

На правах рукописи



Окатыев Роман Сергеевич

**Генерация, перенос и диффузия неоднородностей
в магнитогидродинамических течениях**

Специальность 1.1.9 —
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Пермь — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Пермский государственный национальный исследовательский университет» (ПГНИУ).

Научный руководитель: **Фрик Пётр Готлобович**, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Исаев Сергей Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий научно-исследовательской лабораторией фундаментальных исследований, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации им. А.А. Новикова», г. Санкт-Петербург

Юшков Егор Владиславович, кандидат физико-математических наук, доцент, физический факультет, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, Москва

Защита состоится 11 ноября 2026 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д004.036.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук» (филиал – Институт механики сплошных сред УрО РАН) по адресу: 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87; сайт www.icmm.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «___» _____ 2026 года.

Телефон для справок: +7 (342) 237-84-61

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.201.01 (Д004.036.01),
д-р физ.-мат. наук, доцент

Зуев Андрей Леонидович

Общая характеристика работы

Актуальность и разработанность темы исследования

Магнитная гидродинамика (МГД) исследует движения электропроводящих сред, взаимодействующих с электромагнитными полями. Ключевыми областями приложения МГД являются металлургия, непосредственно связанная с перемещениями и контролем больших объемов жидких металлов, и астрофизика, одной из важнейших задач которой является задача об обусловленной движениями проводящих сред (жидкометаллических планетарных ядер, плазменных недр звезд или межзвездной среды) генерации космических магнитных полей.

Практически все базовые задачи МГД сформулированы для однородных сред (то есть сред, свойства которых не зависят от координат и времени), так как даже в однородной постановке достаточно сложны и приводят к широкому спектру задач с важными для практических приложений результатами. Однако, подавляющее большинство сред в природных и технологических системах являются неоднородными. Это может быть структурная неоднородность, связанная с наличием частиц примеси или оксидов в расплавах жидких металлов. В технологических приложениях наличие неоднородности может быть как негативным фактором, например, в металлургии, где зачастую требуется достижение наиболее однородного состава сплава для улучшения свойств получаемых изделий, так и целью воздействия на металл, если требуется какую-либо примесь из расплава удалить. В связи с этим активно разрабатываются методы МГД-сепарации, то есть очистки среды от частиц примеси за счет действия электромагнитным полем, и методы МГД-перемешивания, суть которых заключается в бесконтактном создании течений жидких металлов электромагнитным полем с целью гомогенизации распределения примеси в расплаве. Сама среда при этом рассматривается как двухфазная.

Другой тип неоднородности связан с пространственно-временными вариациями характеристик среды (в первую очередь вязкости и электропроводности), причем речь может идти как о вариациях молекулярных свойств среды, так и о вариациях эффективных характеристик. К таковым относятся не только традиционные коэффициенты переноса, такие как турбулентная вязкость или турбулентная диффузия магнитного поля, но и характеристики мелкомасштабной турбулентности (энергия пульсаций, завихренность), наличие которых может быть необходимым условием для реализации некоторых методик контроля течения среды. Важнейшей для задач МГД-динамо характеристикой мелкомасштабной турбулентности является спиральность – мера зеркальной асимметрии течения. Было установлено, что наличие ненулевой спиральности наряду с дифференциальным вращением является ключевым фактором для генерации крупномасштабного магнитного поля звезды. Замкнутая схема генерации магнитного поля Солнца, основанная на взаимодействии этих двух механизмов, была впервые предложена Ю. Паркером. Модель Паркера представляет собой систему уравнений относительно двух составляющих магнитного поля звезды, которые

усреднены по толщине конвективной оболочки, а единственным управляющим параметром является динамо-число, которое характеризует интенсивность обоих механизмов генерации. При определенных значениях управляющего параметра решениями уравнений Паркера являются волны магнитного поля, распространяющиеся от полюсов к экватору и соответствующие основному звездному циклу активности (для Солнца речь идет о наблюдаемом 11-летнем цикле). Однако наблюдаемая звездная активность не сводится к одному лишь основному циклу и содержит множественные вариации на различных временных масштабах. Несмотря на развитие современных, достаточно детальных моделей звездных динамо, основанных на полной системе уравнений МГД, представляется интересной задача о воспроизведении заполненного спектра активности в рамках физически понятной модели Паркера, которая до сих пор не утратила своей актуальности.

Целью диссертационной работы является выявление степени влияния неоднородности свойств проводящих сред на структуру и устойчивость МГД-течений и исследование динамики развитых турбулентных течений с неоднородностями, которые могут влиять как на результаты регистрации характеристик потока, так и на временную динамику (спектральные свойства) генерируемых МГД-системами полей.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. найти профили скорости для течения Гартмана в слое жидкости с линейно распределенной по высоте канала электропроводностью и исследовать линейную устойчивость полученных решений;
2. определить границу влияния диффузии на точность измерения скорости течения методом лагранжевых меток;
3. исследовать структуру области динамического хаоса в маломодовой модели Паркера в зависимости от динамо-числа;
4. исследовать возможность воспроизведения наблюдаемого спектра солнечной активности в рамках моделей МГД-динамо паркеровского типа, в том числе за счет временной неоднородности свойств мелкомасштабной турбулентности.

Научная новизна работы состоит в том, что в ней впервые:

1. получены профили скорости течения вязкой проводящей жидкости с линейным поперек канала распределением электропроводности в плоском канале при наложенном перпендикулярно стенкам однородном магнитном поле;
2. исследована линейная устойчивость полученных профилей скорости и показано значительное по сравнению с результатами для классического течения Гартмана снижение порога устойчивости, связанное с развитием неустойчивости точки перегиба при больших градиентах электропроводности;
3. проведено систематическое исследование влияния диффузии на возникновение погрешности определения скорости методом лагранжевых меток;

4. предложена простая мера хаотичности режима колебаний динамической системы на основе анализа степени заполненности гистограммы времен возврата;
5. продемонстрирована возможность воспроизведения структуры спектра солнечной активности в рамках $\alpha\omega$ -модели Паркера для солнечного динамо в узком диапазоне динамо-числа при учете механизма подавления спиральности мелкомасштабной турбулентности, допускающего смену знака спиральности при умеренном росте магнитного поля;
6. показано, что динамическая система, полученная в рамках модели Паркера, также дает реалистичный спектр генерируемого поля при случайных во времени флуктуациях параметра, связанного с мелкомасштабной спиральностью, либо при реализации динамического хаоса.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты, полученные во второй главе, представляют фундаментальный интерес и закладывают основу для дальнейшего исследования МГД-течений гартмановского типа в случае неоднородных свойств жидкости. Также эти результаты могут быть использованы для оценки возможности возникновения неустойчивости течения жидких металлов в системах охлаждения энергетических установок вследствие локального искажения свойств рабочей жидкости.

Результаты третьей главы могут быть использованы при разработке методик измерения скорости и создании расходомеров для течений жидких металлов.

Результаты четвертой главы могут быть полезны для исследования параметрических пространств динамических систем, проявляющих хаотическое поведение. Результаты исследования спектров колебаний в рамках различных модификаций модели Паркера могут быть полезны для валидации более сложных моделей.

Методология и методы исследования

Численное решение уравнений МГД при исследовании устойчивости течения Гартмана жидкости с неоднородной электропроводностью, а также численное решение нелинейных уравнений Паркера выполнялись с использованием метода конечных разностей. Линейный анализ устойчивости течения Гартмана проводился спектральным методом с разложением по полиномам Чебышева. Анализ влияния диффузии на появление погрешности определения скорости осуществлялся полуаналитическим методом. Для построения спектров колебаний применялся метод Уэлша.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Линейно распределенная по высоте канала электропроводность приводит к искажению профиля скорости течения вязкой электропроводящей жидкости в однородном магнитном поле и появлению в нем точек перегиба.
2. Появление точек перегиба приводит к развитию нового для течения Гартмана типа неустойчивости. При значительных градиентах электропроводности порог линейной устойчивости оказывается на порядок ниже порога устойчивости гартмановского пограничного слоя.

3. Диффузионные эффекты могут приводить к систематическому завышению оценки скорости при использовании методов, основанных на регистрации лагранжевых меток. В развитых турбулентных течениях эти эффекты могут вносить существенный вклад из-за влияния турбулентной диффузии.
4. Оценка степени хаотичности режима колебаний динамической системы может быть получена на основе вычисления коэффициента заполнения гистограммы времен возврата. Предложенная мера позволяет эффективно разделить периодические и хаотические режимы.
5. Маломодовая модификация модели динамо Паркера, содержащая по две моды тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля, демонстрирует хаотическое поведение в широкой области положительных значений динамо-числа. Степень хаотичности увеличивается с увеличением управляющего параметра, чередуясь с окнами периодичности.
6. Спектр колебаний магнитного поля, качественно похожий на наблюдаемый спектр солнечной активности, может быть воспроизведен как в маломодовой модели в рамках динамического хаоса или стохастической вариации управляющего параметра, так и в исходной модели солнечного динамо Паркера при определенном механизме подавления спиральности.

Достоверность результатов обеспечивается использованием проверенных открытых программных кодов (Dedalus) и библиотек для обработки сигналов и решения обыкновенных дифференциальных уравнений (SciPy). Методы решения предварительно тестировались на классических задачах, имеющих известное решение. Для ряда задач получено хорошее соответствие результатов при использовании различных методов. Результаты расчетов хорошо соотносятся с результатами работ других авторов в предельных случаях.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах: International Symposium Non-Equilibrium Processes in Continuous Media, 16–18 сентября 2021, Пермь; The Fourth Russian Conference on Magnetohydrodynamics, 20–22 сентября 2021, Пермь; XXX Всероссийская школа конференция «Математическое моделирование в естественных науках», 6–9 октября 2021, Пермь; Всероссийская конференция молодых ученых-механиков, 4–14 сентября 2022, Сочи; XXXI Всероссийская школа-конференция «Математическое моделирование в естественных науках», 5–8 октября 2022, Пермь; XXIII Зимняя Школа по механике сплошных сред, 13–17 февраля 2023, Пермь; XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 21–25 августа 2023, Санкт-Петербург; Школа «Современная гидродинамика 2023», 29–31 августа 2023, Черноголовка; XXXII Всероссийская конференция «Математическое моделирование в естественных науках», 4–7 октября 2023, Пермь; XIX конференция «Физика плазмы в Солнечной системе», 5–9 февраля 2024, Москва; Астрофизический семинар отдела теоретической физики ФИАН (рук. В.С. Бескин), 7 февраля 2023, Москва; 193 онлайн-семинар по солнечно-земной физике ИЗМИРАН (рук. Д.Д. Соколов), 4 апреля 2024, онлайн; The Fifth Russian Conference

on Magnetohydrodynamics, 24–28 июня 2024, Пермь; Школа «Современная гидродинамика 2024», 28–30 августа 2024, Черногоровка; XXXIII Всероссийская конференция «Математическое моделирование в естественных науках», 2–4 октября 2024, Пермь; XXIV Зимняя Школа по механике сплошных сред, 24–28 февраля 2025, Пермь; X Всероссийская конференция с международным участием «Пермские гидродинамические научные чтения», 1–3 октября 2025, Пермь; Пермский гидродинамический семинар (рук. Т.П. Любимова), 31 октября 2025, Пермь.

Представленные исследования частично выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №22-19-20106), в рамках крупного научного проекта при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2024-535 от 23.04.2024).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 публикациях в журналах, являющихся рецензируемыми научными изданиями, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук [1–6] (входящие в перечень ВАК и/или индексируемые в Web of Science, Scopus).

Личный вклад. В работах [1, 2] все вычисления, обработка и визуализация результатов выполнены автором лично. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов и написание текста статьи проведены совместно с Д.Д. Соколовым и научным руководителем. В работе [3] все вычисления и визуализация результатов проведены автором. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов и написание текста статьи проведены совместно с И.В. Колесниченко и научным руководителем. В работе [4] все вычисления и визуализация результатов проведены автором. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов и написание текста статьи проведены совместно с И.В. Колесниченко, Е. Гольбрайхом и научным руководителем. В работе [5] все вычисления, обработка и визуализация результатов проведены автором. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов и написание текста статьи проведены совместно научным руководителем. В работе [6] численное решение задачи устойчивости, обработка и визуализация результатов проведены автором лично. Прямое численное моделирование в работе [6] выполнено автором вместе с Д.С. Красновым. Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов и написание текста статьи проведены совместно с О.Ю. Зикановым, Д.С. Красновым и научным руководителем.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 138 страниц текста, включая 52 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 180 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В первой главе представлены наиболее значимые и актуальные работы, связанные с темой диссертации: об устойчивости магнитогидродинамических течений жидких металлов в каналах; о различных методиках измерения скорости течений жидких металлов; об астрофизических задачах магнитной гидродинамики и роли в них пространственно-временных неоднородностей среды.

Во второй главе исследовано течение Гартмана жидкости с неоднородным пространственным распределением свойств. Течение вызвано наличием постоянного вдоль канала градиента давления. Управляющими параметрами задачи являются числа Рейнольдса $Re = Uh/\nu_0$ и Гартмана $Ha = Bh\sqrt{\sigma_0/\rho\nu_0}$, определенные по средним значениям вязкости ν_0 и электропроводности σ_0 . Здесь U – средняя скорость течения, h – полувысота канала, ρ – плотность жидкости.

Рассмотрен случай линейных поперек канала распределений вязкости и электропроводности жидкости

$$\nu(z) = \nu_0(1 + \varsigma z), \quad \sigma(z) = \sigma_0(1 + \varkappa z).$$

Схематичная постановка задачи приведена на рисунке 1.

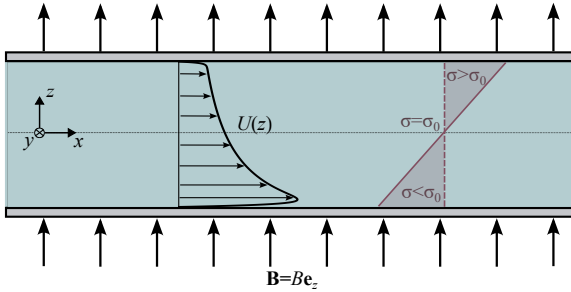


Рис. 1 — Схематичная постановка задачи о течении Гартмана жидкости с линейным по высоте канала распределением электропроводности

Стационарные профили скорости определяются уравнением

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = \frac{Re}{1 + \varsigma z} \frac{dP_0}{dx} + Ha^2 \left(\frac{1 + \varkappa z}{1 + \varsigma z} \right) U - \frac{\varsigma}{1 + \varsigma z} \frac{dU}{dz}. \quad (1)$$

Профили скорости, полученные в результате численного решения уравнения (1), характеризуются асимметрией, вызванной неоднородностью распределения силы Лоренца, и наличием точек перегиба. Стационарные профили скорости представлены на рисунке 2(а). При умеренных значениях числа Гартмана точки перегиба появляются при малых значениях $\varkappa$ (рис. 2(б)). Неоднородность вязкости оказывает слабое влияние на порог появления точек перегиба. По этой причине далее исследован случай однородного распределения вязкости $\varsigma = 0$.

В разделе 2.3 в рамках линейного анализа проведено исследование устойчивости течений с полученными профилями скорости. Получена система линеаризованных уравнений для возмущений вертикальной скорости u_z , вертикальной завихренности $\xi = \partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y$ и электрического потенциала ϕ .

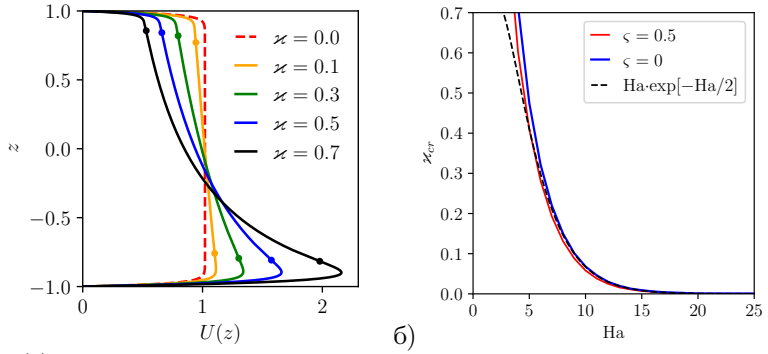


Рис. 2 — (а) Стационарные профили скорости при $\text{Ha}=50$, $\zeta = 0$ для различных значений параметра неоднородности электропроводности κ ; (б) порог появления точек перегиба κ_{cr} как функция числа Гартмана Ha . Маркерами на рисунке (а) обозначено положение точек перегиба

Представление соответствующих величин в виде нормальных возмущений

$$(u_z, \xi, \phi)(x, y, z, t) = (\hat{w}, \hat{\xi}, \hat{\phi})(z) \exp\{i(\alpha x + \beta y - \gamma t)\},$$

приводит к системе уравнений Орра-Зоммерфельда-Сквайра, обобщенной на случай неоднородной электропроводности жидкости. Здесь α и β – волновые числа, $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$ – собственное значение. В силу справедливости теоремы Сквайра для МГД-течений, в которых магнитное поле направлено перпендикулярно стенкам канала, рассматривались возмущения с $\beta = 0$ и решалось только уравнение Орра-Зоммерфельда

$$(U - c)(\hat{w}'' - \alpha^2 \hat{w}) - U'' \hat{w} = \frac{1}{i\alpha \text{Re}} (\hat{w}^{IV} - 2\alpha^2 \hat{w}'' + \alpha^4 \hat{w}) - \frac{\text{Ha}^2}{i\alpha \text{Re}} (\kappa \hat{w}' + \sigma \hat{w}'') \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\hat{w}(-1) = \hat{w}(1) = 0, \quad \hat{w}'(-1) = \hat{w}'(1) = 0.$$

В уравнении (2) введено $c = \gamma/\alpha$. Спектрально-амплитудная задача решалась численно с помощью спектрального метода, реализованного с использованием открытого программного пакета Dedalus. При расчетах использовалось разложение искомых функций по полиномам Чебышева.

Решения уравнения Орра-Зоммерфельда позволяют выявить два типа неустойчивости, реализующихся в рассматриваемой задаче. Первый тип – это неустойчивость гартмановского погранслоя (далее в тексте обозначена как НПП или HLI (Hartmann Layer Instability)). При однородной электропроводности ($\kappa = 0$) порог неустойчивости гартмановского погранслоя соответствует известному для классического течения Гартмана значению $\text{Re}_{\text{cr}} = 47345 \text{Ha}$ при $\alpha_{\text{cr}} = 0.1615 \text{Ha} \approx 1/(6\delta_{\text{Ha}})$. При $\kappa > 0$ собственные моды НПП становятся асимметричными из-за искажения профиля скорости. Критическое значение числа Рейнольдса снижается по сравнению с результатами для однородной проводимости жидкости, что обусловлено локальным увеличением скорости вблизи нижней стенки $z = -1$.

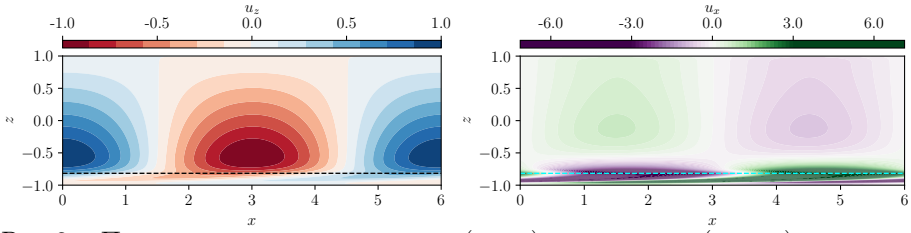


Рис. 3 — Поля возмущений вертикальной (слева) и продольной (справа) скоростей при $Na = 50$, $\varkappa = 0.7$, $Re = 25000$, $\alpha = \pi/3$. Штриховая линия соответствует положению точки перегиба

Второй тип неустойчивости обусловлен наличием точки перегиба в профиле скорости. Обнаруженная неустойчивость характеризуется малыми значениями волнового числа, а сама неустойчивая мода возмущений вертикальной скорости сосредоточена на удалении от стенки. Моды этой длинноволновой неустойчивости имеют вид поперечных валов, которые расположены в ядре течения (см. рисунок 3). Возмущения продольной скорости при этом оказываются локализованными вблизи точки перегиба. По этой причине длинноволновая неустойчивость далее называется неустойчивостью точки перегиба (НТП или IPI (Inflection Point Instability)).

Разделение в пространстве волновых чисел позволило рассчитать пороги линейной устойчивости Re_{cr} для неустойчивостей типов НГП и НТП по отдельности. Результаты представлены на рисунке 4. При $\varkappa = 0$ электропроводность жидкости однородна, профиль скорости совпадает с профилем классического течения Гартмана и не имеет точек перегиба. При низких и умеренных значениях $\varkappa \lesssim 0.5$ критические числа Рейнольдса для неустойчивости гартмановского погранслоя оказываются значительно ниже, чем для неустойчивости точки перегиба. При этом Re_{cr}^{HLI} уменьшается с увеличением $\varkappa$. Как показано на рис. 4, при каждом рассмотренном в работе значении Na может существовать пороговое значение $\varkappa_{lim}^{IPI}$, ниже которого НТП не возникает даже при очень больших значениях Re . При $\varkappa > \varkappa_{lim}^{IPI}$ критическое число Рейнольдса для НТП Re_{cr}^{IPI} быстро снижается и при некотором значении $\varkappa_e$ сравнивается с критическим числом Рейнольдса для неустойчивости погранслоя Re_{cr}^{HLI} . При $\varkappa = \varkappa_e$ нейтральные кривые НГП и НТП в плоскости параметров $\varkappa$ - Re_{cr} пересекаются. Скорость убывания Re_{cr}^{IPI} при $\varkappa > \varkappa_e$ оказывается значительно большей, чем скорость убывания Re_{cr}^{HLI} . Это приводит к тому, что при больших $\varkappa$ критическое значение для НТП оказывается на порядок ниже, чем для погранслойной неустойчивости. Так, при $Na = 50$ и $\varkappa = 0.7$ неустойчивость точки перегиба возникает при $Re = 17665$ ($Re/Na = 353.3$), тогда как НГП появляется при $Re \approx 420000$ ($Re/Na = 8400$). Представленные на рисунке 4 результаты позволяют также оценить зависимость Re_{cr} и α_{cr} от числа Гартмана. Линейная зависимость критических параметров от Na для гартмановского погранслоя $Re_{cr} \sim Na$, $\alpha_{cr} \sim Na$, известная для НГП при $\varkappa = 0$, сохраняется также и при умеренных $\varkappa > 0$. При этом для неустойчивости

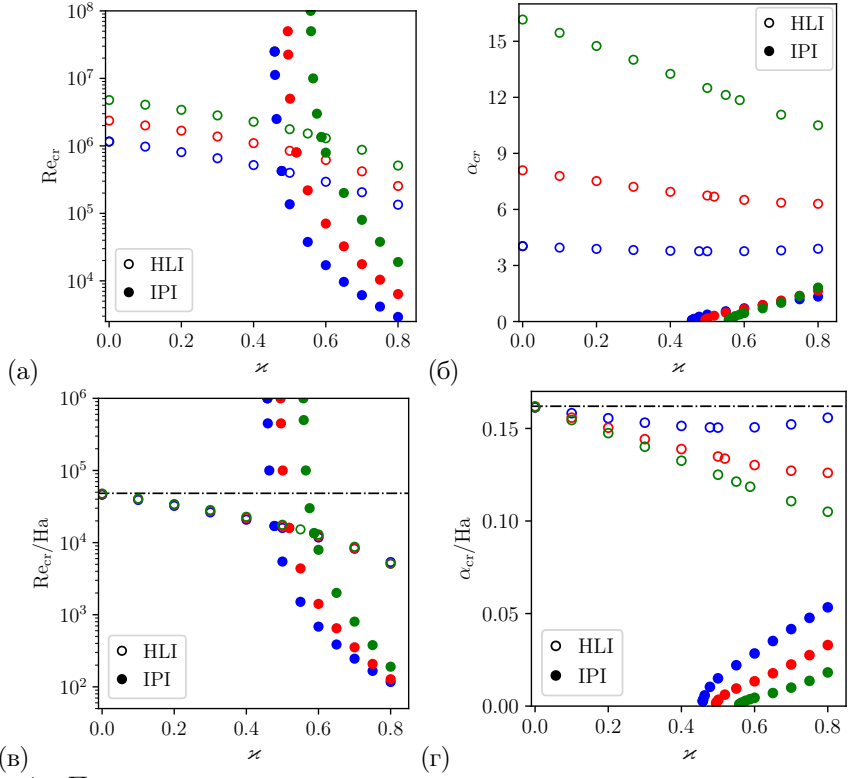


Рис. 4 — Пороговые значения параметров линейной устойчивости в зависимости от x при $Ha = 25$ (синий), $Ha = 50$ (красный) и $Ha = 100$ (зелёный). Здесь (а) критическое число Рейнольдса Re_{cr} , (б) критическое волновое число α_{cr} , (в, г) нормированные значения Re_{cr} и α_{cr} соответственно. Чёрная штрих-пунктирная линия на (в, г) соответствует порогу линейной неустойчивости классического течения Гартмана

точки перегиба критическое волновое число α_{cr} практически не зависит от Ha , а зависимость Re_{cr}^{IPI} от числа Гартмана не является универсальной.

Сценарий развития неустойчивости точки перегиба с последующим переходом течения в турбулентность проиллюстрирован в рамках прямого численного моделирования и описан в **разделе 2.4**. Результаты моделирования хорошо согласуются с результатами линейного анализа устойчивости.

Результаты второй главы опубликованы в работах [3, 6].

Третья глава посвящена исследованию влияния диффузии на возникновение погрешности определения скорости методом лагранжевых меток. Моделирование процедуры определения скорости методом лагранжевых меток выполнялось на примере задачи одномерного переноса скалярной величины θ потоком жидкости вдоль оси Ox . Скорость потока V принималась постоянной и однородной. В начальный момент времени $t = 0$ распределение скаляра θ_0

полагалось однородным всюду, за исключением некоторой локализованной области вблизи точки x_0 . В такой постановке задача сводится к исследованию эволюции начального возмущения скаляра, которое переносится однородным течением со скоростью V , а также расплывается и затухает вследствие диффузии. Для определения скорости в каждый момент времени t вычислялось значение скаляра в двух пространственных точках x_1 и x_2 . По полученным временным сигналам $\theta_1(t) = \theta(x_1, t)$ и $\theta_2(t) = \theta(x_2, t)$ оценивалась скорость течения

$$V^* = \frac{x_2 - x_1}{\operatorname{argmax}[\theta_2(t)] - \operatorname{argmax}[\theta_1(t)]}. \quad (3)$$

Схема постановки задачи приведена на рисунке 5.

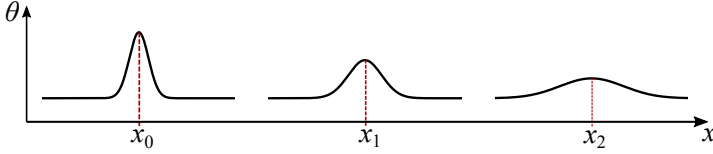


Рис. 5 — Схема переноса лагранжевых меток: начальное возмущение генерируется в точке x_0 , а затем переносится потоком и регистрируется в точках x_1 и x_2

В безразмерном виде задача сводится к уравнению переноса

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} = \operatorname{Pe}^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где $\operatorname{Pe} = Vd/\beta$ — аналог числа Пекле, где $d = x_2 - x_1$ — расстояние между точками регистрации сигнала, β — коэффициент диффузии скаляра. Аналитическое решение уравнения (4) записывается с помощью интеграла Пуассона

$$\theta(x, t) = \frac{\sqrt{\operatorname{Pe}}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(x') \exp \left[-\operatorname{Pe} \frac{(x - x' - t)^2}{4t} \right] dx'. \quad (5)$$

Для получения модельных сигналов интеграл (5) вычислялся численно с использованием быстрого преобразования Фурье и теоремы о свертке.

В качестве начальной формы возмущений рассматривались несколько функций, а именно одиночный импульс, функция Гаусса, ее первая и вторая производные. Вычисления скорости по соотношению (3) показали, что до некоторого значения числа Пекле восстанавливаемое значение скорости переноса систематически оказывается выше реальной скорости потока. При этом, начиная со значений числа Пекле порядка $5 \cdot 10^{-3}$, для всех рассмотренных типов начальных возмущений скорость течения восстанавливается с точностью до значения, соответствующего частоте дискретизации сигналов. Зависимость восстановленной скорости от числа Пекле представлена на рисунке 6.

Причина появления систематической погрешности связана с влиянием диффузии в процессе переноса возмущения. По мере прохождения метки мимо «датчика» возмущение размывается и форма получаемого сигнала становится асимметричной, а его максимум смещается. При малых числах Пекле это смещение существенно, что в результате приводит к систематическому завышению скорости.

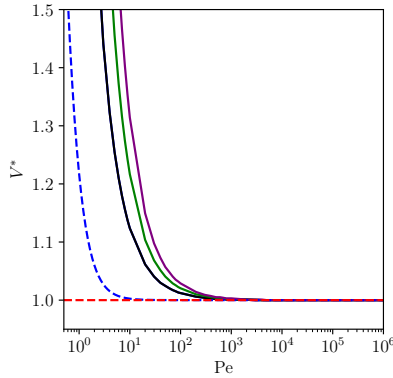


Рис. 6 — Отношение вычисленной скорости к истинной в зависимости от числа Пекле для различных распределений (синий — одиночный импульс, черный — функция Гаусса, зеленый — первая производная функции Гаусса, фиолетовый — вторая производная функции Гаусса). Синей штриховой линией показано аналитическое решение для начального возмущения в виде дельта-функции

Для высокочастотных локализованных волновых пакетов показано, что диффузионный эффект не проявляется из-за быстрого затухания высокочастотных гармоник.

Проведены оценки влияния турбулентной вязкости при измерении скорости течения жидкого металла вихрепролетным методом. Показано, что турбулентная вязкость значительно снижает значения эффективного числа Пекле, что может приводить к появлению систематической ошибки при определении скорости вихрепролетным методом.

Результаты третьей главы опубликованы в статье [4].

Четвертая глава посвящена исследованию возможности воспроизведения заполненного спектра солнечной активности в рамках моделей паркеровского типа.

В разделе 4.1 приводится вывод уравнений Паркера

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha(B)B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = D \sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}. \quad (7)$$

Единственным параметром является динамо-число D , определяющее совместную интенсивность двух источников генерации магнитного поля — спиральности и дифференциального вращения. Рассмотрены две схемы подавления спиральности — алгебраическая

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + B^2}, \quad (8)$$

далее обозначенная как модель РА, и допускающая смену знака спиральности при умеренных значениях магнитного поля

$$\alpha = \alpha_0(1 - B^2), \quad (9)$$

далее обозначенная как РВ. Уравнения Паркера решались методом конечных разностей. Интегрирование по времени выполнялось по схеме Рунге-Кутты 4-го порядка.

Так как солнечная активность проявляет себя как хаотические вариации на фоне основного цикла, представляется, что хотя бы на качественном уровне некоторые аспекты этого явления могут быть описаны в рамках маломодовой динамической системы. Маломодовая система выводится из модели РВ разложением полей A и B в ряд Фурье с учетом соответствующей симметрии относительно экватора и оставлением в разложении двух старших мод каждого из полей. Итоговые уравнения 4-модовой системы (в дальнейшем обозначенную как PL4) имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= -a_1 + \frac{1}{2}b_1 - \frac{3}{8}b_1(b_1^2 + 2b_2^2), \\ \dot{a}_2 &= -9a_2 + \frac{1}{2}(b_1 + b_2) - \frac{3}{8}(b_1 + b_2)(b_1^2 + b_1b_2 + b_2^2), \\ \dot{b}_1 &= \frac{D}{2}(a_1 - 3a_2) - 4b_1, \\ \dot{b}_2 &= \frac{3D}{2}a_2 - 16b_2.\end{aligned}\tag{10}$$

Система уравнений маломодовой модели интегрировалась численно неявным методом Рунге-Кутты 5-го порядка, реализованном в библиотеке SciPy для языка программирования Python.

В разделе 4.2 проведено исследование колебательных режимов маломодовой модели в зависимости от динамо-числа. Показано, что маломодовая модель допускает большое разнообразие режимов, таких как стационарные и затухающие решения, квазигармонические колебания, васцилляции (колебания с ненулевым средним) и сильно негармонические колебания, напоминающие известные в астрофизике динамо-всплески. В достаточно широком диапазоне положительных значений динамо-числа $481 \lesssim D \lesssim 618$ в системе реализуется динамический хаос. Переход к хаосу с увеличением динамо-числа происходит по сценарию последовательности бифуркаций удвоения периода.

Решения маломодовой системы в различных частях зоны динамического хаоса различаются как по виду колебаний, так и по спектральному составу. Характерные спектры вблизи левой границы области динамического хаоса имеют сильно выделенный пик, который связан с наличием выделенной частоты колебаний, форма которых близка к гармоническим. Сплошная составляющая спектра при этом возникает за счет нерегулярной вариации амплитуды колебаний. В середине диапазона существования хаотических решений пик в спектре, соответствующий основной частоте колебаний, остается, однако становится существенно менее выделенным. Форма колебаний несколько искажается по сравнению с той, которая имеет место при значениях D вблизи границы появления динамического хаоса. При дальнейшем увеличении управляющего параметра характер колебаний усложняется. Это приводит к тому, что ближе к правой границе рассматриваемого диапазона динамо-числа выделенная частота расплывается, а спектр колебаний уплощается.

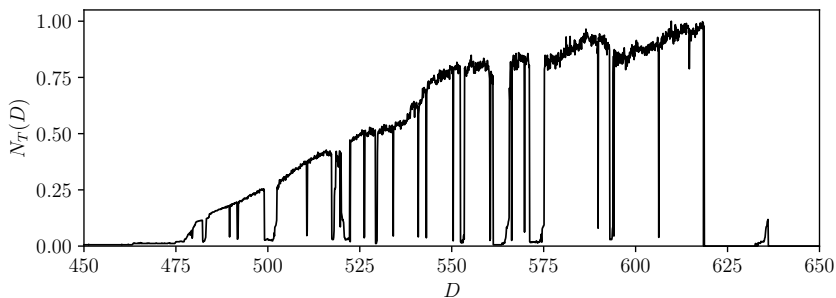


Рис. 7 — Зависимость меры заполнения гистограммы времен возвращения N_T от параметра динамо-числа для маломодовой модели Паркера

Наблюдаемая зависимость спектра колебаний от динамо-числа побудила поставить задачу о возможности количественной оценки «степени хаотичности» того или иного решения. Для анализа хаотичности режимов поведения маломодовой модели Паркера в исследуемой области значений динамо-числа предложен метод, основанный на анализе статистики времен возвращения. Суть метода заключается в определении в исследуемом сигнале локальных максимумов и соответствующих им моментов времени t_i , на основе которых определяется полный набор времен возвращения $T_i = t_i - t_{i-1}$. Статистические свойства набора времен возвращения оценивались на основе метода гистограмм. Количественной величиной, по значениям которой можно судить о режиме поведения решений динамической системы, является количество заполненных ячеек в гистограмме времен возвращения. Применение метода оценки степени заполненности гистограммы времен возвращения для четырехмодовой модели Паркера позволило получить карту области динамического хаоса, которая представлена на рисунке 7. Примечательным отличием от системы Лоренца оказывается то, что степень хаотичности почти монотонно нарастает по мере увеличения управляющего параметра. Окна периодичности разбросаны в исследуемой области значений динамо-числа почти равномерно.

В разделе 4.3 исследуется вопрос о воспроизведении заполненной компоненты спектра с помощью различных модификаций модели Паркера. На рисунке 8 приведена карта значений динамо-числа, при которых решения выглядят как периодические или хаотические колебания, сохраняющие дипольную симметрию полей A и B . Как видно из представленной карты режимов, диапазон значений динамо-числа, в которых наблюдаются периодические и хаотические режимы с дипольной симметрией, существенно зависит от механизма нелинейности. Так, модель PA демонстрирует колебания, качественно напоминающие основной цикл солнечной активности в большом диапазоне отрицательных значений динамо-числа вплоть до $D \approx -10^4$. Это объясняется эффективным подавлением спиральности с ростом магнитного поля, так, что даже при достаточно больших B решения системы остаются устойчивыми. Модели PB и PL4 демонстрируют ограниченные решения в значительно более узком диапазоне динамо-числа.

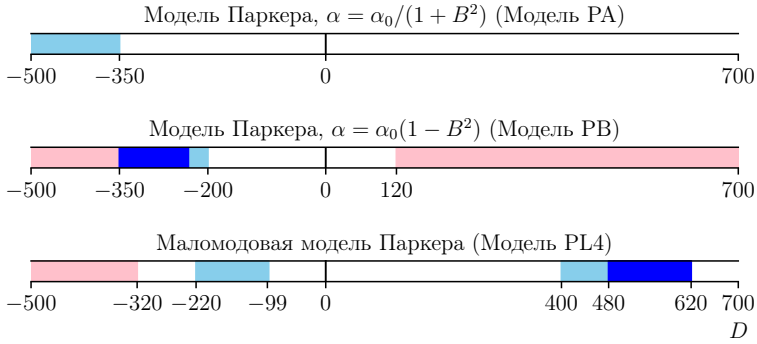


Рис. 8 — Карта режимов квазигармонических (голубой) и хаотических (синий) колебаний в зависимости от динамо-числа для различных модификаций модели Паркера. Белым цветом отмечены области прочих типов решений (затухающие, стационарные, колебательные без сохранения дипольной симметрии). Красным цветом отмечены диапазоны значений динамо-числа, в которых решения экспоненциально растут

Поскольку в рамках модели РА не возникают хаотические решения, для воспроизведения непрерывной компоненты спектра необходимо привлечение дополнительных механизмов. В качестве такого механизма используется стохастическое возмущение динамо-числа в виде

$$D(t) = \bar{D}[1 + y(t, \tau)], \quad (11)$$

где $\bar{D}$ — среднее значение динамо-числа (или значение динамо-числа в отсутствие стохастических возмущений), а величина $y \sim \mathcal{U}[-\delta, \delta]$ есть равномерно распределенная случайная величина с амплитудой δ . Принимается, что величина y остается постоянной в течение некоторого времени релаксации τ , которое также является случайной величиной $\tau \sim \mathcal{U}[0, 2T]$, где T — период основного цикла в отсутствие вариаций. Моделирование с учетом стохастической модуляции управляющего параметра показало, что для модели РА такая схема не способна воспроизводить хаотическую динамику даже при существенных амплитудах возмущений из-за слабой зависимости амплитуды и периода колебаний модели РА от динамо-числа.

Модель РВ в области значений динамо-числа $-350 < D < -230$ демонстрирует хаотическое поведение. Получаемый спектр колебаний при таких D оказывается заполненным. Как показано на рисунке 9, спектр колебаний тороидального магнитного поля содержит хорошо выделенный пик, соответствующий основному циклу, а также заполненную компоненту вокруг него. С увеличением D сплошная компонента спектра усиливается, а кратные основному пику частоты пропадают.

В области отрицательных значений динамо-числа периодические решения в рамках маломодовой модели PL4 возникают в диапазоне $-220 < D < -99$. Внесение стохастических вариаций динамо-числа по схеме (11) позволяет воспроизвести динамику системы, которая, как показано на рисунке 10, характеризуется сплошным спектром. Интересной особенностью получаемого при

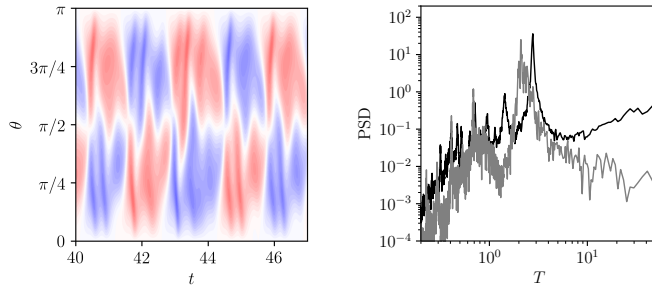


Рис. 9 — Решение уравнений Паркера с механизмом подавления спиральности $\alpha = \alpha_0 (1 - B^2)$: широтно-временная диаграмма при $D = -300$ (слева) и спектральная плотность энергии колебаний тороидального поля при $\theta = \pi/4$ для двух значений динамо-числа $D = -240$ (серый) и $D = -300$ (черный) (справа)

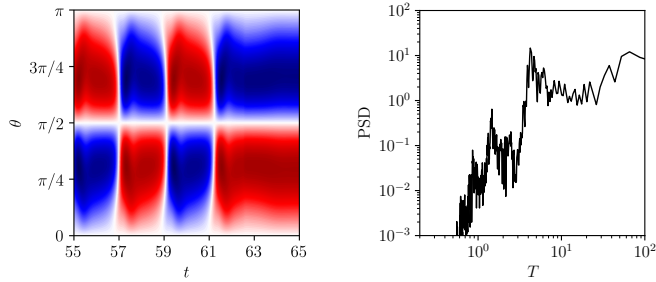


Рис. 10 — Решение маломодовой модели Паркера при $D = -220$ с учетом стохастического возмущения динамо-числа ($\delta = 0.1$): широтно-временная диаграмма (слева) и спектральная плотность энергии колебаний тороидального поля при $\theta = \pi/4$ (справа)

этом решения является слабая выраженность пика, соответствующего основному периоду колебаний. Причиной этого является сильное возмущение периода цикла колебаний. Значение $D = -220$ находится на границе, разделяющей периодические и стационарные режимы. При некоторых вариациях параметра это приводит к тому, что система попадает в стационарное состояние.

Маломодовая модель также имеет достаточно широкую область $481 \lesssim D \lesssim 618$, в которой возникает динамический хаос. Естественно, что при этом возникает сплошной спектр, который характеризуется разной степенью выраженности основного пика, кратных гармоник и непрерывной компоненты в зависимости от динамо-числа. Поскольку степень хаотичности поведения системы нарастает почти монотонно с увеличением D , можно ожидать существование некоторых промежуточных режимов с умеренно выделенным основным циклом и развитой непрерывной компонентой. Один из таких режимов при $D = 515.5$ представлен на рисунке 11. Помимо выраженного основного пика, соответствующего основному циклу, спектр колебаний содержит также выделенный

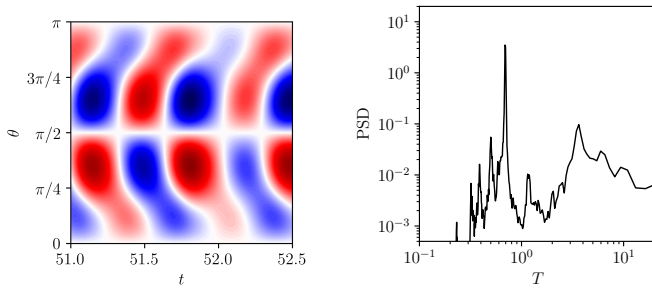


Рис. 11 — Решение маломодовой модели Паркера при $D = 515.5$: широтно-временная диаграмма (слева) и спектральная плотность энергии колебаний тороидального поля при $\theta = \pi/4$ (справа)

вторичный пик в области низких частот (больших периодов), связанный с длинновременной модуляцией колебаний.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [1, 2, 5].

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. В задаче Гартмана для жидкости с линейным поперек канала распределением электропроводности получены асимметричные стационарные профили скорости, характеризующиеся наличием точек перегиба. В рамках линейного анализа исследована устойчивость полученных профилей в зависимости от величины градиента электропроводности $\varkappa$. Обнаружены два типа линейной неустойчивости. Первый тип связан с неустойчивостью гартмановского погранслоя (НГП). Второй тип неустойчивости (НТП) связан с наличием точки перегиба вблизи максимума в профиле скорости. Показано, что критическое число Рейнольдса для НГП снижается с увеличением $\varkappa$. Неустойчивость точки перегиба возникает при некотором значении $\varkappa$, которое существенно больше порога появления точек перегиба в профиле скорости. Критическое число Рейнольдса для НТП быстро уменьшается с увеличением $\varkappa$ и оказывается на порядок ниже по сравнению с критическим числом Рейнольдса для НГП при больших $\varkappa$.
2. Проведено моделирование процесса измерения скорости течения методом лагранжевых меток на примере одномерного уравнения переноса скалярной величины с учетом диффузии. Показано, что в жидких металлах, которые характеризуются высокими значениями теплопроводности, диффузионный эффект может приводить к систематическому завышению оценки скорости. Выявлено, что при значениях числа Пекле $Pe \sim 10^3$ диффузионные эффекты не вносят погрешность в измерения. Показано отсутствие диффузионного эффекта для высокочастотных сигналов в силу быстрого затухания возмущений. Приведены оценки чисел Пекле с учетом турбулентных коэффициентов переноса.

3. На основе коэффициента заполнения гистограммы времен возвращения предложена простая мера оценки степени хаотичности решений динамической системы. Показано, что введенная мера позволяет разделять периодические и хаотические режимы, а также уровень хаотичности каждого режима. На основе введенной меры исследована область динамического хаоса маломодовой модели Паркера. Выявлено существование окон периодичности, а также увеличение степени хаотичности колебаний с ростом динамо-числа.
4. На примере простых моделей $\alpha\omega$ -динамо Паркера исследована возможность воспроизведения наблюдаемого спектра солнечной активности. Показано, что модель Паркера со знакопеременным механизмом подавления спиральности и ее маломодовый аналог способны при некоторых значениях динамо-числа воспроизводить спектр колебаний магнитного поля, качественно схожий с наблюдаемым спектром.

Литература

1. Frick, P., **Okatev, R.**, Sokoloff, D. Spectral Properties of Low-order Dynamo Systems // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2022. — Vol. 18, № 2. — P. 289–296. (**Scopus**)
2. **Okatev, R.**, Frick, P., Sokoloff, D. Can the observable solar activity spectrum be reproduced by a simple dynamo model? // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. — 2023. — Vol. 117, № 6. — P. 437–454. (**WoS, Scopus**)
3. **Окатьев, Р. С.**, Фрик, П. Г., Колесниченко, И. В. Течение Гартмана в слое жидкости с пространственно неоднородными свойствами // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». — 2023. — Т. 15, № 3. — С. 34–42. (**БАК**)
4. **Окатьев, Р. С.**, Фрик, П. Г., Колесниченко, И. В., Гольбрайх, Е. О влиянии диффузии на точность измерения расхода жидкости методом лагранжевых меток // Вестник Пермского университета. Физика. — 2023. — № 4. — С. 28–34. (**БАК**)
5. **Окатьев, Р. С.**, Фрик, П. Г. Статистика времен возвращения при анализе хаоса в динамических системах // Вестник Пермского университета. Физика. — 2024. — № 3. — С. 19–27. (**БАК**)
6. **Okatev, R.**, Zikanov, O., Krasnov, D., Frick, P. Inflection point instability in Hartmann channel flow with variable electric conductivity // Physics of Fluids. — 2026. — Vol. 38, № 4. — Art. no. 044104. (**WoS, Scopus**)

Окатьев Роман Сергеевич

Генерация, перенос и диффузия неоднородностей
в магнитогидродинамических течениях

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ____ .09.2026. Формат 60×90/16.
Отпечатано с готового оригинал-макета. Тираж 100 штук.