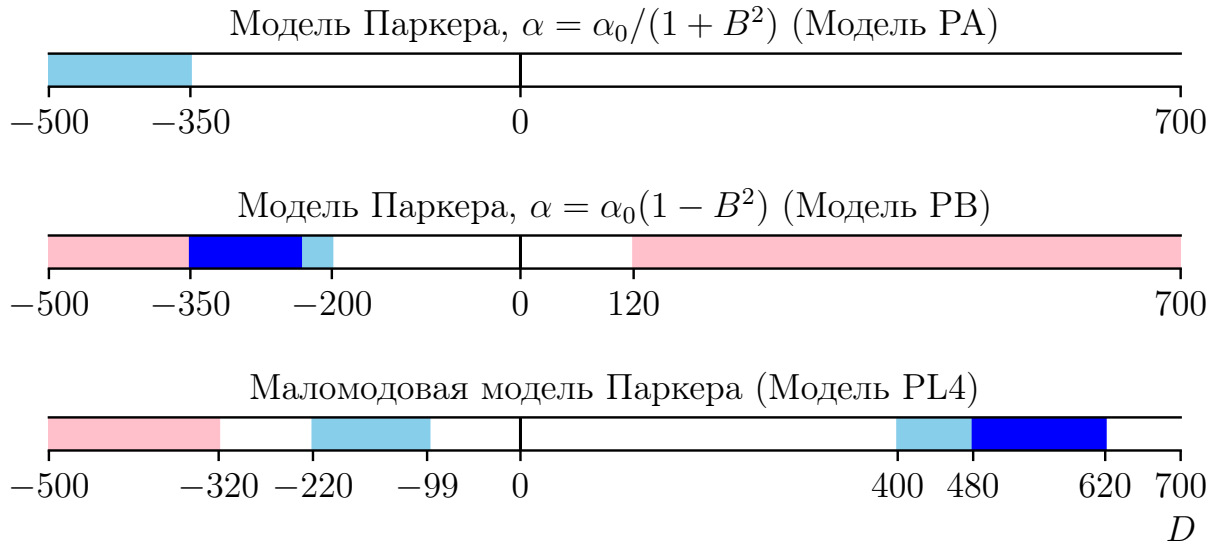


Рисунок 4.16 — Карта режимов квазигармонических (голубой) и хаотических (синий) колебаний в зависимости от динамо-числа для модели PA с механизмом подавления спиральности  $\alpha = \alpha_0 / (1 + B^2)$  (вверху), модели PB с механизмом подавления спиральности  $\alpha = \alpha_0 (1 - B^2)$  (в середине) и четырехмодовой модели Паркера PL4 (внизу). Белым цветом отмечены области прочих типов решений (затухающие, стационарные, колебательные без сохранения дипольной симметрии). Красным цветом отмечены диапазоны значений динамо-числа, в которых решения экспоненциально растут

Рассмотрим далее получаемые решения и их спектральные свойства для каждой из моделей в отдельности. Отметим, что для сравнения вида колебаний между различными видами моделей при использовании маломодовой модели в качестве временных сигналов будут использованы не временные развертки отдельных переменных, а значения восстановленного тороидального магнитного поля  $B(\theta, t) = b_1 \sin(2\theta) + b_2 \sin(4\theta)$  при некоторой фиксированной широте.

### 4.3.1 Модель Паркера PA

Модель PA воспроизводит периодические решения с дипольной симметрией в большом диапазоне отрицательных значений динамо-числа, начиная с  $D = -350$ . Как показано на рисунке 4.17, динамо-волна распространяется от полюса к экватору, но при больших  $|D|$  осцилляции становится негармоническими, что приводит к появлению большого количества гармоник в спектре.

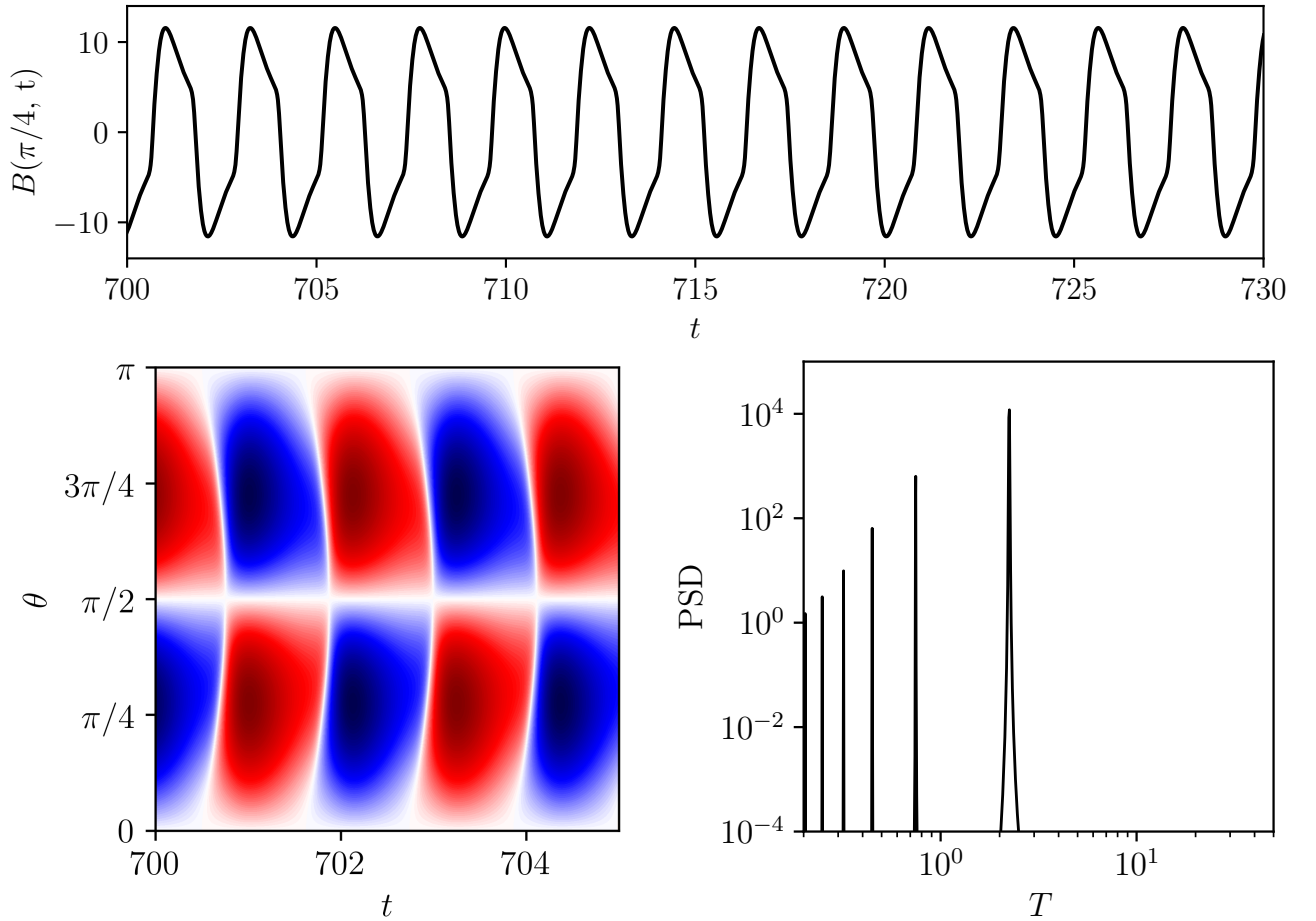


Рисунок 4.17 — Решение уравнений Паркера с механизмом подавления спиральности  $\alpha = \alpha_0 / (1 + B^2)$  при  $D = -2000$ : развертка колебаний тороидального магнитного поля при  $\theta = \pi/4$  (вверху), широтно-временная диаграмма (внизу слева) и спектральная плотность энергии колебаний тороидального поля при  $\theta = \pi/4$  (внизу справа)

Поскольку в рамках модели РА не возникают хаотические решения, для воспроизведения непрерывной компоненты спектра необходимо привлечение дополнительных механизмов. Один из наиболее очевидных вариантов заключается в следующем. Известно, что интенсивность источников динамо не является постоянной величиной. Это связано с тем, что в рамках моделей среднего поля значение интенсивности альфа-эффекта получается в результате усреднения по некоторому большому, но конечному числу конвективных ячеек, число которых может несколько отклоняться от среднего значения в процессе эволюции звезды [177]. Для воспроизведения этого эффекта в модель вносятся стохастические возмущения динамо-числа в виде

$$D(t) = \bar{D} [1 + y(t, \tau)], \quad (4.37)$$

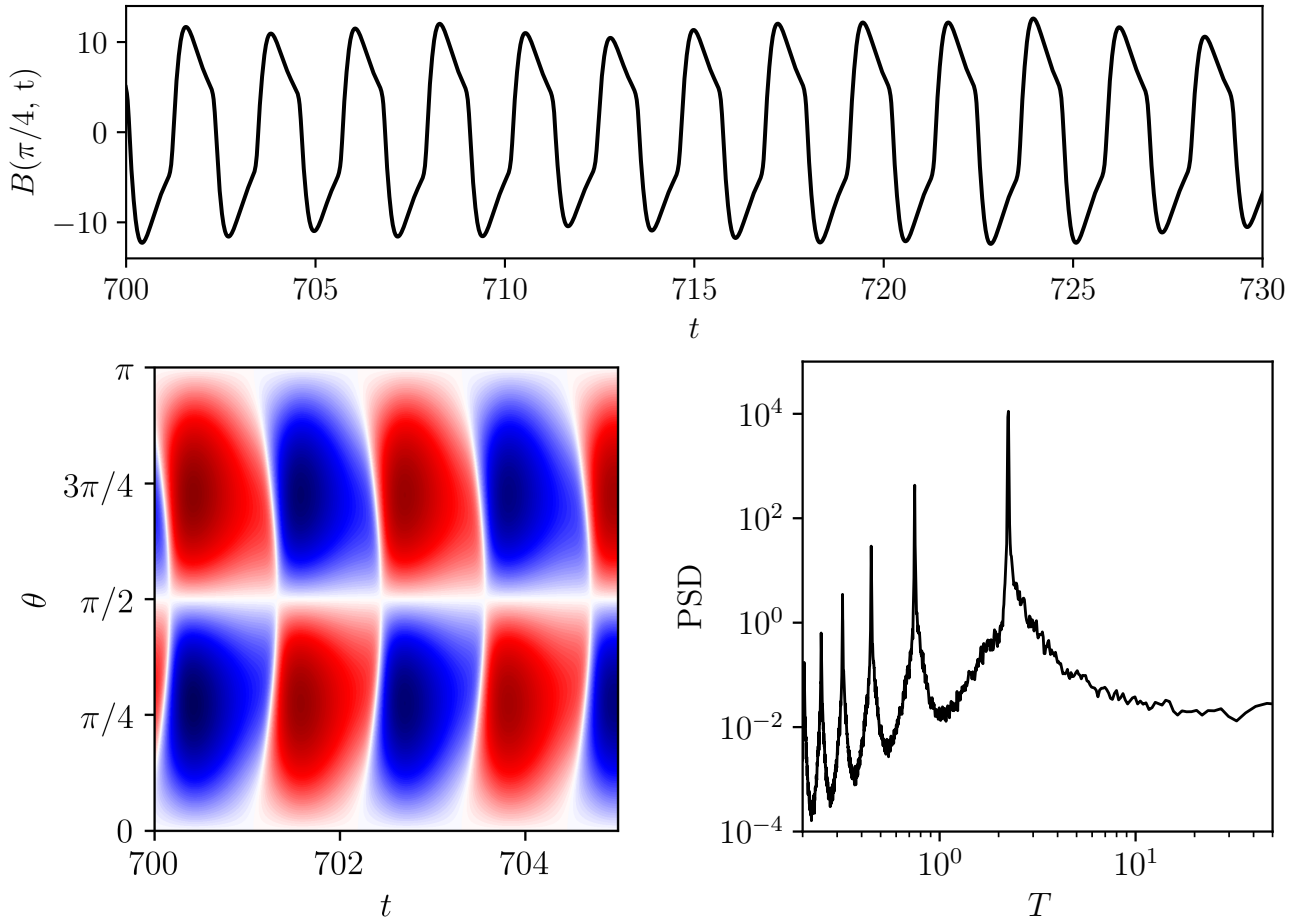


Рисунок 4.18 — Решение уравнений Паркера с механизмом подавления спиральности  $\alpha = \alpha_0 / (1 + B^2)$  при  $D = -2000$  со случайным возмущением динамо-числа ( $\delta = 0.2$ ): развертка колебаний тороидального магнитного поля при  $\theta = \pi/4$  (вверху), широтно-временная диаграмма (внизу слева) и спектральная плотность энергии колебаний тороидального поля при  $\theta = \pi/4$  (внизу справа)

где  $\bar{D}$  — среднее значение динамо-числа (или значение динамо-числа в отсутствие стохастических возмущений), а величина  $y \sim \mathcal{U}[-\delta, \delta]$  есть равномерно распределенная случайная величина с амплитудой  $\delta$ . Известно, что во многих звездных системах управляющие параметры могут заметно изменяться за времена, сопоставимые с периодом основного цикла [178]. Для моделирования таких изменений в рассматриваемой схеме предполагается, что величина  $y$  остается постоянной в течение некоторого времени релаксации  $\tau$ , которое также является случайной величиной  $\tau \sim \mathcal{U}[0, 2T]$ , где  $T$  — период основного цикла в отсутствие вариаций.

Моделирование с учетом стохастической модуляции управляющего параметра показало, что для модели РА такая схема не способна воспроизводить

хаотическую динамику даже при весьма больших амплитудах возмущений. Как показано на рисунке 4.18, получаемый спектр активности меняется незначительно и слабо напоминает наблюдаемый солнечный спектр. Причиной низкого уровня сплошной компоненты спектра даже при достаточно больших возмущениях динамо-числа является слабая зависимость амплитуды и периода колебаний в модели РА от динамо-числа. По этой причине делается вывод о том, что даже с учетом внесения стохастических вариаций управляющего параметра, модель РА с механизмом подавления спиральности  $\alpha = \alpha_0 / (1 + B^2)$  не позволяет качественно воспроизвести наблюдаемый сплошной спектр активности.

### 4.3.2 Модель Паркера РВ

В модели РВ с механизмом подавления  $\alpha = \alpha_0 (1 - B^2)$  спиральность может менять знак при умеренных амплитудах тороидального магнитного поля. Это приводит к тому, что область существования периодических решений с дипольной симметрией оказывается значительно уже по сравнению с результатами для модели РА:  $-230 < D < -200$ . При больших амплитудах магнитного поля механизм подавления перестает работать, что приводит к экспоненциальному росту решений при  $D < -350$  и  $D > 120$ . Интересным оказывается то, что на границе режимов неограниченно растущих и чисто периодических решений в области значений динамо-числа  $-350 < D < -230$  система демонстрирует хаотическое поведение. Это приводит к тому, что получаемый спектр колебаний оказывается сплошным. Как показано на рисунке 4.19, спектр колебаний тороидального магнитного поля содержит хорошо выделенный пик, соответствующий основному циклу, а также заполненную компоненту вокруг него. С увеличением  $D$  сплошная компонента спектра усиливается, а кратные основному пику частоты пропадают.

Таким образом, можно заключить, что модель РВ способна воспроизводить спектр колебаний, качественно схожий с наблюдаемым спектром солнечной активности, без необходимости внесения стохастических возмущений управляющего параметра. Некоторой проблемой однако может являться

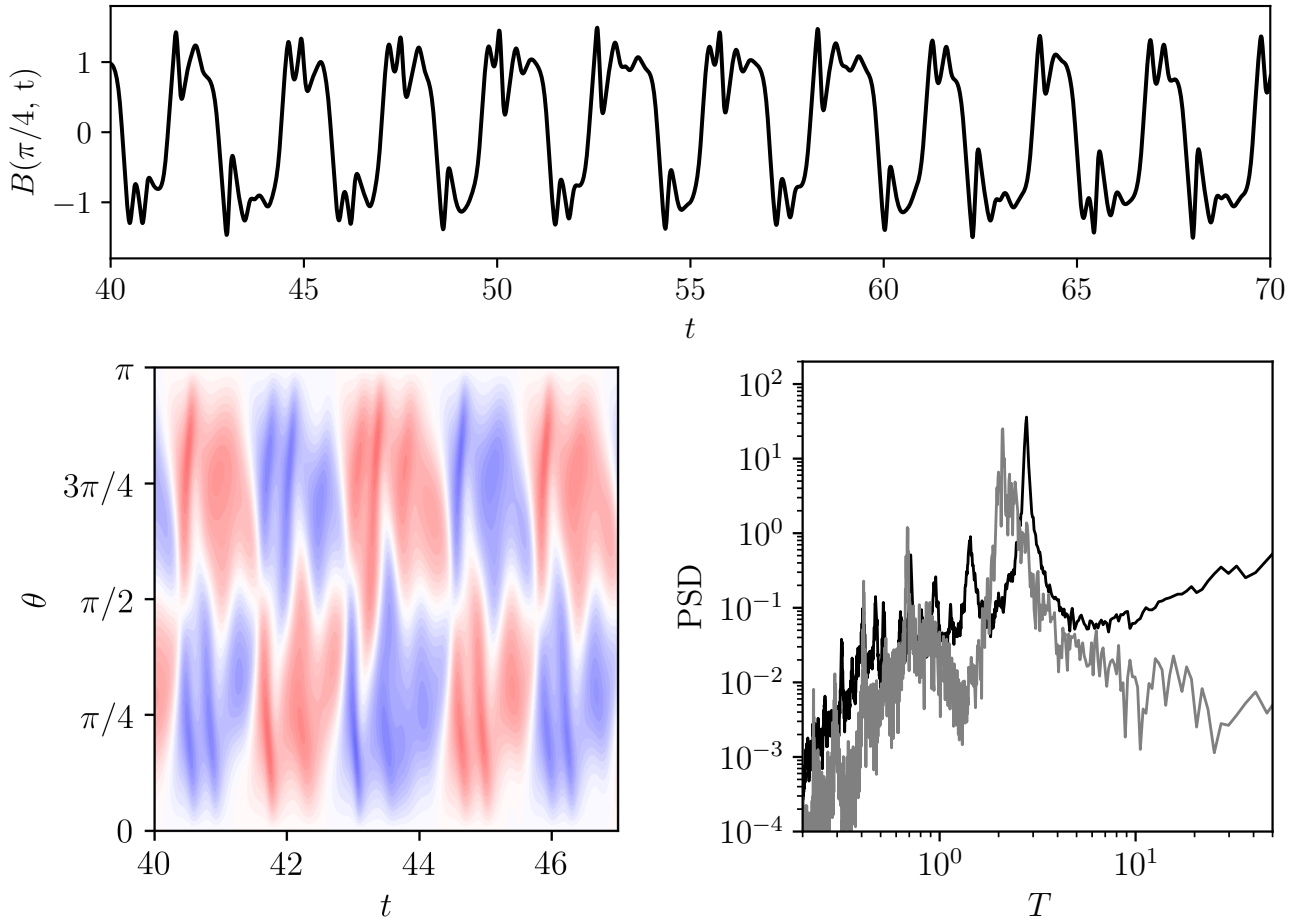


Рисунок 4.19 — Решение уравнений Паркера с механизмом подавления спиральности  $\alpha = \alpha_0 (1 - B^2)$ : развертка колебаний тороидального магнитного поля при  $\theta = \pi/4$  при  $D = -300$  (вверху), широтно-временная диаграмма при  $D = -300$  (внизу слева) и спектральная плотность энергии колебаний тороидального поля при  $\theta = \pi/4$  для двух значений динамо-числа  $D = -240$  (серый) и  $D = -300$  (черный) (внизу справа)

то, что такое поведение модели наблюдается в достаточно узком диапазоне динамо-числа.

### 4.3.3 Модель Паркера PL4

Поскольку параметризация  $\alpha$ -эффекта, турбулентной диффузии и других механизмов среднего поля с помощью дифференциальных операторов сама по себе является лишь некоторым приближением, предлагается попробовать далее не расширять спектр включаемых в модель механизмов, а наоборот пойти

в сторону дальнейшего упрощения модели. Предполагая, что основную динамику обеспечивают лишь несколько наиболее крупномасштабных мод, можно прийти к идее построения маломодовой модели, которая была в подробностях исследована в предыдущем разделе работы.

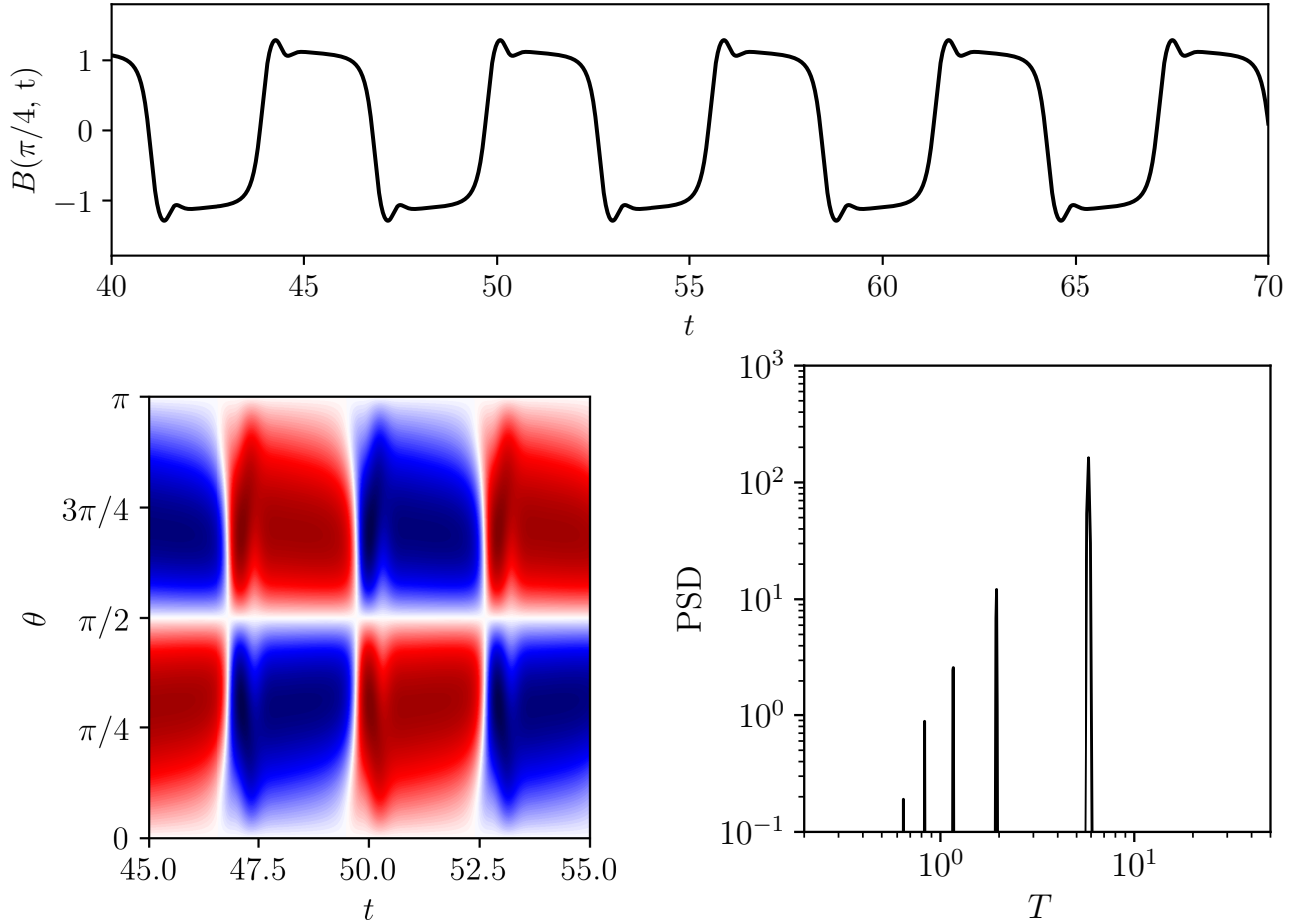


Рисунок 4.20 — Решение маломодовой модели Паркера при  $D = -220$ : развертка колебаний тороидального магнитного поля при  $\theta = \pi/4$  (вверху), широтно-временная диаграмма (внизу слева) и спектральная плотность энергии колебаний тороидального поля при  $\theta = \pi/4$  (внизу справа)

В области отрицательных значений динамо-числа периодические решения возникают в диапазоне  $-220 < D < -99$ . Интерес представляет тот факт, что форма колебаний несколько меняется с увеличением модуля динамо-числа. При  $D \approx -100$  колебания близки к гармоническим, в то время как при  $D \rightarrow -220$  колебания остаются периодическими, но приобретают сложную структуру с появлением дополнительных локальных максимумов и минимумов (см. рисунок 4.20). Причина их появления, как и в случае модели РВ, связана с изменением знака спиральности при умеренном росте амплитуды поля.

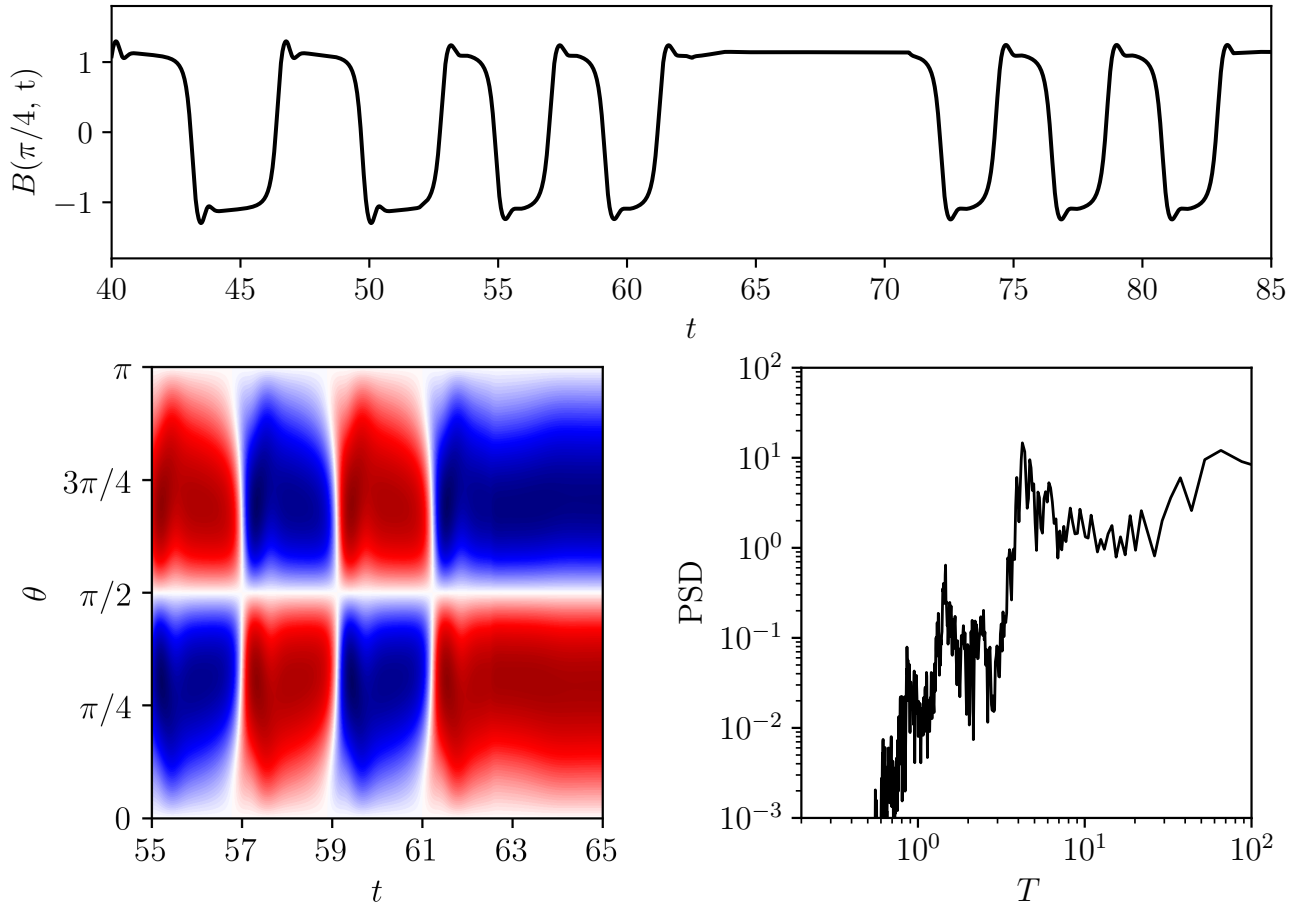


Рисунок 4.21 — Решение маломодовой модели Паркера при  $D = -220$  с учетом стохастического возмущения динамо-числа ( $\delta = 0.1$ ): развертка колебаний тороидального магнитного поля при  $\theta = \pi/4$  (вверху), широтно-временная диаграмма (внизу слева) и спектральная плотность энергии колебаний тороидального поля при  $\theta = \pi/4$  (внизу справа)

Внесение стохастических вариаций динамо-числа по схеме (4.37) позволяет воспроизвести динамику системы, которая, как показано на рисунке 4.21, характеризуется сплошным спектром. Интересной особенностью получаемого решения является слабая выраженность пика, соответствующего основному периоду колебаний. Причиной этого является сильное возмущение периода цикла колебаний. Значение  $D = -220$  находится на границе, разделяющей периодические и стационарные режимы. При некоторых вариациях параметра это приводит к тому, что система попадает в стационарное состояние. Такое поведение вызывает нарушение динамо-цикла, но не аналогично наблюдаемым большим минимумам солнечной активности, наподобие минимума Маундера [179], поскольку последние подразумевают исчезновение магнитного поля, а не остановку цикла.

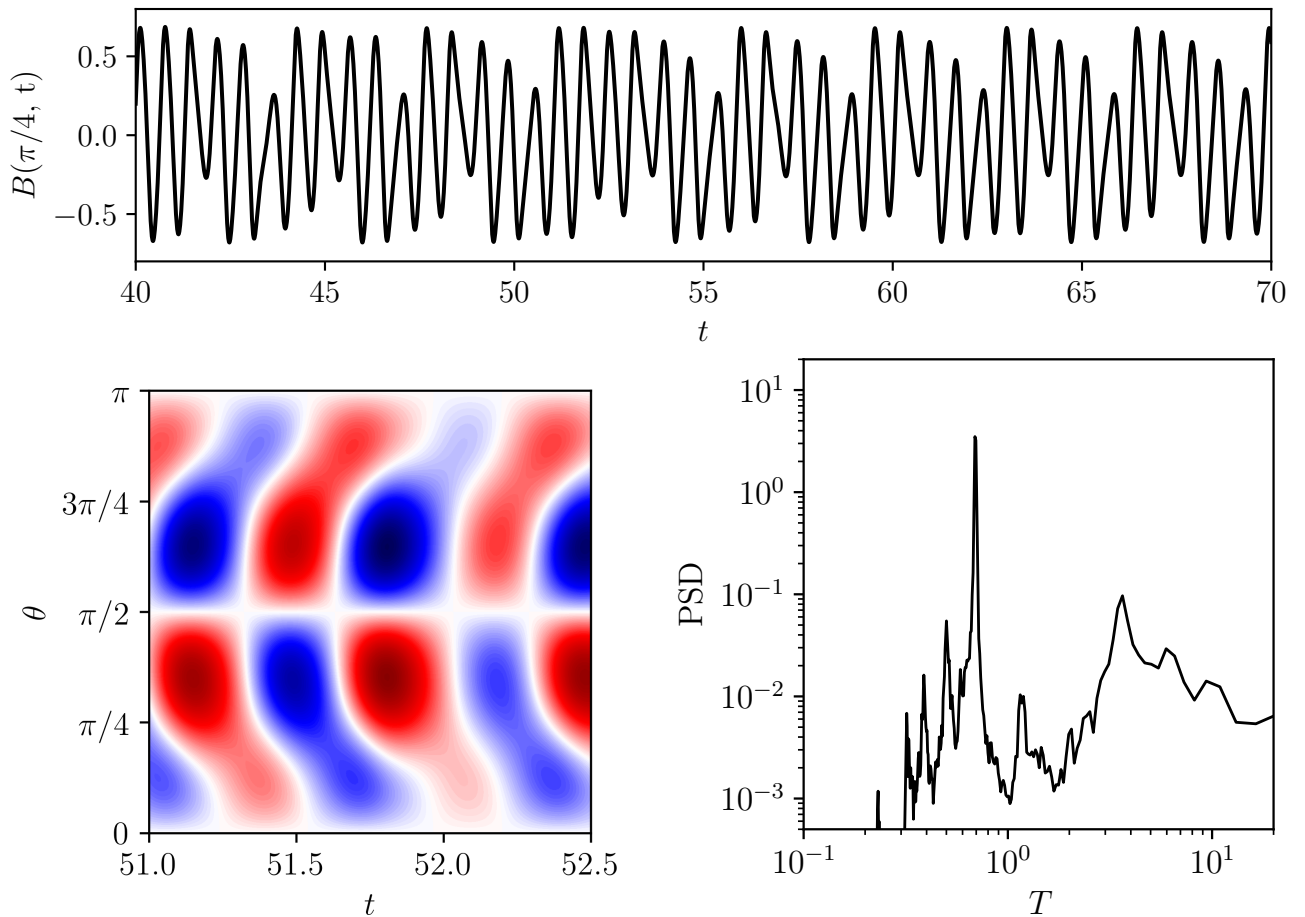


Рисунок 4.22 — Решение маломодовой модели Паркера при  $D = 515.5$ : развертка колебаний тороидального магнитного поля при  $\theta = \pi/4$  (вверху), широтно-временная диаграмма (внизу слева) и спектральная плотность энергии колебаний тороидального поля при  $\theta = \pi/4$

Наконец, как было показано ранее, маломодовая модель имеет достаточно широкую область  $480 < D < 619$ , в которой возникает динамический хаос. Естественно, что при этом возникает сплошной спектр, который характеризуется разной степенью выраженности основного пика, кратных гармоник и непрерывной компоненты в зависимости от динамо-числа. При  $D \rightarrow 480$  пик, соответствующий основной частоте цикла, является наиболее выраженным (см. рисунок 4.10), а при  $D \rightarrow 619$  вместо одной выделенной частоты в спектре наблюдается некоторая широкая область, незначительно выделяющаяся на фоне шума (см. рисунок 4.12). Поскольку степень хаотичности поведения системы нарастает почти монотонно с увеличением  $D$ , можно ожидать существование некоторых промежуточных режимов с умеренно выделенным основным циклом и развитой непрерывной компонентой. Один из таких режимов при  $D = 550$  приведен на рисунке 4.11. Другой в некотором смысле более примечатель-

ный пример представлен на рисунке 4.22. При  $D = 515.5$  спектр колебаний помимо выраженного основного пика, соответствующего основному циклу, содержит так же выделенный вторичный пик в области низких частот (больших периодов). Появление этого пика связано с длинновременной модуляцией колебаний. Этот пик можно воспринимать как некоторый намек на 100-летний цикл Гляйсберга [180]. Некоторой проблемой является то, что, как и ожидается при положительных значениях  $D$ , динамо-волна распространяется в направлении от экватора к полюсу, то есть в направлении, противоположном реальной солнечной динамо-волне.

#### 4.4 Выводы по главе

Исследованы три различные модификации модели  $\alpha\omega$ -динамо Паркера. Первая модификация PA соответствует классическому нелинейному механизму подавления спиральности. Во второй модификации PB допускается изменение знака спиральности с ростом амплитуды тороидальной компоненты магнитного поля. Третья модификация PL4 представляет собой маломодовое приближение модели PB, при получении которой в разложении оставлены по две старшие моды для тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля.

Построена диаграмма режимов маломодовой модели Паркера в зависимости от динамо-числа. Показано существование диапазона динамо-числа, в котором наблюдается динамический хаос. Для исследования степени хаотичности колебаний предложена мера, основанная на коэффициенте заполнения гистограммы времен колебаний. Применимость меры для разделения периодических и хаотических режимов продемонстрирована на примере системы Лоренца. Показано, что степень хаотичности колебаний в области динамического хаоса для маломодовой модели Паркера увеличивается с ростом динамо-числа.

Показано, что модель Паркера со знакопеременным механизмом подавления спиральности и ее маломодовый аналог способны при некоторых значениях динамо-числа воспроизводить спектр колебаний магнитного поля, качественно схожий с наблюдаемым спектром солнечной активности.

Результаты главы опубликованы в статьях [1; 2; 5].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Итоги выполненного исследования.

1. В задаче Гартмана для жидкости с линейным поперек канала распределением электропроводности получены асимметричные стационарные профили скорости, характеризующиеся наличием точек перегиба. В рамках линейного анализа исследована устойчивость полученных профилей в зависимости от величины градиента электропроводности  $\kappa$ . Обнаружены два типа линейной неустойчивости. Первый тип связан с неустойчивостью гартмановского погранслоя (НГП). Вторым тип неустойчивости (НТП) связан с наличием точки перегиба вблизи максимума в профиле скорости. Показано, что критическое число Рейнольдса для НГП снижается с увеличением  $\kappa$ . Неустойчивость точки перегиба возникает при некотором значении  $\kappa$ , которое существенно больше порога появления точек перегиба в профиле скорости. Критическое число Рейнольдса для НТП быстро уменьшается с увеличением  $\kappa$  и оказывается на порядок ниже по сравнению с критическим числом Рейнольдса для НГП при больших  $\kappa$ .
2. Проведено моделирование процесса измерения скорости течения методом лагранжевых меток на примере одномерного уравнения переноса скалярной величины с учетом диффузии. Показано, что в жидких металлах, которые характеризуются высокими значениями теплопроводности, диффузионный эффект может приводить к систематическому завышению оценки скорости. Выявлено, что при значениях числа Пекле  $Pe \sim 10^3$  диффузионные эффекты не вносят погрешность в измерения. Показано отсутствие диффузионного эффекта для высокочастотных сигналов в силу быстрого затухания возмущений. Приведены оценки чисел Пекле с учетом турбулентных коэффициентов переноса.
3. На основе коэффициента заполнения гистограммы времен возвращения предложена простая мера оценки степени хаотичности решений динамической системы. Показано, что введенная мера позволяет разделять периодические и хаотические режимы, а также уровень хаотичности каждого режима. На основе введенной меры исследована область ди-

намического хаоса маломодовой модели Паркера. Выявлено существование окон периодичности, а также увеличение степени хаотичности колебаний с ростом динамо-числа.

4. На примере простых моделей  $\alpha\omega$ -динамо Паркера исследована возможность воспроизведения наблюдаемого спектра солнечной активности. Показано, что модель Паркера со знакопеременным механизмом подавления спиральности и ее маломодовый аналог способны при некоторых значениях динамо-числа воспроизводить спектр колебаний магнитного поля, качественно схожий с наблюдаемым спектром.

#### **Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.**

Полученные в работе результаты закладывают основу для дальнейших исследований. В частности, интересным представляется исследование устойчивости течения Гартмана в полной постановке с зависимостью вязкости и электропроводности жидкости от некоторой скалярной величины, которая перемешивается течением. Постановку можно усложнять, вводя реалистичные зависимости вязкости и электропроводности, к примеру, от температуры. Полученные результаты могут быть интересны для проектирования систем охлаждения энергетических установок, использующих жидкие металлы.

Результаты по моделированию динамики лагранжевых меток могут быть использованы при совершенствовании методик измерения скорости течения жидких металлов и при создании новых типов жидкометаллических расходомеров. Обобщение полученных результатов может быть выполнено за счет учета влияния случайных шумов или при рассмотрении реалистичных видов возмущений, генерируемых электромагнитными системами.

Перспективным направлением, развивающим результаты исследования в области моделирования спектральных свойств солнечной активности, представляется разработка маломодовых моделей с учетом динамического уравнения для спиральности. Интерес вызывает также разработка методов совместного анализа детерминированного хаоса и стохастических возмущений, а также установление универсальных критериев, связывающих структуру аттрактора маломодовой динамо-системы с видом спектра активности. Подобные критерии в перспективе могут лечь в основу методов прогнозирования вариаций солнечной активности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frick, P.* Spectral Properties of Low-order Dynamo Systems / P. Frick, R. Okatev, D. Sokoloff // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2022. — Vol. 18, no. 2. — P. 289—296.
2. *Okatev, R.* Can the observable solar activity spectrum be reproduced by a simple dynamo model? / R. Okatev, P. Frick, D. Sokoloff // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. — 2023. — Vol. 117, no. 6. — P. 437—454.
3. *Окатыев, Р.* Течение Гартмана в слое жидкости с пространственно неоднородными свойствами / Р. Окатыев, П. Фрик, И. Колесниченко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». — 2023. — Т. 15, № 3. — С. 34—42.
4. О влиянии диффузии на точность измерения расхода жидкости методом лагранжевых меток / Р. Окатыев, П. Фрик, И. Колесниченко, Е. Гольбрайх // Вестник Пермского университета. Физика. — 2023. — № 4. — С. 28—34.
5. *Окатыев, Р.* Статистика времен возвращения при анализе хаоса в динамических системах / Р. Окатыев, П. Фрик // Вестник Пермского университета. Физика. — 2024. — № 3. — С. 19—27.
6. Inflection point instability in Hartmann channel flow with variable electric conductivity / R. Okatev, O. Zikanov, D. Krasnov, P. Frick // Physics of Fluids. — 2026. — Vol. 38, no. 4.
7. *Davidson, P.* Introduction to Magnetohydrodynamics / P. Davidson. — Cambridge : Cambridge University Press, 2017.
8. Свойства элементов. Справочник. / М. Дриц [и др.] ; под ред. П. общ. ред. проф. М. Е. Дрица. — М.: «Металлургия», 1985.
9. *Gale, W. F.* Smithells Metals Reference Book / W. F. Gale, T. C. Totemeier. — Elsevier, 2004. — P. 2072.
10. *Sobolev, V.* Database of thermophysical properties of liquid metal coolants for GEN-IV / V. Sobolev. — Belgian Nuclear Research Center SCK-CEN Belgium, 2011.

11. Experimental and Modeling of Conductivity for Electrolyte Solution Systems / W. Zhang [et al.] // ACS Omega. — 2020. — Vol. 5, no. 35. — P. 22465—22474.
12. *Acosta-Zamora, K.* Study of electromagnetically driven flows of electrolytes in a cylindrical vessel: Effect of electrical conductivity, magnetic field, and electric current / K. Acosta-Zamora, A. Beltrán // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2022. — Vol. 191. — P. 122854.
13. *Краузе, Ф.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. Пер. с англ. / Ф. Краузе, К.-Х. Рэдлер. — М.: «Мир», 1984. — С. 320.
14. *Stix, M.* The Sun / M. Stix. — Berlin : Springer Berlin Heidelberg, 1989. — P. 390.
15. *Зельдович, Я.* Магнитные поля в астрофизике / Я. Зельдович, А. Рuzмайкин, Д. Соколов. — Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. — С. 384.
16. *Шутц, Б.* Геометрические методы математической физики. Пер. с англ. / Б. Шутц. — М.: «Мир», 1984. — 304 с.
17. *Моффат, Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. Пер. с англ. / Г. Моффат. — М.: «Мир», 1980. — 340 с.
18. *Alfvén, H.* On the Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves / H. Alfvén // Arkiv för matematik, astronomi och fysik. — 1943. — Vol. 29B, no. 2. — P. 1—7.
19. *Ландау, Л.* Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика / Л. Ландау, Е. Лифшиц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — С. 736.
20. *Брановер, Г. Г.* Магнитная гидродинамика несжимаемых сред / Г. Г. Брановер, А. Б. Цинобер. — М. : Наука, 1970. — С. 380.
21. *Шерклифф, Д.* Курс магнитной гидродинамики. Пер. с англ. / Д. Шерклифф. — М.: «Мир», 1967. — 320 с.
22. *Batchelor, G. K.* On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion / G. K. Batchelor // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1950. — Vol. 201, no. 1066. — P. 405—416.
23. *Гельфгат, Ю. М.* Жидкий металл под действием электромагнитных сил / Ю. М. Гельфгат, О. А. Лиелаусис, Э. В. Щербинин. — Рига : Зинатне, 1976. — С. 247.

24. Электровихревые течения / В. Бояревич [и др.]. — Рига : Зинатне, 1985. — С. 315.
25. *Hartmann, J.* Hg dynamics I. Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field / J. Hartmann // *Matematisk-Fysiske Meddelelser*. — 1937. — Vol. 15, no. 6. — P. 1—27.
26. *Chang, C. C.* Duct flow in magnetohydrodynamics / C. C. Chang, T. S. Lundgren // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. — 1961. — Vol. 12, no. 2. — P. 100—114.
27. *Chang, C.-C.* Magneto-hydrodynamic channel flow as influenced by wall conductance / C.-C. Chang, J. T. Yen // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. — 1962. — Vol. 13, no. 3. — P. 266—272.
28. *Lock, R. C.* The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field / R. C. Lock // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. — 1955. — Dec. — Vol. 233, no. 1192. — P. 105—125.
29. *Roberts, P. H.* An Introduction to Magnetohydrodynamics / P. H. Roberts. — London : Longmans, 1967. — P. 264.
30. *Takashima, M.* The stability of the modified plane Poiseuille flow in the presence of a transverse magnetic field / M. Takashima // *Fluid Dynamics Research*. — 1996. — May. — Vol. 17, no. 6. — P. 293—310.
31. *Lingwood, R.* On the stability of the Hartmann layer / R. Lingwood, T. Alboussiere // *Physics of Fluids*. — 1999. — Vol. 11, no. 8. — P. 2058—2068.
32. *Moresco, P.* Experimental study of the instability of the Hartmann layer / P. Moresco, T. Alboussiere // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2004. — Apr. — Vol. 504. — P. 167—181.
33. Laminar-Turbulent Transition in Magnetohydrodynamic Duct, Pipe, and Channel Flows / O. Zikanov [et al.] // *Applied Mechanics Reviews*. — 2014. — Vol. 66, no. 3.
34. *Веденеев, В. В.* Математическая теория устойчивости плоскопараллельных течений и развитие турбулентности / В. В. Веденеев. — Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2016. — С. 152.

35. *Gerard-Varet, D.* Amplification of small perturbations in a Hartmann layer / D. Gerard-Varet // *Physics of Fluids*. — 2002. — Apr. — Vol. 14, no. 4. — P. 1458—1467.
36. *Airiau, C.* On the amplification of small disturbances in a channel flow with a normal magnetic field / C. Airiau, M. Castets // *Physics of Fluids*. — 2004. — Aug. — Vol. 16, no. 8. — P. 2991—3005.
37. Numerical study of the instability of the Hartmann layer / D. S. Krasnov [et al.] // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2004. — Apr. — Vol. 504. — P. 183—211.
38. *Zienicke, E. A.* Parametric study of streak breakdown mechanism in Hartmann flow / E. A. Zienicke, D. Krasnov // *Physics of Fluids*. — 2005. — Ноябрь. — Т. 17, № 11.
39. *Smolentsev, S.* Physical background, computations and practical issues of the magnetohydrodynamic pressure drop in a fusion liquid metal blanket / S. Smolentsev // *Fluids*. — 2021. — Vol. 6, no. 3. — P. 110.
40. MHD R&D activities for liquid metal blankets / C. Mistrangelo [et al.] // *Energies*. — 2021. — Vol. 14, no. 20. — P. 6640.
41. Experimental investigation of MHD heat transfer in a vertical round tube affected by transverse magnetic field / I. Melnikov [et al.] // *Fusion Engineering and Design*. — 2016. — Nov. — Vol. 112. — P. 505—512.
42. Buoyancy effects in vertical rectangular duct with coplanar magnetic field and single sided heat load – Downward and upward flow / I. Kirillov [et al.] // *Fusion Engineering and Design*. — 2018. — Feb. — Vol. 127. — P. 226—233.
43. Limits of strong magneto-convective fluctuations in liquid metal flow in a heated vertical pipe affected by transverse magnetic field / I. Belyaev [и др.] // *International Journal of Thermal Sciences*. — 2021. — Т. 161.
44. Mixed Convection in Pipe and Duct Flows With Strong Magnetic Fields / O. Zikanov [et al.] // *Applied Mechanics Reviews*. — 2021. — Jan. — Vol. 73, no. 1. — P. 010801.
45. *Drazin, P. G.* *Hydrodynamic Stability* / P. G. Drazin, W. H. Reid. — Cambridge University Press, 2004. — P. 619.

46. *Hunt, J. C.* Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts / J. C. Hunt // Journal of fluid mechanics. — 1965. — Vol. 21, no. 4. — P. 577—590.
47. *Priede, J.* Linear stability of Hunt's flow / J. Priede, S. Aleksandrova, S. Molokov // Journal of Fluid Mechanics. — 2010. — Vol. 649. — P. 115—134.
48. *Arlt, T.* The effect of finite-conductivity Hartmann walls on the linear stability of Hunt's flow / T. Arlt, J. Priede, L. Bühler // Journal of Fluid Mechanics. — 2017. — Vol. 822. — P. 880—891.
49. *Buhler, L.* Instabilities in quasi-two-dimensional magnetohydrodynamic flows / L. Buhler // Journal of Fluid Mechanics. — 1996. — Nov. — Vol. 326. — P. 125—150.
50. *Кириллов, П. Л.* Теплофизические свойства жидкометаллических теплоносителей (справочные таблицы и соотношения) / П. Л. Кириллов, Н. Б. Денискина. — М. : ЦНИИАтоминформ, 2000. — С. 42.
51. *Повх, И. Л.* Магнитная гидродинамика в металлургии / И. Л. Повх, А. Б. Капуста, Б. В. Чекин. — М. : Металлургия, 1974. — 240 с.
52. *Верте, Л. А.* Электромагнитный транспорт жидкого металла / Л. А. Верте. — М.: Металлургия, 1965. — С. 236.
53. *Хрипченко, С. Ю.* Электровихревые течения в каналах МГД-устройств / С. Ю. Хрипченко. — Екатеринбург: УрО РАН, 2009. — С. 260.
54. *Takeda, Y.* Velocity profile measurement by ultrasound Doppler shift method / Y. Takeda // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 1986. — Vol. 7, no. 4. — P. 313—318.
55. *Cramer, A.* Flow measurements in liquid metals by means of the ultrasonic Doppler method and local potential probes / A. Cramer, S. Eckert, G. Gerbeth // The European Physical Journal Special Topics. — 2013. — Vol. 220, no. 1. — P. 25—41.
56. *Takeda, Y.* Flow mapping of the mercury flow / Y. Takeda, H. Kikura // Experiments in Fluids. — 2002. — Vol. 32, no. 2. — P. 161—169.
57. *Andreev, O.* Application of the ultrasonic velocity profile method to the mapping of liquid metal flows under the influence of a non-uniform magnetic field / O. Andreev, Y. Kolesnikov, A. Thess // Experiments in Fluids. — 2008. — Vol. 46, no. 1. — P. 77—83.

58. *Oborin, P.* Application of the ultrasonic doppler velocimeter to study the flow and solidification processes in an electrically conducting fluid / P. Oborin, I. Kolesnichenko // *Magnetohydrodynamics*. — 2013. — Vol. 49, no. 1. — P. 231—236.
59. Evolution of a strong electrovortex flow in a cylindrical cell / I. Kolesnichenko [et al.] // *Physical Review Fluids*. — 2020. — Vol. 5, no. 12.
60. *Losev, G.* The influence of the waveguide on the quality of measurements with ultrasonic Doppler velocimetry / G. Losev, I. Kolesnichenko // *Flow Measurement and Instrumentation*. — 2020. — Vol. 75. — P. 101786.
61. *Eckert, S.* Velocity measurements at high temperatures by ultrasound Doppler velocimetry using an acoustic wave guide / S. Eckert, G. Gerbeth, V. I. Melnikov // *Experiments in Fluids*. — 2003. — Vol. 35, no. 5. — P. 381—388.
62. *Pallagi, D.* Power reactor noise measurements in Hungary / D. Pallagi, S. Horányi, T. Hargitai // *Annals of Nuclear Energy*. — 1975. — Vol. 2, no. 2—5. — P. 333—335.
63. Determination of thermocouple transfer-functions and fluid-flow velocities by temperature-noise measurements in liquid sodium / J. Benkert [et al.] // *Progress in Nuclear Energy*. — 1977. — Vol. 1, no. 2—4. — P. 553—563.
64. Temperature correlation velocimetry technique in liquid metals / I. A. Belyaev [et al.] // *Flow Measurement and Instrumentation*. — 2017. — Vol. 55. — P. 37—43.
65. Turbulent convective heat transfer in an inclined tube with liquid sodium / A. Mamykin [et al.] // *Magnetohydrodynamics*. — 2015. — Vol. 51, no. 2. — P. 329—336.
66. *Шерклиф, Д.* Теория электромагнитного измерения расхода / Д. Шерклиф. — М.: Мир, 1965. — С. 268.
67. *Thess, A.* Lorentz Force Velocimetry / A. Thess, E. V. Votyakov, Y. Kolesnikov // *Physical Review Letters*. — 2006. — Vol. 96, no. 16.
68. Theory of the Lorentz force flowmeter / A. Thess [и др.] // *New Journal of Physics*. — 2007. — Т. 9, № 8. — С. 299—299.
69. A combined liquid sodium flow measurement system / R. Khalilov [et al.] // *Magnetohydrodynamics*. — 2016. — Vol. 52, no. 1. — P. 53—60.

70. Experimental study on the sensitivity and accuracy of electric potential local flow measurements / A. Cramer [et al.] // Flow Measurement and Instrumentation. — 2006. — Mar. — Vol. 17, no. 1. — P. 1—11.
71. The magnetic-distortion probe: Velocimetry in conducting fluids / S. Miralles [et al.] // Review of Scientific Instruments. — 2011. — Vol. 82, no. 9.
72. *Kolesnichenko, I.* Interaction between counter-rotating azimuthal and axial liquid metal flows in cylindrical channel / I. Kolesnichenko, V. Ozernykh // Physical Review Fluids. — 2025. — Nov. — Vol. 10, no. 11.
73. Turbulent convective heat transfer in a long cylinder with liquid sodium / P. Frick [et al.] // Europhysics Letters. — 2015. — Vol. 109, no. 1. — P. 14002.
74. *Паркер, Е.* Космические магнитные поля. Том 1 / Е. Паркер. — М. : Мир, 1982. — С. 608.
75. *Ruzmaikin, A.* Magnetic fields of galaxies / A. Ruzmaikin, A. Shukurov, D. Sokoloff. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1988. — P. 311.
76. *Соколов, Д. Д.* Космический магнит в нашей лаборатории / Д. Д. Соколов, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик // Химия и жизнь. — 2014. — № 6. — С. 2—6.
77. *Викулин, А. В.* Введение в физику Земли. Учебное пособие для геофизических специальностей вузов. / А. В. Викулин. — Петропавловск-Камчатский : Изд-во КГПУ. — С. 240.
78. *Poirier, J.-P.* Introduction to the Physics of the Earth's Interior / J.-P. Poirier. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — P. 312.
79. *Hale, G. E.* On the Probable Existence of a Magnetic Field in Sun-Spots / G. E. Hale // The Astrophysical Journal. — 1908. — Vol. 28. — P. 315.
80. *Larmor, J.* How Could a Rotating Body Such as the Sun Become a Magnet? / J. Larmor // Report British of the Association for the Advancement of Science. — London : John Murray, 1919. — P. 159—190.
81. *Соколов, Д. Д.* Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту / Д. Д. Соколов, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик // Успехи физических наук. — 2014. — Т. 184, № 3. — С. 313—335.

82. *Rikitake, T.* Oscillations of a system of disk dynamos / T. Rikitake // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1958. — Vol. 54, no. 1. — P. 89—105.
83. *Петрова, Г. Н.* Характерные изменения геомагнитного поля в прошлом / Г. Н. Петрова, Т. Б. Нечаева, Г. А. Поспелова. — М. : Наука, 1992. — С. 175.
84. The Geologic time scale / ed. by F. M. Gradstein [et al.]. — Oxford : Elsevier, 2012. — P. 1144.
85. A Revised Collection of Sunspot Group Numbers / J. M. Vaquero [et al.] // Solar Physics. — 2016. — Vol. 291, no. 9/10. — P. 3061—3074.
86. Chromospheric variations in main-sequence stars. II. / S. L. Baliunas [et al.] // The Astrophysical Journal. — 1995. — Vol. 438. — P. 269.
87. Evidence for a starspot cycle on BD +26 deg 730 / L. Hartmann [et al.] // The Astrophysical Journal. — 1981. — Vol. 249. — P. 662.
88. A global environmental crisis 42,000 years ago / A. Cooper [et al.] // Science. — 2021. — Vol. 371, no. 6531. — P. 811—818.
89. *Вайнштейн, С. И.* О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы «динамо») / С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович // Успехи физических наук. — 1972. — Т. 106. — С. 431—457.
90. *Rincon, F.* Dynamo theories / F. Rincon // Journal of Plasma Physics. — 2019. — Vol. 85, no. 4. — P. 205850401.
91. *Plunian, F.* Fast and furious dynamo action in the anisotropic dynamo / F. Plunian, T. Alboussière // Journal of Fluid Mechanics. — 2022. — Vol. 941.
92. *Cowling, T. G.* The Magnetic Field of Sunspots / T. G. Cowling // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1933. — Vol. 94, no. 1. — P. 39—48.
93. *Брагинский, С. И.* О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости / С. И. Брагинский // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1964. — Т. 47. — С. 1084—1098.
94. *Зельдович, Я. Б.* Магнитное поле в проводящей турбулентной жидкости при двумерном движении / Я. Б. Зельдович // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1956. — Т. 31, № 1. — С. 154—155.

95. *Steenbeck, M.* Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung / M. Steenbeck, F. Krause, K.-H. Rädler // Zeitschrift für Naturforschung A. — 1966. — Vol. 21, no. 4. — P. 369—376.
96. *Пономаренко, Ю. Б.* К теории гидромагнитного динамо / Ю. Б. Пономаренко // Журнал прикладной математики и технической физики. — 1973. — № 6. — С. 47—51.
97. Fluctuation dynamo and turbulent induction at low magnetic Prandtl numbers / A. A. Schekochihin [et al.] // New Journal of Physics. — 2007. — Vol. 9, no. 8. — P. 300.
98. *Казанцев, А. П.* Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью / А. П. Казанцев // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1967. — Т. 53, № 5.
99. *Kraichnan, R. H.* Small-Scale Structure of a Scalar Field Convected by Turbulence / R. H. Kraichnan // The Physics of Fluids. — 1968. — Vol. 11, no. 5. — P. 945—953.
100. *Brandenburg, A.* Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory / A. Brandenburg, K. Subramanian // Physics Reports. — 2005. — Vol. 417, no. 1—4. — P. 1—209.
101. Magnetic field amplification by small-scale dynamo action: Dependence on turbulence models and Reynolds and Prandtl numbers / J. Schober [et al.] // Physical Review E. — 2012. — Vol. 85, no. 2.
102. Virtual states and exponential decay in small-scale dynamo / A. V. Kopyev [et al.] // Physical Review E. — 2026. — Vol. 113, no. 3.
103. Small-scale turbulent dynamo for low-Prandtl number fluid: Comparison of the theory with results of numerical simulations / A. V. Kopyev [et al.] // Astronomy & Astrophysics. — 2026. — Vol. 708. — A165.
104. *Rädler, K.-H.* The mean electromotive force for MHD turbulence: the case of a weak mean magnetic field and slow rotation / K.-H. Rädler, N. Kleeorin, I. Rogachevskii // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. — 2003. — Vol. 97, no. 3. — P. 249—274.

105. *Rädler, K.-H.* Mean electromotive force due to turbulence of a conducting fluid in the presence of mean flow / K.-H. Rädler, R. Stepanov // *Physical Review E*. — 2006. — Vol. 73, no. 5.
106. Физика звёзд средних и малых масс с активностью солнечного типа / Р. Е. Гершберг [и др.]. — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2020. — С. 768.
107. *Allahverdiyev, R. R.* Derivation of the Basic Magnetohydrodynamic Dynamo Equations Obtained by the Vector Potential Averaging in a Time Short-Correlated Turbulence / R. R. Allahverdiyev, Y. E. V., D. D. Sokoloff // *Geomagnetism and Aeronomy*. — 2023. — Vol. 63, no. 7. — P. 882—891.
108. *Parker, E. N.* Hydromagnetic Dynamo Models / E. N. Parker // *Astrophys. J.* — 1955. — Vol. 122. — P. 293—314.
109. *Попова, Е. П.* Современные результаты асимптотических исследований моделей динамо / Е. П. Попова // *Успехи физических наук*. — 2016. — Т. 186, № 6. — С. 577—596.
110. *Соколов, Д.* Асимптотические свойства динамо-волн / Д. Соколов, М. Фьок, Е. Нем-Риб // *Магнитная гидродинамика*. — 1995. — Т. 31, № 1/2. — С. 19—38.
111. *Babcock, H. W.* The topology of the Sun's magnetic field and the 22-year cycle / H. W. Babcock // *Astrophysical Journal*. — 1961. — Vol. 133. — P. 572.
112. *Leighton, R. B.* A magneto-kinematic model of the solar cycle / R. B. Leighton // *Astrophysical Journal*. — 1969. — Vol. 156. — P. 1.
113. *Charbonneau, P.* Evolution of Solar and Stellar Dynamo Theory / P. Charbonneau, D. Sokoloff // *Space Science Reviews*. — 2023. — June. — Vol. 219, no. 5.
114. *Dikpati, M.* A Babcock-Leighton Flux Transport Dynamo with Solar-like Differential Rotation / M. Dikpati, P. Charbonneau // *The Astrophysical Journal*. — 1999. — Vol. 518, no. 1. — P. 508—520.
115. *Dikpati, M.* Flux-transport solar dynamos / M. Dikpati, P. A. Gilman // *Space Science Reviews*. — 2009. — Vol. 144, no. 1—4. — P. 67—75.
116. Flux transport dynamos: from kinematics to dynamics / B. B. Karak [et al.] // *Space Science Reviews*. — 2014. — Vol. 186, no. 1—4. — P. 561—602.

117. Spectral characteristic of mid-term quasi-periodicities in sunspot data / P. Frick [et al.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2020. — Vol. 491, no. 4. — P. 5572—5578.
118. *Benevolenskaya, E. E.* Double magnetic cycle of solar activity / E. E. Benevolenskaya // Solar Physics. — 1995. — Vol. 161, no. 1. — P. 1—8.
119. Wavelet analysis of solar activity recorded by sunspot groups / P. Frick [et al.] // Astronomy & Astrophysics. — 1997. — Vol. 328. — P. 670—681.
120. *Plunian, F.* Deciphering solar turbulence from sunspots records / F. Plunian, G. R. Sarson, R. Stepanov // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2009. — Vol. 400. — P. L47—L51.
121. A combined analysis of the observational aspects of the quasi-biennial oscillation in solar magnetic activity / G. Bazilevskaya [et al.] // Space Science Reviews. — 2014. — Dec. — Vol. 186. — P. 359—386.
122. Constraining non-linear dynamo models using quasi-biennial oscillations from sunspot area data / F. Inceoglu [et al.] // Astronomy & Astrophysics. — 2019. — Vol. 625.
123. *Pipin, V. V.* Does Nonaxisymmetric Dynamo Operate in the Sun? / V. V. Pipin, A. G. Kosovichev // The Astrophysical Journal. — 2018. — Vol. 867, no. 2. — P. 145.
124. Nonlinear mean-field dynamo and prediction of solar activity / N. Safiullin [et al.] // Journal of Plasma Physics. — 2018. — Vol. 84, no. 3.
125. Solar large-scale magnetic field and cycle patterns in solar dynamo / V. N. Obridko [et al.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2021. — Vol. 504, no. 4. — P. 4990—5000.
126. *Lorenz, E. N.* Deterministic Nonperiodic Flow / E. N. Lorenz // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1963. — Vol. 20, no. 2. — P. 130—141.
127. *Bullard, E.* The stability of a homopolar dynamo / E. Bullard // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1955. — Vol. 51, no. 4. — P. 744—760.
128. *Ruzmaikin, A. A.* The solar cycle as a strange attractor / A. A. Ruzmaikin // Comments on Astrophysics. — 1981. — Vol. 9, no. 2. — P. 85—93.

129. *Tobias, S. M.* Chaotically modulated stellar dynamos / S. M. Tobias, N. O. Weiss, V. Kirk // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1995. — Vol. 273, no. 4. — P. 1150—1166.
130. Low-order stellar dynamo models: Low-order stellar dynamo models / A. L. Wilmot-Smith [et al.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2005. — Vol. 363, no. 4. — P. 1167—1172.
131. *Соколов, Д.* Маломодовое приближение в задаче звездного динамо / Д. Соколов, Н. С.Н. // Вычислительные методы и программирование. — 2007. — Т. 8, № 2. — С. 195—204.
132. *Нефедов, С. Н.* Нелинейная маломодовая модель динамо Паркера / С. Н. Нефедов, Д. Д. Соколов // Астрономический журнал. — 2010. — Т. 87, № 3. — С. 1—8.
133. *Гледзер, Е.* Системы гидродинамического типа и их применение / Е. Гледзер, Ф. Должанский, А. Обухов. — М. : Наука, 1981. — С. 368.
134. *Plunian, F.* Shell models of magnetohydrodynamic turbulence / F. Plunian, R. Stepanov, P. Frick // Physics Reports. — 2013. — Vol. 523, no. 1. — P. 1—60.
135. Helical shell models for three-dimensional turbulence / R. Benzi [et al.] // Physical Review E. — 1996. — Vol. 53, no. 4. — P. 3541—3550.
136. Turbulent dynamo in the shell model and the Kazantsev-Kraichnan approach / I. Abushzada [et al.] // Physical Review E. — 2025. — Vol. 112, no. 1.
137. *Pope, S.* Turbulent Flows / S. Pope. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — P. 771.
138. *Kenjeres, S.* A direct-numerical-simulation-based second-moment closure for turbulent magnetohydrodynamic flows / S. Kenjeres, K. Hanjalic, D. Bal // Physics of Fluids. — 2004. — Vol. 16, no. 5. — P. 1229—1241.
139. Application of the «K- $\epsilon$ » model to open channel flows in a magnetic field / S. Y. Smolentsev [et al.] // International Journal of Engineering Science. — 2002. — Vol. 40. — P. 693—711.

140. Influence of the Reynolds number and the spherical dimple depth on turbulent heat transfer and hydraulic loss in a narrow channel / S. Isaev [et al.] // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2010. — Vol. 53, no. 1—3. — P. 178—197.
141. A K-Epsilon RANS turbulence model for incompressible MHD flow at high Hartmann number in fusion liquid metal blankets / Z. Meng [et al.] // International Journal of Energy Research. — 2017. — Vol. 42, no. 1. — P. 314—320.
142. Белов, И. Моделирование турбулентных течений: Учебное пособие / И. Белов, С. Исаев. — Санкт-Петербург : Балтийский государственный технический университет «Военмех», 2001. — С. 108.
143. Фрик, П. Турбулентность: подходы и модели / П. Фрик. — М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. — С. 332.
144. Zhiyin, Y. Large-eddy simulation: Past, present and the future / Y. Zhiyin // Chinese Journal of Aeronautics. — 2015. — Vol. 28, no. 1. — P. 11—24.
145. Vorobev, A. Smagorinsky constant in LES modeling of anisotropic MHD turbulence / A. Vorobev, O. Zikanov // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 2007. — Vol. 22, no. 3/4. — P. 317—325.
146. Frana, K. A Numerical Simulation of the Magnetically Driven Flows in a Square Container Using the Delayed Detached Eddy Simulation / K. Frana, V. Honzejk, K. Horakova // Computational Fluid Dynamics 2010. — Berlin : Springer Berlin Heidelberg, 2011. — P. 745—751.
147. Frick, P. Large- and small-scale interactions and quenching in an  $\alpha^2$ -dynamo / P. Frick, R. Stepanov, D. Sokoloff // Physical Review E. — 2006. — Vol. 74, no. 6.
148. Степанов, Р. Сопряжение уравнений динамо средних полей и каскадной модели турбулентности в проблеме галактического динамо / Р. Степанов, П. Фрик, Д. Соколов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2008. — Т. 1, № 4. — С. 97—108.
149. Селуков, Д. Каскадная модель турбулентной вязкости для пограничного слоя / Д. Селуков, Р. Степанов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2022. — Т. 15, № 3. — С. 363—375.

150. *Хрипченко, С. Ю.* Распределение микрочастиц диборида титана, введенных в алюминиевый слиток при помощи МГД-перемешивания кристаллизующегося расплава / С. Ю. Хрипченко, В. М. Долгих, Р. Р. Сираев // Вычислительная механика сплошных сред. — 2022. — Т. 15, № 4. — С. 438—448.
151. *Колесниченко, И. В.* Экстремум зависимости напора электромагнитного насоса для жидкого металла от частоты питающего тока / И. В. Колесниченко, Р. И. Халилов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2023. — Т. 15, № 4. — С. 495—506.
152. Верификация пакетов для расчета течений жидкости в канале при действии внешнего магнитного поля / И. А. Смольянов [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. — 2021. — Т. 14, № 3. — С. 322—332.
153. Electro-vortex flows in a cylindrical cell under axial magnetic field / P. Frick [et al.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2022. — Vol. 949. — A—20.
154. *Schmid, P.* Stability and Transition in Shear Flows / P. Schmid, D. Henningsson. — New York : Springer, 2001. — P. 556.
155. Dedalus: A flexible framework for numerical simulations with spectral methods / K. Burns [et al.] // Physical Review Research. — 2020. — Vol. 2, no. 2. — P. 023068.
156. *Boyd, J. P.* Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Second Edition. / J. P. Boyd. — New York : Dover Publications, 2001. — P. 668.
157. *Krasnov, D.* Comparative study of finite difference approaches in simulation of magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Reynolds number / D. Krasnov, O. Zikanov, T. Boeck // Computers & Fluids. — 2011. — Vol. 50, no. 1. — P. 46—59.
158. *Krasnov, D.* Numerical study of magnetohydrodynamic duct flow at high Reynolds and Hartmann numbers / D. Krasnov, O. Zikanov, T. Boeck // Journal of Fluid Mechanics. — 2012. — Vol. 704. — P. 421—446.
159. Tensor-product-Thomas elliptic solver for liquid-metal magnetohydrodynamics / D. Krasnov [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2023. — Vol. 474. — P. 111784.

160. Fully Conservative Higher Order Finite Difference Schemes for Incompressible Flow / Y. Morinishi [et al.] // Journal of Computational Physics. — 1998. — Vol. 143, no. 1. — P. 90—124.
161. A current density conservative scheme for incompressible MHD flows at a low magnetic Reynolds number. Part I: On a rectangular collocated grid system / M.-J. Ni [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2007. — Vol. 227, no. 1. — P. 174—204.
162. *Nikuradse, J.* Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren / J. Nikuradse // VDI-Forschungsheft. — 1932. — No. 356. — P. 1—36.
163. *Шлихтинг, Г.* Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. — М. : Наука, 1974. — С. 712.
164. *Kuzanyan, K.* A dynamo wave in an inhomogeneous medium / K. Kuzanyan, D. Sokoloff // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. — 1995. — Vol. 81, no. 1. — P. 113—129.
165. *Charbonneau, P.* Dynamo models of the solar cycle / P. Charbonneau // Living Reviews in Solar Physics. — 2020. — Vol. 17, no. 1.
166. *Bräuer, H.* The nonlinear dynamo problem: Small oscillatory solutions in a strongly simplified model / H. Bräuer // Astronomische Nachrichten. — 1979. — Vol. 300, no. 1. — P. 43—49.
167. *Kitchatinov, L. L.* Dynamo model for grand maxima of solar activity: can superflares occur on the Sun? / L. L. Kitchatinov, S. V. Olemskoy // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — Vol. 459, no. 4. — P. 4353—4359.
168. Magnetic helicity evolution during the solar activity cycle: Observations and dynamo theory / N. Kleeorin [и др.] // Astronomy & Astrophysics. — 2003. — Т. 409, № 3. — С. 1097—1105.
169. *Weiss, N.* Physical Causes of Solar Activity / N. Weiss, S. Tobias // Space Science Reviews. — 2000. — Vol. 94, no. 1/2. — P. 99—112.
170. *Popova, H.* A double magnetic solar cycle and dynamical systems / H. Popova // Magnetohydrodynamics. — 2013. — Vol. 49, no. 1/2. — P. 59—68.

171. *Юшков, Е. В.* Инверсии геомагнитного поля и динамо-всплески в рамках простой модели геодинамо / Е. В. Юшков, Д. Д. Соколов // *Физика Земли*. — 2018. — № 4. — С. 121—126.
172. *Серенкова, А.* Нелинейный параметрический резонанс в простейшей модели солнечного динамо / А. Серенкова, Д. Соколов, Е. Юшков // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2023. — Т. 163, № 4. — С. 514—523.
173. *Takens, F.* Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980* / ed. by D. Rand, L. Young. — Berlin : Springer, 1981. — P. 366—381.
174. *Кузнецов, С.* Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике / С. Кузнецов. — М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2013. — С. 448.
175. *Фрик, П. Г.* Система Лоренца и пространственно-временные спектры турбулентности / П. Г. Фрик // *Процессы тепло- и массопереноса вязкой жидкости*. — Свердловск : Издательство УрО РАН, 1986. — С. 10—15.
176. *Берже, П.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. — М. : Мир, 1991. — С. 368.
177. *Newton, A. P. L.* Determining the temporal dynamics of the solar  $\alpha$  effect / A. P. L. Newton, E. Kim // *Astronomy & Astrophysics*. — 2013. — Vol. 551. — A66.
178. A new dynamo pattern revealed by solar helical magnetic fields / H. Zhang [et al.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. — 2010. — Vol. 402, no. 1. — P. L30—L33.
179. *Сун, В.* Минимум Маундера и переменные солнечно-земные связи / В. Сун, С. Яскелл. — Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2003. — С. 336.
180. *Peristykh, A. N.* Persistence of the Gleissberg 88-year solar cycle over the last  $\sim 12,000$  years: Evidence from cosmogenic isotopes / A. N. Peristykh, P. E. Damon // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2003. — Vol. 108, A1.