

На правах рукописи



Мугатаров Артур Ильдарович

**НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ:
МОДЕЛИРОВАНИЕ С УЧЕТОМ СТАДИЙ РАЗУПРОЧНЕНИЯ
И СВОЙСТВ НАГРУЖАЮЩИХ СИСТЕМ**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Пермь – 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Научный руководитель: **Вильдеман Валерий Эрвинович,**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Панин Сергей Викторович,**
доктор технических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией механики полимерных композиционных материалов Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт физики прочности и материаловедения им. В.Е. Панина Сибирского отделения Российской академии наук», г. Томск

Федулов Борис Никитович,
доктор физико-математических наук, профессор РАН, профессор кафедры теории пластичности механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет», г. Самара

Защита состоится «23» декабря 2026 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 004.036.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук» (филиал – Институт механики сплошных сред УрО РАН) по адресу: 614018, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1; тел.: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87; сайт: www.icmm.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «__» ноября 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, доцент

 / А.Л. Зуев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Решение проблемы обеспечения прочности, надежности и безопасности ответственных конструкций требует развития методов прочностного анализа, базирующихся на описании процессов неупругого деформирования и разрушения. Данные процессы являются сложными, многостадийными, стохастическими, зависящими от условий нагружения, происходящими на различных масштабных уровнях, а также могут быть равновесными либо неустойчивыми.

Одним из проявлений нелинейного поведения твердых тел является закритическое деформирование, заключающееся в реализации ниспадающих участков графиков зависимостей силовых факторов от кинематических. Данное явление объясняется, в частности, разрушением элементов структуры, образованием областей материала с ослабленными связями, зарождением и развитием трещин.

Реализация стадии закритического деформирования экспериментально подтверждена для тел из различных материалов: металлов и сплавов, горных пород, строительных материалов, полимерных композитов. В экспериментальных и теоретических работах Б.А. Вандышева, В.Э. Вильдемана, С.Д. Волкова, Б.А. Дроздовского, А.А. Лебедева, Е.И. Рыжака, Ф.С. Савицкого, Я.Б. Фридмана, Н.Г. Чаусова, Z.P. Bazant, D.P. Miannay и др. отмечено, что на устойчивость процессов закритического деформирования влияет жесткость нагружающей системы – системы тел, передающей внешнее воздействие объекту.

Описание процессов закритического деформирования твердых тел проводится с использованием различных математических моделей. К первой группе относятся структурно-феноменологические модели механики неупругого деформирования и разрушения (Е.А. Андреева, В.Э. Вильдеман, А.В. Зайцев, А.В. Ильиных, Е.В. Небогина, В.П. Радченко, С.Б. Сапожников, Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов и др.). Выявлено, что даже при использовании упруго-хрупких моделей поведения материала структурных элементов для конструкции может быть получена закритическая стадия деформирования. Однако влияние нагружающих систем на устойчивость процессов деформирования практически не рассматривалось.

Вторую группу составляют модели деформационного разупрочнения, в которых в физических соотношениях учитывается закритическое деформирование (разупрочнение) материала – процесс снижения напряжений при растущих деформациях. Появление в твердых телах зон с ослабленными связями отождествляется с образованием областей материала, находящегося на стадии разупрочнения. Модели деформационного разупрочнения разрабатывались и использовались в работах В.Э. Вильдемана, С.Д. Волкова, В.А. Ибрагимова, В.Д. Ключникова, В.И. Миронова, Л.В. Никитина, В.П. Радченко, Е.И. Рыжака, В.В. Стружанова, Z.P. Bazant и др. Получен ряд аналитических и численных решений краевых задач, на примере которых продемонстрирована целесообразность учета разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем в расчетах конструкций.

К третьей группе относятся модели механики трещин, в которых реализация закритической стадии деформирования объясняется равновесным ростом трещины, вызывающим уменьшение поперечного сечения тела. Известно значительное число моделей механики тел с трещинами (В.И. Астафьев, Г.И. Баренблатт, С.Д. Волков, Р.В. Гольдштейн, М.Я. Леонов, В.П. Матвеев, Ю.Г. Матвиенко, Е.М. Морозов, Н.Ф. Морозов, В.В. Панасюк, Ю.В. Петров, Л.В. Степанова, В.Н. Шлянников, Z.P. Bazant, R. de Borst, A. Carpinteri, R. Dugdale, A. Needleman, V. Tvergaard и др.), однако внимание процессам закритического деформирования твердых тел с трещинами уделялось редко.

Несмотря на значительное развитие математических моделей описания процессов неупругого деформирования и разрушения твердых тел, число решений краевых задач, в которых исследуются процессы закритического деформирования, мало. Поскольку учет данной стадии может позволить повысить надежность и безопасность ответственных конструкций, сделан вывод об актуальности изучения процессов закритического деформирования твердых тел на основе получения новых решений краевых задач в рамках структурных моделей неупругого деформирования и разрушения, моделей деформационного разупрочнения, а также нелинейных моделей механики тел с трещинами.

Целью диссертационной работы является получение новых данных о закономерностях неупругого деформирования и разрушения твердых тел на основе аналитических и численных решений краевых задач с использованием моделей неоднородных сред, структурного разрушения, деформационного разупрочнения и нелинейной механики трещин.

Основные задачи исследования.

1. Анализ макрофеноменологических и структурно-феноменологических моделей неупругого деформирования и разрушения, способов учета свойств нагружающих систем в граничных условиях.
2. Получение численных решений краевых задач для описания процессов деформирования и разрушения неоднородных тел со случайно распределенными прочностными характеристиками структурных элементов.
3. Получение аналитических решений краевых задач с учетом разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем.
4. Численный анализ и получение новых данных о закономерностях процессов деформирования тел с концентраторами напряжений при учете стадии разупрочнения материала.
5. Проведение численного моделирования процессов равновесного роста трещин в твердых телах с использованием модели когезионной зоны для описания процессов закритического деформирования тел с трещинами.

Научная новизна работы.

1. Получены новые результаты численного моделирования процессов разрушения неоднородных тел при одноосных и двухосных кинематических нагружениях с учетом статистического распределения прочностных характеристик упруго-хрупких структурных элементов и деформационной анизотропии, возникающей вследствие частичной потери их несущей способности, а также жесткостных свойств нагружающих систем.

2. Получено новое аналитическое решение задачи о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайно распределенными по равномерному закону прочностными характеристиками при использовании двухзвенной кусочно-линейной аппроксимации диаграммы деформирования материала с учетом жесткости нагружающей системы.
3. Получены новые аналитические решения задач о кручении сплошных и полых цилиндрических тел при использовании двух-, трех- и многозвенных кусочно-линейных аппроксимаций диаграмм деформирования материала с учетом жесткости нагружающей системы.
4. Получены новые результаты численного моделирования процессов неупругого деформирования пластин с эллиптическими вырезами, включающие описание эволюции областей разупрочнения материала и качественно соответствующие данным натурных экспериментов.
5. Получены новые результаты численного моделирования процессов равновесного роста трещин с использованием модели когезионной зоны при различных значениях параметров разупрочнения материала и характеристик жесткости нагружающей системы.

Теоретическая значимость исследования состоит в получении новых решений физически нелинейных краевых задач и новых данных о закономерностях процессов неупругого деформирования и разрушения твердых тел на основе моделирования стадий закритического деформирования с учетом свойств нагружающих систем.

Практическая значимость исследования заключается в развитии методологии проведения уточненного прочностного анализа ответственных конструкций для повышения их безопасности на основе учета реализации стадии разупрочнения материала и свойств нагружающих систем.

Методология и методы диссертационного исследования.

Изучение процессов закритического деформирования неоднородных конструкций со случайно распределенными прочностными характеристиками упруго-хрупких структурных элементов проведено на основе использования структурно-феноменологической модели неупругого деформирования и разрушения неоднородных сред, предложенной Ю.В. Соколкиным и А.А. Ташкиновым, с применением метода конечных элементов и программного комплекса ANSYS Mechanical. Аналитические решения краевых задач с учетом разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем получены в рамках основных положений теории закритического деформирования, разработанной В.Э. Вильдеманом. Численные решения краевых задач с учетом разупрочнения материала получены в рамках теории течения с применением метода конечных элементов и программного комплекса SIMULIA Abaqus. Численное моделирование процессов равновесного роста трещин проведено с использованием модели когезионной зоны с применением метода конечных элементов и программного комплекса SIMULIA Abaqus.

Достоверность результатов подтверждается использованием известных математических постановок краевых задач механики неупругого деформирования и разрушения, применением для численного решения краевых задач научно

обоснованного метода конечных элементов, корректным использованием лицензионных программных комплексов ANSYS Mechanical и SIMULIA Abaqus, совпадением аналитических выражений для частных случаев полученных решений с опубликованными решениями других авторов, качественным соответствием полученных результатов имеющимся данным натурных экспериментов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Результаты численного моделирования процессов деформирования неоднородных пластин со случайно распределенными прочностными характеристиками упруго-хрупких структурных элементов подтверждают реализуемость закритической стадии деформирования тел на макроуровне вследствие структурного разрушения.
2. Полученные решения задач о кручении сплошных и полых цилиндров, а также деформировании пластин с эллиптическими вырезами свидетельствуют об осуществимости равновесного развития зон разупрочнения в твердых телах в условиях неоднородного напряженно-деформированного состояния.
3. Учет закритической стадии деформирования материала в локальных зонах позволяет выявить для деформируемых тел существенные прочностные (например, до 30% в задаче о кручении сплошного цилиндрического тела) и деформационные (например, до 70% в задаче о растяжении пластины с концентратором напряжений) резервы.
4. Совокупность полученных аналитических и численных решений краевых задач подтверждает, что характеристика жесткости нагружающей системы является одним из факторов, определяющих степень реализации процессов закритического деформирования твердых тел.
5. Нелинейная модель механики трещин, учитывающая реализацию зоны разупрочнения, применима для описания процессов равновесного роста трещин и определения условий перехода к динамическому разрушению

Реализация работы. Результаты диссертационной работы были получены при выполнении научно-исследовательских работ в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ FSNM-2020-0027, № FSNM-2024-0013), грантов Российского научного фонда (№ 16-19-00069-П, № 22-19-00765, № 22-19-00765-П).

Апробация работы. Результаты исследований, представленные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на 13 всероссийских и 5 международных научных конференциях: Всероссийская школа-конференция «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2018, 2022, 2025), Всероссийская научно-техническая конференция «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации» (г. Пермь, 2022, 2023, 2024, 2025), XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред (г. Пермь, 2023), Всероссийская конференция «Механика в новых материалах, конструкциях, технологиях» (г. Пермь, 2026), XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (г. Санкт-Петербург, 2023), Всероссийская конференция молодых учёных-механиков (г. Сочи, 2024), Всероссийская научная конференция «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2025» (г. Казань, 2025), 53-я Школа-конференция «Актуальные проблемы механики» (г. Санкт-Петербург,

2026), XVII Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (г. Екатеринбург, 2023), Международная научно-практическая конференция «Современные авиационные технологии» (г. Иркутск, 2023, 2025), XX Международная научно-практическая конференция «Новые полимерные композиционные материалы» (с. Эльбрус, 2024), 37-я Международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения (г. Москва, 2025).

В полном объеме диссертация обсуждалась на объединенном семинаре кафедры «Экспериментальная механика и конструкционное материаловедение» и Центра экспериментальной механики ПНИПУ (руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. В.Э. Вильдеман), семинаре кафедры «Математическое моделирование систем и процессов» ПНИПУ (руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. П.В. Трусов), семинаре Института механики сплошных сред УрО РАН (руководитель – д-р техн. наук, академик РАН В.П. Матвеев).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 31 работе, из них 13 опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК, и входящих в международные базы цитирования WoS/Scopus.

Личный вклад автора. Выбор направления исследований, постановка задач и составление плана работ осуществлены совместно с научным руководителем. Личное участие автора заключалось в анализе структурно-феноменологических моделей неупругого деформирования и разрушения, моделей деформационного разупрочнения и моделей механики тел с трещинами, получении численных решений краевых задач для описания процессов деформирования и разрушения неоднородных тел со случайно распределенными прочностными характеристиками структурных элементов, получении аналитических решений задач о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками и о кручении цилиндрических тел при учете разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем, численном анализе и получении новых данных о закономерностях процессов деформирования тел с концентраторами напряжений при учете стадии разупрочнения материала, численном моделировании процессов равновесного роста трещин в твердых телах с использованием модели когезионной зоны для описания процессов закритического деформирования тел с трещинами.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 77 рисунков. Общий объем диссертации составляет 188 страниц, список литературы включает 200 источников.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выбранной темы исследования, изложены цель и задачи работы, полученные новые результаты, обоснована их достоверность, перечислены положения, выносимые на защиту, теоретическая и практическая значимость работы, представлены сведения об апробации работы.

Первая глава посвящена вопросам моделирования процессов неупругого деформирования и разрушения твердых тел. На основе литературного обзора изучены основные закономерности неупругого деформирования и разрушения конструкций. Проведен анализ структурных моделей неупругого деформирования и разрушения неоднородных тел, моделей деформационного разупрочнения и механики тел с трещинами, применимых для описания процессов закритического деформирования.

Во второй главе рассмотрены макрофеноменологические и структурно-феноменологические модели неупругого деформирования и разрушения.

Рассмотрена модель, позволяющая описывать процессы неупругого деформирования путем использования тензора поврежденности четвертого ранга:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}(\bar{r}) + f_i(\bar{r}) &= 0, \\ \varepsilon_{ij}(\bar{r}) &= \frac{1}{2} \left(u_{i,j}(\bar{r}) + u_{j,i}(\bar{r}) \right), \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} (I_{klmn} - \Omega_{klmn}) \varepsilon_{mn},\end{aligned}\tag{1}$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор, u_i – вектор перемещений, ε_{ij} – тензор малых деформаций Коши, σ_{ij} – тензор напряжений, f_i – массовые силы, C_{ijkl} – тензор упругих констант неповрежденного материала, I_{klmn} – единичный тензор, Ω_{klmn} – тензор поврежденности четвертого ранга.

Рассмотрена модель пластического течения изотропного тела:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}(\bar{r}) &= 0, \quad \varepsilon_{ij}(\bar{r}) = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}(\bar{r}) + u_{j,i}(\bar{r}) \right), \\ \sigma_{kk}(\bar{r}) &= 3K \varepsilon_{kk}(\bar{r}), \quad s_{ij}(\bar{r}) = 2G e_{ij}^e(\bar{r}), \\ \sigma_{\text{и}} &= \Phi(e_{\text{экв}}^p), \quad de_{ij}^p(\bar{r}) = de_{\text{и}}^p(\bar{r}) \frac{3 s_{ij}(\bar{r})}{2 \sigma_{\text{и}}(\bar{r})},\end{aligned}\tag{2}$$

где s_{ij} – девиатор напряжений; $\sigma_{\text{и}}$ – интенсивность напряжений; e_{ij} , e_{ij}^e , e_{ij}^p – девиатор деформаций, его упругая и пластическая части; de_{ij}^p , $de_{\text{и}}^p$ приращение пластических деформаций и их интенсивность; $e_{\text{экв}}^p$ – эквивалентная пластическая деформация (параметр Удквиста); зависимость $\Phi(e_{\text{экв}}^p)$ определяет напряжение течения.

Для описания процессов деформирования и разрушения неоднородных тел может быть использована двухуровневая структурно-феноменологическая модель, разработанная Ю.В. Соколкиным и А.А. Ташкиновым. Неоднородное тело представлено в виде совокупности H подобластей, материал внутри каждой из которых полагается однородным. Неоднородность распределения механических характеристик по структурным элементам представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\chi^{(z)}(\bar{r}) &= \begin{cases} 1, & \bar{r} \in V^{(z)}; \\ 0, & \bar{r} \notin V^{(z)}; \end{cases} \quad z = \overline{1, H}, \\ C_{ijkl}(\bar{r}, t) &= \sum_{z=1}^H \chi^{(z)}(\bar{r}) C_{ijkl}^{(z)}(t), \quad f_{(\beta)}(\bar{r}, t) = \sum_{z=1}^H \chi^{(z)}(\bar{r}) f_{(\beta)}^{(z)}(t), \quad z = \overline{1, H}, \quad \beta = \overline{1, s},\end{aligned}\tag{3}$$

где $\chi^{(z)}$ – индикаторные функции, характеризующие попадание точки в структурный элемент $V^{(z)}$; C_{ijkl} , $f_{(\beta)}$ – тензор упругих констант и прочностные константы, определяемые через $\chi^{(z)}$ и упругие и прочностные константы элементов структуры $C_{ijkl}^{(z)}$ и $f_{(\beta)}^{(z)}$; t – параметр процесса (условный аналог времени).

Физические соотношения на микроуровне описываются выражениями:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\bar{r}, t) &= C_{ijpq}(\bar{r}, t, \varepsilon_{pq}) \varepsilon_{pq}(\bar{r}, t), \\ C_{(\delta)}(f_{(\beta)}(\bar{r}, t), \sigma_{ij}(\bar{r}, t), \varepsilon_{pq}(\bar{r}, t)) &\geq 1, \quad \beta = \overline{1, s}, \quad \delta = \overline{1, a},\end{aligned}\quad (4)$$

где выполнение критерия разрушения $C_{(\delta)}$ в точке $\bar{r}$ в состоянии t соответствует одному из a механизмов разрушения типа δ и приводит к скачкообразному изменению соответствующих данному механизму разрушения упругих констант.

Выражения (3)–(4) дополняются уравнениями равновесия, геометрическими соотношениями и условиями связи с макронапряжениями и макродеформациями. Граничные условия для макрообъема V^* :

$$\begin{aligned}\left[\sigma_{ij}(\bar{r}, t) n_j(\bar{r})\right]_{\Gamma_s^*} &= S_i^*(\bar{r}, t) = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} \sigma_{ij}^*(\bar{r}, t) dV n_j(\bar{r}), \\ u_i(\bar{r}, t) \Big|_{\Gamma_u^*} &= u_i^*(\bar{r}, t) = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} \varepsilon_{ij}^*(\bar{r}, t) dV r_j,\end{aligned}\quad (5)$$

где n_j – вектор нормали к поверхности макрообъема V^* ; Γ_s^* , Γ_u^* – части поверхности с заданными векторами сил S_i^* и перемещений u_i^* ; σ_{ij}^* , ε_{ij}^* – макронапряжения и макродеформации. На макроуровне происходит решение краевой задачи теории упругости с использованием макроскопического тензора упругих констант.

Для описания процессов равновесного роста трещин рассмотрена модель когезионной зоны. Физические соотношения представляются в виде связи вектора усилий $\bar{T}$ с вектором смещений $\bar{\Delta}$, в частном случае возможным является независимое рассмотрение связей компонент тензоров напряжений и деформаций:

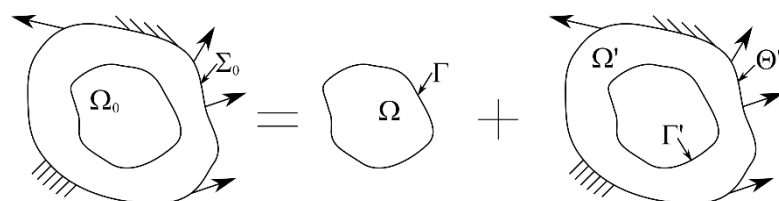
$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= E_{yy} \left(1 - \omega_{E_I}(\varepsilon_{yy})\right) \varepsilon_{yy}, \\ \tau_{xy} &= G_{xy} \left(1 - \omega_{G_{II}}(\gamma_{xy})\right) \gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} &= G_{yz} \left(1 - \omega_{G_{III}}(\gamma_{yz})\right) \gamma_{yz},\end{aligned}\quad (6)$$

где E_{yy} – модуль Юнга, G_{xy} , G_{yz} – модули сдвига материала в декартовой системе координат, связанной с ориентацией трещины; ω_{E_I} , $\omega_{G_{II}}$, $\omega_{G_{III}}$ – скалярные функции поврежденности, соответствующие трем типам трещин.

Рассмотрены нелокальные граничные условия контактного типа с учетом свойств нагружающих систем (рисунок 1):

$$\begin{aligned}\left[\sigma_{ij}(\mathbf{r}) n_j(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma'} N_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_j(\mathbf{r}') d\Gamma'\right]_{\Gamma} &= S_i^0(\mathbf{r}), \\ \left[u_i(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma'} G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') S_j(\mathbf{r}') d\Gamma'\right]_{\Gamma} &= u_i^0(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (7)$$

где u_i^0 – перемещения точек поверхности Γ' и соответствующие усилия S_i^0 , обеспечивающие ее совпадение с Γ , N_{ij} – тензор Неймана, G_{ij} – тензор Грина.



Исходное тело Исследуемая область Нагружающая система
Рисунок 1 – Схема деления тела на исследуемую область и нагружающую систему

Для определения компонент тензоров N_{ij} и G_{ij} в численных решениях предложено использовать соотношения, получаемые методом суперэлементов:

$$\begin{bmatrix} [K_{\Gamma\Gamma}] + [\hat{K}] & [K_{\Gamma\Omega}] \\ [K_{\Omega\Gamma}] & [K_{\Omega\Omega}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_{\Gamma}\} \\ \{\delta_{\Omega}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{\Gamma}\} + \{\hat{F}\} \\ \{F_{\Omega}\} \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

Где матрицы $[\hat{K}]$ и $[\hat{K}]^{-1}$ соответствуют тензорам Неймана N_{ij} и Грина G_{ij} ; $\{\hat{F}\}$ и $[\hat{K}]^{-1}\{\hat{F}\}$ – номинально задаваемым усилиям S_i^0 и перемещениям u_i^0 .

Рассмотренные граничные условия и матричные соотношения применимы для оценки устойчивости процессов закритического деформирования.

Третья глава посвящена изучению процессов деформирования и разрушения неоднородных тел при учете стохастичности распределения прочностных характеристик упруго-хрупких структурных элементов.

Рассмотрены алгоритмы численного решения физически нелинейных задач методом конечных элементов, в том числе включающие итерационную процедуру пересчета напряженно-деформированного состояния при выполнении критерия разрушения, редуцирование жесткости одного «наиболее перегруженного» конечного элемента, автоматический шаг нагружения.

Проведено численное моделирование кинематического растяжения неоднородной пластины с краевым концентратором напряжений (рисунок 2) при различных величинах коэффициента вариации (CV) распределения пределов прочности структурных элементов. Реализация закритической стадии деформирования при высоких значениях CV объяснена развитием макродефектов, проходящих через ослабленные зоны.

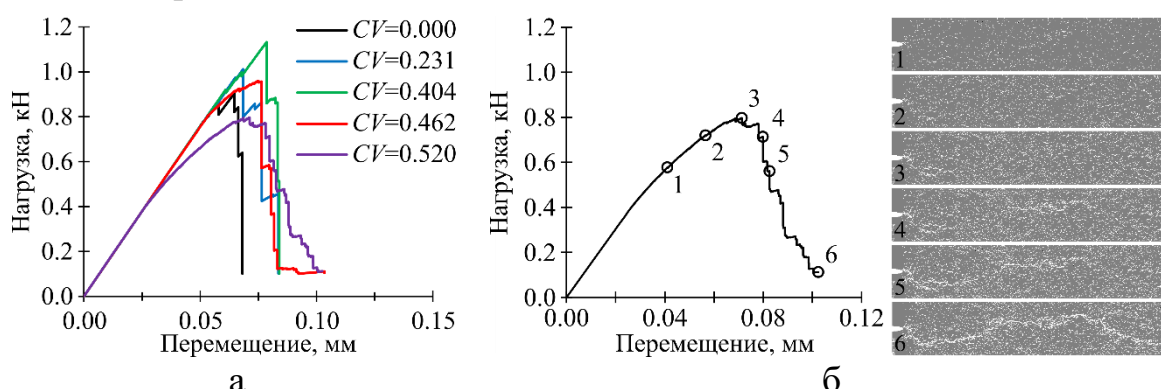


Рисунок 2 – Исследование влияния коэффициента вариации распределения пределов прочности (CV) на реализацию закритической стадии: расчетные диаграммы нагружения (а), кинетика процесса разрушения при $CV = 0.520$ (б)

Численно изучено влияние жесткости нагружающей системы, задаваемой в виде дополнительных упругих частей, на устойчивость реализации закритической стадии деформирования неоднородной пластины (рисунок 3). Повышение податливости нагружающей системы приводит к уменьшению протяженности стадии закритического деформирования конструкции, не меняет кинетику процесса разрушения, но вызывает снижение несущей способности, объясняемое изменением напряженно-деформированного состояния вблизи концентратора напряжений.

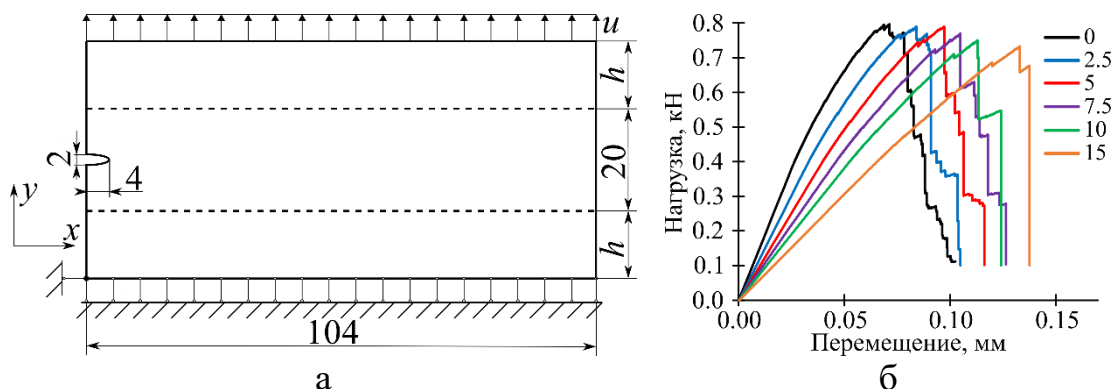


Рисунок 3 – Влияние нагружающей системы на устойчивость закритического деформирования неоднородных пластин: геометрия тела и граничные условия (а), расчетные диаграммы нагружения при различных h , $CV = 0.520$ (б)

Проведено численное моделирование процесса двухосного пропорционального кинематического нагружения неоднородной пластины (рисунок 4) с учетом анизотропии, возникающей вследствие частичной потери несущей способности структурных элементов. Подтверждено наличие стадии закритического деформирования на диаграмме нагружения, отмечена реализация различных типов накопления повреждений при изменении CV .

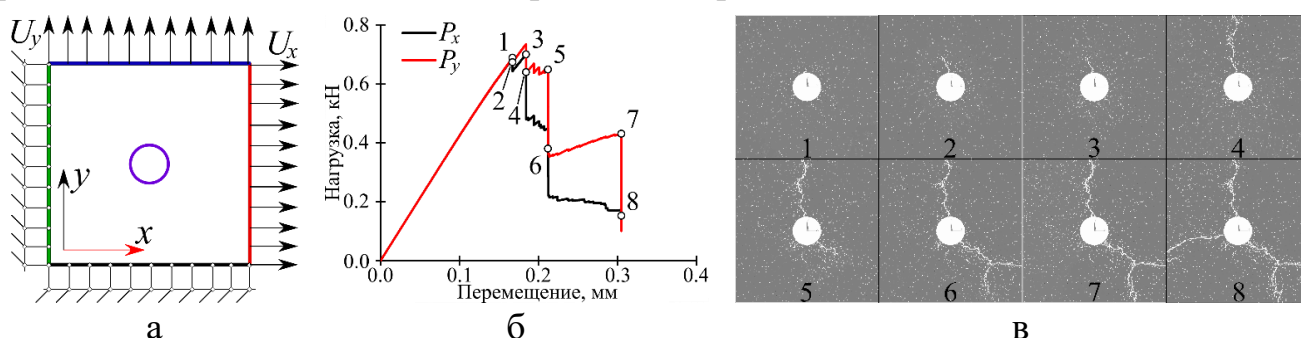


Рисунок 4 – Результаты моделирования двухосного растяжения неоднородных тел: геометрия пластины и граничные условия (а), расчетные диаграммы нагружения (б) и кинетика процесса разрушения (в) при $CV = 0.5$, $U_x = U_y$

Результаты численного моделирования процессов деформирования неоднородных пластин со случайно распределенными прочностными характеристиками упруго-хрупких структурных элементов подтверждают реализуемость закритической стадии деформирования тел на макроуровне вследствие структурного разрушения. Учет свойств нагружающих систем является целесообразным для оценки устойчивости деформирования на данной стадии.

В четвертой главе представлены аналитические решения задач с учетом разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем.

Решена задача о растяжении системы параллельно соединенных элементов с распределенными по равномерному закону прочностными характеристиками при использовании двухзвенной кусочно-линейной аппроксимации полной диаграммы деформирования материала (рисунок 5). Отмечено повышение прочностных резервов, выявляемых при учете разупрочнения материала, с ростом разброса пределов прочности и падением модуля спада. Определены условия реализации полной диаграммы нагружения, связанные с жесткостью нагружающей системы.

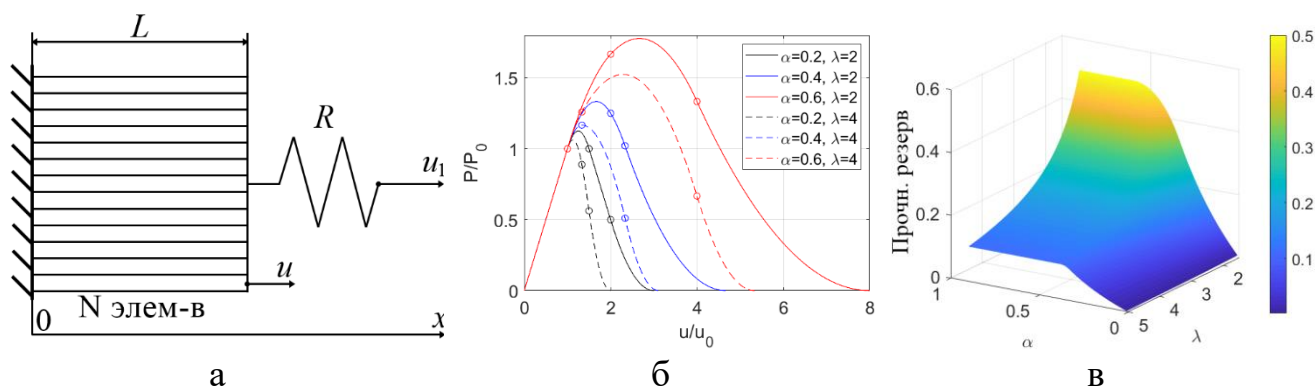


Рисунок 5 – Задача о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками: схема нагружения (а), диаграммы нагружения при различных модулях спада и разбросах пределов прочности (б), прочностные резервы, выявляемые при учете разупрочнения материала (в)

Решен ряд задач о кручении цилиндрических тел при использовании двух-, трех- и многозвенных аппроксимаций полных диаграмм деформирования материала (рисунок 6). Обнаружена стадийность процессов деформирования, связанная не только со свойствами материала, но и с геометрией тела. Подтверждена возможность выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов конструкций при учете разупрочнения материала. Отмечено влияние нагружающих систем на устойчивость закритического деформирования цилиндрических тел при кручении.

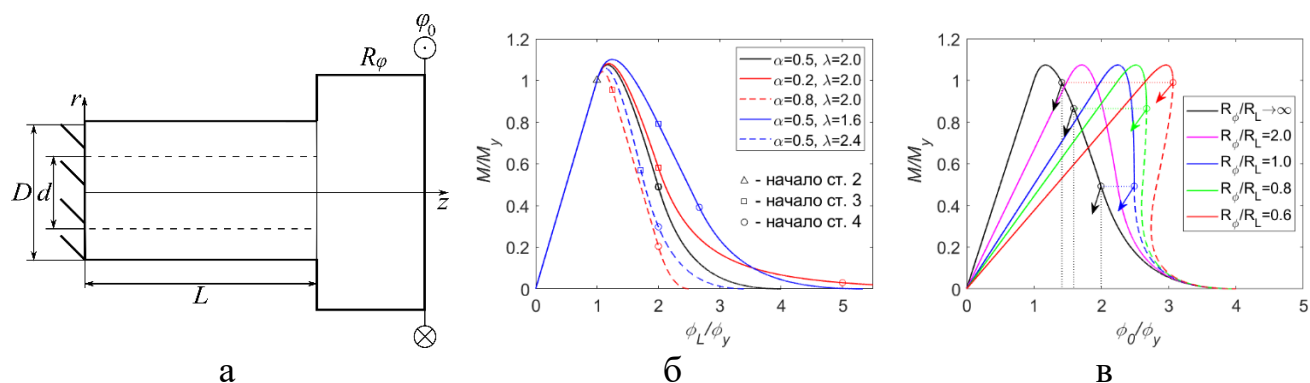


Рисунок 6 – Задачи о кручении цилиндрических тел: схема нагружения (а), расчетные диаграммы нагружения при различных модулях разупрочнения, геометрических параметрах стержня (б), жесткостях нагружающей системы (в)

Результаты аналитических решений краевых задач демонстрируют, что в условиях реализации неоднородного напряженно-деформированного состояния в твердых телах осуществимо равновесное развитие зон разупрочнения. Учет закритической стадии деформирования материала позволяет выявить существенные прочностные и деформационные резервы. Достаточная жесткость нагружающих систем является необходимым условием устойчивости процессов закритического деформирования конструкций.

Пятая глава посвящена численному моделированию процессов деформирования пластин с концентраторами напряжений при учете стадии разупрочнения материала.

Проведен анализ эволюции зон разупрочнения при растяжении пластины с эллиптическим концентратором напряжений (рисунок 7). Подтверждена возможность реализации устойчивого развития зон закритического деформирования материала в твердых телах. Обнаружено, что начало процессов разупрочнения материала не соответствует началу реализации закритического деформирования тела на макроуровне. Учет разупрочнения материала позволил прогнозировать качественно иное поведение тел с концентраторами напряжений.

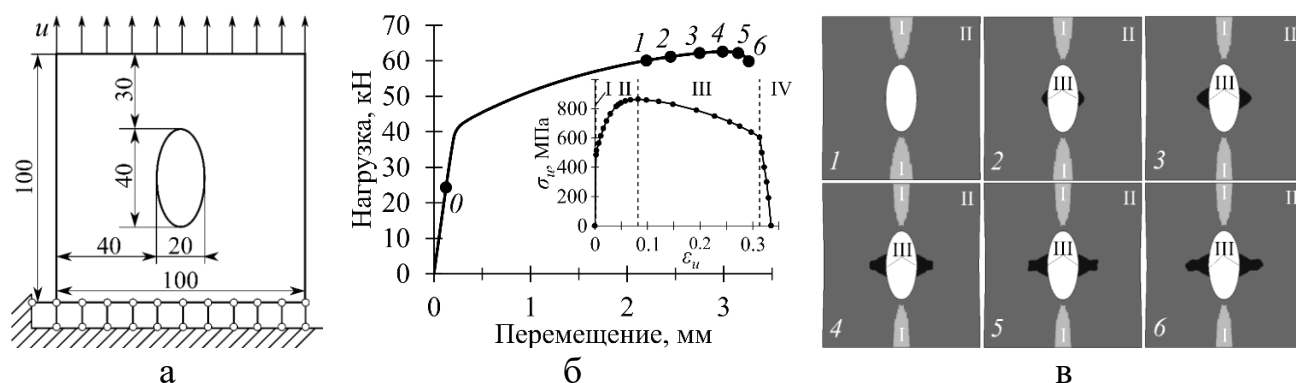


Рисунок 7 – Анализ эволюции зон разупрочнения в пластине с концентратором: геометрия тела и схема нагружения (а), расчетная диаграмма нагружения и диаграмма деформирования материала (в), эволюция зон разупрочнения (г)

Численно изучено влияние геометрии эллиптического концентратора напряжений на характер эволюции зон разупрочнения материала и на величину выявляемых прочностных и деформационных резервов (рисунок 8). Обнаружена смена вида области разупрочнения с уменьшением высоты эллиптического концентратора, при этом происходит немонотонное изменение прочностных резервов и рост деформационных резервов, выявляемых при учете разупрочнения.

Проведено сопоставление расчетных диаграмм нагружения и полей продольных деформаций с данными натурных экспериментов о растяжении пластин из стали 20 с эллиптическими вырезами (рисунок 9). Отмечено хорошее качественное соответствие результатов.

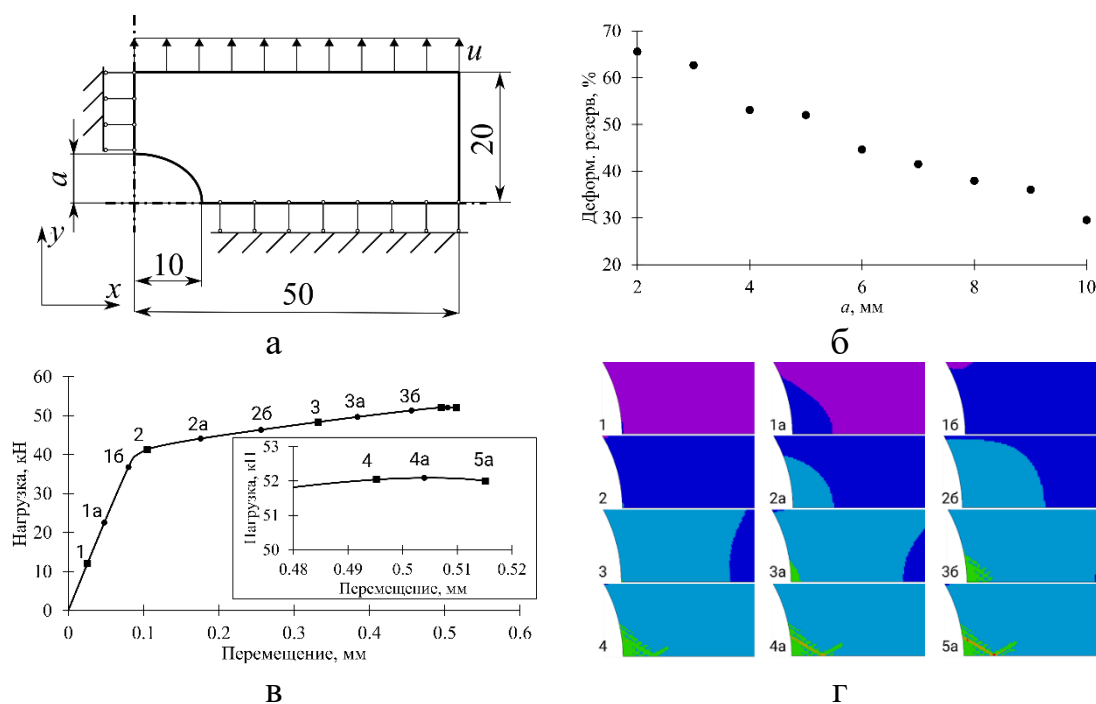


Рисунок 8 – Влияние геометрии концентратора: схема нагружения (а), зависимость деформационных резервов от параметра a (б), расчетная диаграмма нагружения и эволюция зон неупругого деформирования при $a = 10$ мм (в)

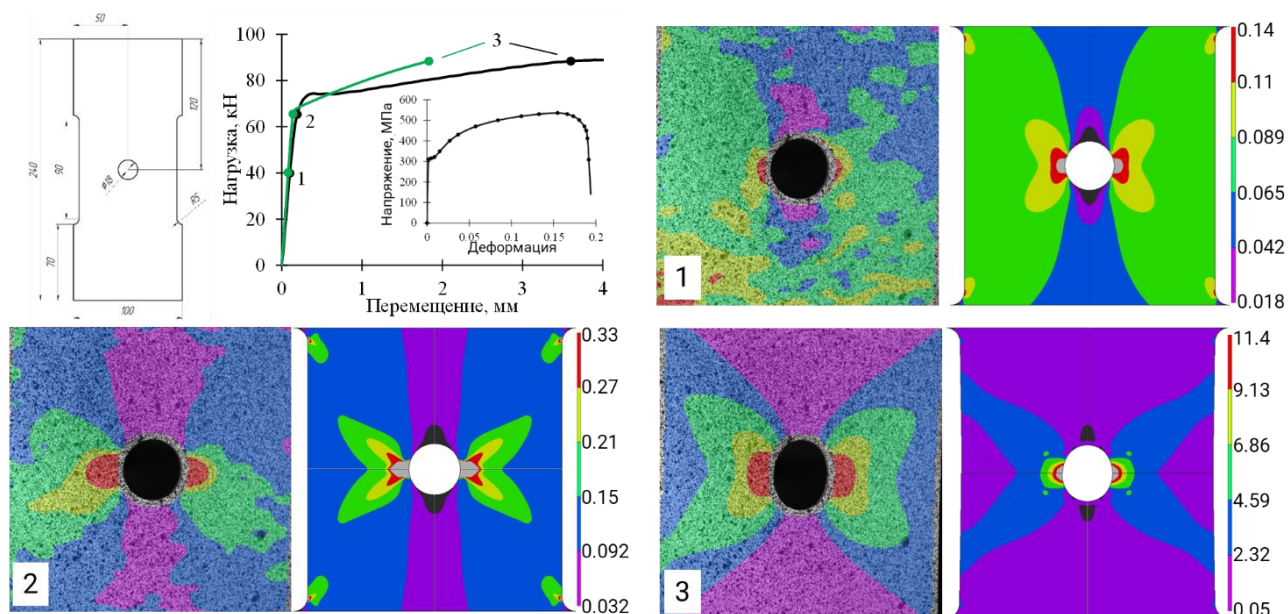


Рисунок 9 – Сопоставление результатов численного моделирования и данных натурных экспериментов: испытываемый образец, расчетная (зеленый цвет) и экспериментальная (черный цвет) диаграмма нагружения пластины и использованная диаграмма деформирования материала, эволюция полей продольных деформаций по данным бесконтактной оптической видеосистемы (слева) и численного моделирования (справа)

Результаты численного моделирования процессов деформирования пластин с концентраторами напряжений при учете разупрочнения материала демонстрируют осуществимость равновесного развития зон закритического деформирования материала в условиях реализации неоднородного напряженно-

деформированного состояния вблизи концентратора напряжений. Учет закритического деформирования материала позволяет выявить дополнительные прочностные и деформационные резервы конструкций, величина которых зависит от геометрии концентратора напряжений.

Шестая глава посвящена численному моделированию процессов равновесного роста трещин с использованием модели когезионной зоны, что соответствует учету разупрочнения материала вблизи вершины трещины.

Изучен процесс закритического деформирования тела с трещиной с использованием модели когезионной зоны (рисунок 10). Рассмотрена задача деформирования тела, состоящего из двух упругих частей, соединенных через тонкий укороченный промежуточный слой, имитируемый когезионными элементами. Для материала промежуточного слоя использована двухзвенная кусочно-линейная аппроксимация полной диаграммы деформирования. Отмечено, что вид эпюры напряжений вблизи вершины трещины качественно соответствует закладываемой диаграмме деформирования материала. Подтверждена возможность реализации закритической стадии деформирования тела вследствие равновесного развития трещины в промежуточном слое.

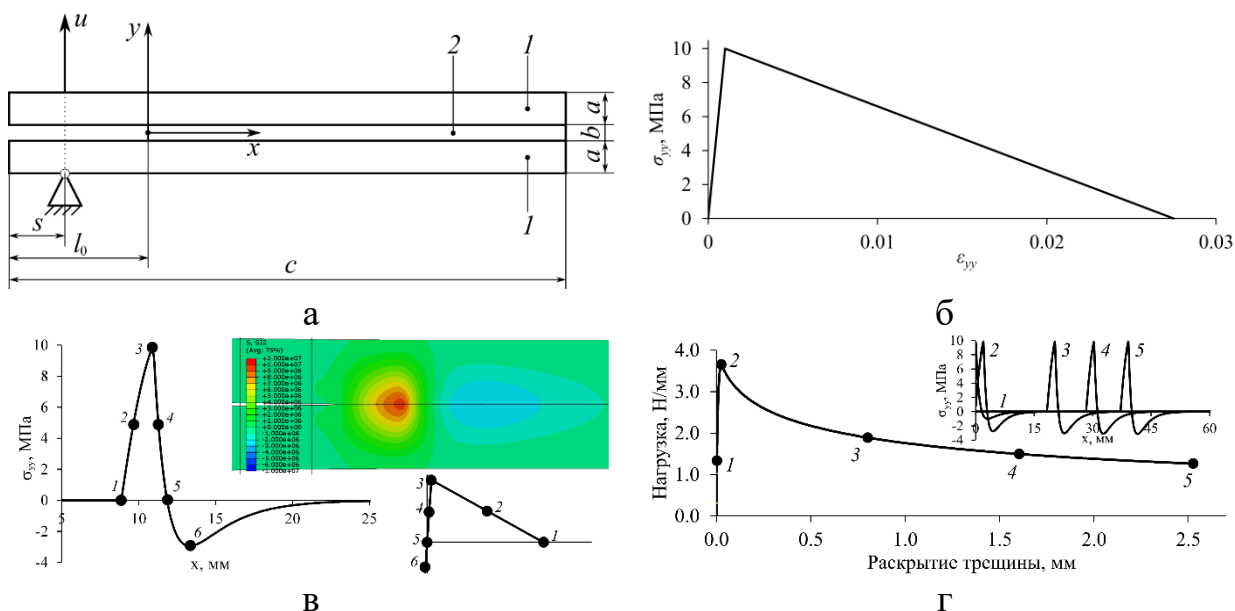


Рисунок 10 – Закритическое деформирование тела с трещиной: геометрия тела и схема нагружения (а), модельная диаграмма деформирования материала промежуточного слоя (б), эпюра напряжений в промежуточном слое вблизи вершины трещины (в), расчетная диаграмма нагружения (г)

Численно изучено влияние модуля разупрочнения материала промежуточного слоя на распределение напряжений у вершины трещины и расчетные диаграммы нагружения (рисунок 11). Отмечено качественное соответствие эпюр напряжений виду диаграмм деформирования материала. Выявлен рост несущей способности тела при уменьшении модуля спада. Увеличение соотношения между модулем разупрочнения и модулем Юнга не привело к изменению поведения тела после начала роста трещины, однако реализуется более ранний срыв с диаграмм нагружения.

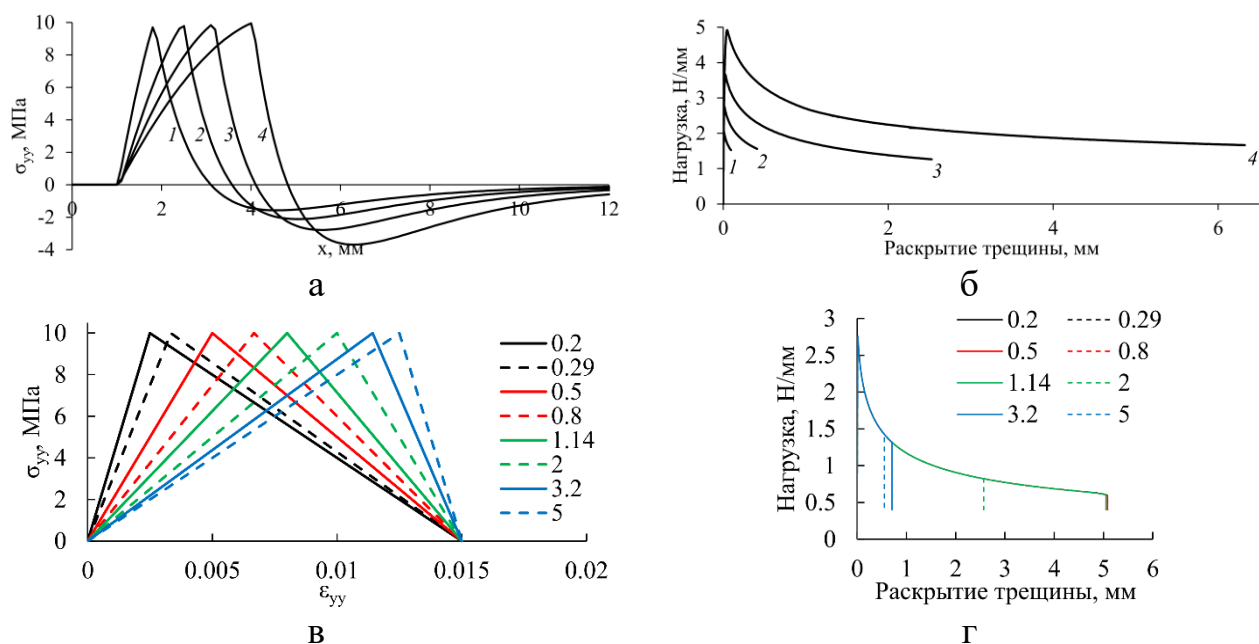


Рисунок 11 – Влияние поведения материала на стадии разупрочнения: эпюры напряжений (а) и расчетные диаграммы нагружения (б) для при различных модулях разупрочнения, диаграммы деформирования материала промежуточного слоя с различными соотношениями между модулем разупрочнения и модулем Юнга (в) и соответствующие расчетные диаграммы нагружения тела (г)

Численно исследовано влияние жесткости нагружающей системы на устойчивость процессов равновесного роста трещины (рисунок 12). Проанализировано влияние длины начальной трещины l_0 на вид диаграмм нагружения. Сделан вывод о меньшей требуемой жесткости нагружающей системы для обеспечения устойчивого процесса роста трещины с увеличением ее начальной длины. Изучено влияние жесткости упругих частей (изменяемой в f раз) на вид расчетных диаграмм нагружения. Отмечена необходимость использования дополнительных критериев для проверки устойчивости процессов разупрочнения материала вблизи вершины трещины.

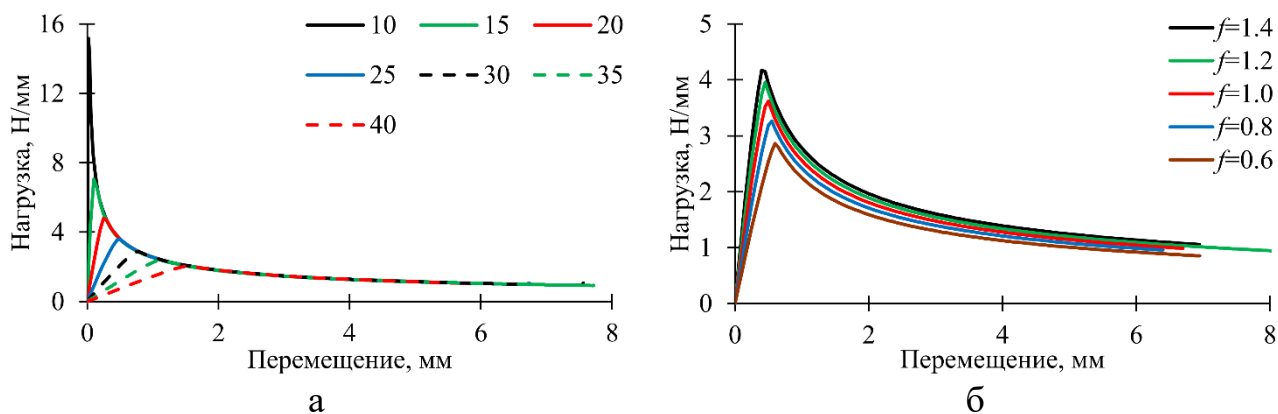


Рисунок 12 – Влияние жесткости нагружающей системы на устойчивость процессов роста трещины: диаграммы нагружения тела при различной начальной длине трещины (а) и при изменении жесткости упругих частей (б)

Результаты численного моделирования процессов разрушения тел с трещинами с использованием модели когезионной зоны демонстрируют реализуемость равновесного развития зон разупрочнения материала вблизи вершины трещины. Достаточная жесткость нагружающих систем является необходимым условием устойчивости процессов равновесного роста трещин, сопровождающихся закритическим деформированием тел.

В Заключении отражены итоги выполненного исследования, рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

Итоги выполненного исследования.

1. Проанализированы макрофеноменологические и структурно-феноменологические модели неупругого деформирования и разрушения. Изучены способы учета нагружающих систем в граничных условиях. На основе использования метода суперэлементов получены матричные соотношения, являющиеся эквивалентом нелокальных граничных условий контактного типа.
2. Численно исследованы процессы деформирования и разрушения неоднородных тел с учетом статистического распределения прочностных характеристик упруго-хрупких структурных элементов, анизотропии, возникающей вследствие частичной потери их несущей способности. Установлено, что процессы разрушения структурных элементов могут приводить к реализации закритической стадии деформирования тела, устойчивость реализации которой зависит от свойств нагружающей системы.
3. Получены аналитические решения краевых задач о растяжении системы параллельно соединенных элементов со случайными прочностными характеристиками и о кручении цилиндрических тел при учете разупрочнения материала. Проанализирована эволюция зон неупругого деформирования. Установлено, что учет разупрочнения материала позволяет выявить дополнительные прочностные и деформационные резервы, определена их связь с геометрическими и материальными параметрами. Выявлено, что достаточная жесткость нагружающей системы является условием реализации полных диаграмм нагружения на макроуровне.
4. Проведен численный анализ процессов деформирования пластин с концентраторами напряжений различной геометрии при учете закритической стадии деформирования материала. Изучена эволюция зон разупрочнения, отмечена возможность их устойчивого развития. Подтверждена возможность выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов при учете стадии закритического деформирования материала. Проведено сопоставление результатов численных решений с данными натурных экспериментов.
5. Проведено численное моделирование процессов равновесного роста трещин с использованием модели когезионной зоны. Проанализировано влияние значений параметров разупрочнения материала и характеристик жесткости нагружающей системы на зону разупрочнения у вершины трещины и стадию закритического деформирования тела. Подтверждена применимость модели механики трещин, учитывающей реализацию зоны разупрочнения, для описания процессов равновесного роста трещин и определения условий перехода к динамическому разрушению.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

Полученные в диссертации аналитические и численные решения физически нелинейных краевых задач и новые данные о закономерностях неупругого деформирования и разрушения твердых тел подтверждают целесообразность использования структурно-феноменологических моделей деформирования неоднородных тел, моделей деформационного разупрочнения и нелинейных моделей механики трещин для изучения процессов закритического деформирования конструкций.

Результаты исследования подтверждают рациональность развития методологии проведения уточненного прочностного анализа ответственных конструкций для повышения их безопасности в направлениях учета реализации стадии разупрочнения материала, позволяющего выявлять на этапе проектирования дополнительные прочностные и деформационные резервы и прогнозировать уточненное поведение конструкций в условиях возникновения аварийных ситуаций, а также учета свойств нагружающих систем для определения устойчивости процессов закритического деформирования и разрушения с оценкой их катастрофичности.

Перспективы дальнейшей разработки темы заключаются:

- 1) в развитии структурно-феноменологических моделей деформирования и разрушения неоднородных сред для учета физических процессов, происходящих на различных масштабных уровнях, реальной структуры материалов, пластического деформирования, а также процессов накопления повреждений (в том числе вследствие циклических и динамических воздействий);
- 2) в развитии моделей деформационного разупрочнения (в том числе для тел с трещинами) для учета конечных и больших деформаций, а также динамических эффектов;
- 3) в развитии способов учета свойств нагружающих систем при численном решении краевых задач (в том числе в рамках метода суперэлементов) и оценки устойчивости процессов закритического деформирования в твердых телах;
- 4) в разработке и развитии расчетно-экспериментальных методов идентификации параметров диаграмм деформирования материалов на стадии разупрочнения (в том числе в условиях локализации деформаций);
- 5) в применении рассмотренных моделей для прогнозирования процессов неупругого деформирования и разрушения элементов ответственных конструкций и решения прикладных задач.

Основные публикации автора по теме диссертационной работы

1. Вильдеман, В. Э. Задача о кручении цилиндрического тела с учетом разупрочнения / В. Э. Вильдеман, А. И. Мугатаров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 4. – С. 29-36. (Scopus)
2. Вильдеман, В. Э. Моделирование процесса деформирования пластины с концентратором напряжений при учете закритической стадии деформирования материала / В. Э. Вильдеман, М. П. Третьяков, А. И. Мугатаров // Вестник

- Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 3. – С. 32-40. (**Scopus**)
3. Вильдеман, В. Э. Моделирование процесса равновесного роста трещины в композитном образце с позиций механики закритического деформирования / В. Э. Вильдеман, **А. И. Мугатаров** // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2022. – Т. 26, № 1. – С. 48-61. (**Web of Science, Scopus**)
4. Вильдеман, В. Э. Устойчивость закритического деформирования при кручении толстостенного цилиндрического тела / В. Э. Вильдеман, **А. И. Мугатаров** // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 4. – С. 135-147. (**Scopus**)
5. Wildemann, V. E. The analytical and numerical solution of the problem of stretching a system of parallel elements with random strength characteristics taking into account the postcritical stage of deformation and rigidity of the loading system / V. E. Wildemann, **A. I. Mugatarov**, M. P. Tretyakov // Meccanica. – 2022. – Vol. 57, No. 9. – P. 2323-2335. (**Web of Science, Scopus**)
6. Stability of Postcritical Deformation of CFRP under Static $\pm 45^\circ$ Tension with Vibrations / V. Wildemann, O. Staroverov, E. Strungar, E. Lunegova, **A. Mugatarov** // Polymers. – 2022. – Vol. 14, No. 21. – Art. No. 4502. (**Web of Science, Scopus**)
7. Аспекты численного моделирования процессов разрушения упруго-хрупких тел / В. Э. Вильдеман, Е. В. Феклистова, **А. И. Мугатаров**, М. Н. Муллахметов, А. М. Кучуков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2023. – Т. 16, № 4. – С. 420-429. (**Scopus**)
8. Description of Fatigue Sensitivity Curves and Transition to Critical States of Polymer Composites by Cumulative Distribution Functions / O. Staroverov, **A. Mugatarov**, A. Yankin, V. Wildemann // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2023. – Vol. 17, No. 63. – P. 91-99. (**Web of Science, Scopus**)
9. Feklistova, E. Numerical study of the influence of the parameters of statistical distribution of the structural elements' ultimate strength on deformable bodies' fracture processes / E. Feklistova, **A. Mugatarov**, V. Wildemann // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2024. – Vol. 18, No. 70. – P. 105-120. (**Web of Science, Scopus**)
10. Feklistova, E. Numerical modeling of fracture processes of bodies with stress concentrators under conditions of proportional loading, taking into consideration the statistical distribution of ultimate strength and partial loss of load bearing capacity / E. Feklistova, **A. Mugatarov**, V. Wildemann // Fracture and Structural Integrity. – 2025. – Vol. 19, No. 74. – P. 55-72. (**Web of Science, Scopus**)
11. Вильдеман, В. Э. Структурно-феноменологическая модель усталостного накопления повреждений и разрушения неоднородных сред / В. Э. Вильдеман, **А. И. Мугатаров** // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 4. – С. 50-60. (**Scopus**)
12. **Мугатаров, А. И.** Аналитическое решение задачи о кручении полого цилиндра с учетом закритического деформирования материала и жесткости нагружающей системы / **А. И. Мугатаров** // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2026. – № 2. – С. 90-111. (**БАК**)

Переводная версия:

Mugatarov, A. I. The Analytical Solution of a Problem of Hollow Cylinder Torsion Taking Account of the Postcritical Deformation of Material and Loading System Stiffness / **A. I. Mugatarov** // Mechanics of Solids. – 2026. – Vol. 61, I. 2. – Art. No. 134. (**Web of Science, Scopus**)

13. Influence of Fatigue Damage on Mechanical Behavior of Laminated Composite Under $\pm 45^\circ$ Tension / O. Staroverov, **A. Mugatarov**, E. Strungar, E. Chebotareva, V. Wildemann // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2026. – Vol. 39, I. 8. – P. 1185-1196. (**Web of Science, Scopus**)

14. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025618628 Российская Федерация. «Программа для расчета диаграммы нагружения полого цилиндрического тела при кручении с учетом закритического деформирования материала и жесткости нагружающей системы»: заявл. 07.04.2025: опубл. 07.04.2025 / **А. И. Мугатаров**; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет». (**Программа для ЭВМ**)