

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Пермский государственный национальный  
исследовательский университет»



На правах рукописи

Косков Михаил Андреевич

**Тепловая конвекция феррожидкости в протяжённом  
замкнутом контуре: термомагнитный механизм  
интенсификации течения**

Специальность 1.1.9 –

«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Сморodin Борис Леонидович

Пермь – 2025

## Оглавление

	Стр.
<b>Список условных обозначений . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>Введение . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. Современное состояние исследований . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1 Тепловая конвекция магнитной жидкости . . . . .	13
1.2 Свойства магнитной жидкости . . . . .	19
1.2.1 Гранулометрический состав . . . . .	19
1.2.2 Теплофизические свойства . . . . .	21
<b>Глава 2. Аппаратурное оформление эксперимента и методика измерений . . . . .</b>	<b>24</b>
2.1 Описание установки . . . . .	24
2.2 Настройка измерителя температуры . . . . .	29
2.3 Измерение коэффициента теплоотдачи . . . . .	33
2.4 Распределение температуры на охлаждаемом участке контура . . . . .	35
2.4.1 Интегральное приближение . . . . .	35
2.4.2 Модификация интегрального приближения. Поиск радиального перепада температуры . . . . .	37
2.4.3 Упрощенные формулы для расчёта скорости потока, расхода жидкости и числа Нуссельта . . . . .	43
2.5 Тестовые опыты и измерение пространственного декремента затухания . . . . .	45
<b>Глава 3. Интенсификация теплообмена в магнитном поле . . . . .</b>	<b>52</b>
3.1 Влияние концентрации магнитных наночастиц на интенсивность теплопереноса . . . . .	52
3.2 Опыты в поле увеличенной напряжённости. Измерение скорости потока жидкости . . . . .	62
3.3 Влияние расположения источника магнитного поля . . . . .	66

<b>Глава 4. Термомагнитная конвекция в сильном поле. Роль капельных агрегатов . . . . .</b>	<b>76</b>
4.1 Эксперименты с феррожидкостью, термодинамически неустойчивой в сильных полях . . . . .	76
4.2 Подготовка и свойства термодинамически устойчивой феррожидкости . . . . .	85
4.3 Эксперименты с сепарированной феррожидкостью в сильном поле	89
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>110</b>
<b>Список таблиц . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>Приложение А. Радиальное распределение температуры на охлаждаемом участке контура . . . . .</b>	<b>118</b>

### Список условных обозначений

$\alpha$	коэффициент теплоотдачи
$\beta$	коэффициент объёмного теплового расширения
$\beta_m$	температурный коэффициент намагниченности
$\chi_0$	начальная магнитная восприимчивость
$\Delta T$	характерный перепад температуры
$\eta$	динамическая вязкость
$\lambda$	коэффициент теплопроводности
$Nu$	число Нуссельта
$Ra$	тепловое число Рэлея
$Ra_m$	магнитное число Рэлея
$\mu_0$	магнитная постоянная
$\nabla$	оператор градиента
$\varphi_h$	объёмная доля наночастиц
$\varphi_s$	объёмная доля твёрдой фазы
$\rho$	плотность жидкости
$u_0$	скорость потока жидкости на оси трубки контура
$\vec{F}$	объёмная сила
$\vec{H}$	напряжённость магнитного поля; $H$ — модуль вектора напряжённости
$\vec{M}$	намагниченность; $M$ — модуль вектора намагниченности
$a$	температуропроводность
$b$	геометрический параметр, выражающий отношение внутреннего радиуса контура к его длине
$c$	удельная (массовая) теплоёмкость
$g$	модуль ускорения свободного падения
$k$	пространственный декремент затухания температурного возмущения вдоль охлаждаемого участка контура
$L$	длина трубки контура
$m$	магнитный момент наночастицы
$M_\infty$	намагниченность насыщения магнитной жидкости
$n$	концентрация магнитных наночастиц
$P$	тепловая мощность нагревателя

$q_V$	объёмный расход жидкости
$r_1$	внутренний радиус трубки контура
$r_2$	внешний радиус трубки контура
$T$	температура; температурное возмущение
$T_0$	абсолютная температура; температура охлаждающего воздуха
$x$	диаметр магнитного ядра наночастицы

## Введение

### Актуальность и степень разработанности темы исследования

Свободные конвективные течения неизотермических жидкостей активно изучаются с начала XX века. Широко известные работы Бенара (1900) и Рэлея (1916), посвящённые поведению гомогенной неизотермической несжимаемой жидкости в плоском горизонтальном слое, явились началом нового направления научных исследований: тепловой конвекции. В рамках этого направления изучаются связанные проблемы неустойчивости механического равновесия жидкостей, надкритических режимов их конвективных течений, беспороговой конвекции, неустойчивости и эволюции развитых течений, а также сопутствующий теплообмен. В Советском Союзе над этими и многими другими задачами трудились Г. А. Остроумов, Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Д. В. Любимов. Интерес к свободной тепловой конвекции не ослабевает и в настоящее время, поскольку информация о ней необходима для понимания и контроля процессов теплообмена и теплопереноса, играющих большую роль в быту и производственной деятельности человека.

Магнитные жидкости (феррожидкости), впервые синтезированные в 1960-х годах (S. S. Papell 1963), представляют собой устойчивые коллоидные дисперсии ферро- или ферромагнитных материалов в жидкостях-носителях. Эти искусственные среды привлекли особое внимание исследователей тепловой конвекции благодаря сочетанию текучести и одновременно высокой чувствительностью к магнитному полю. Намагниченность феррожидкостей на четыре-шесть порядков больше намагниченности их сред-носителей, а её существенная зависимость от температуры приводит к проявлению несвойственного обычным жидкостям термомагнитного механизма конвекции. Последний предоставляет возможность управления течением за счёт внешнего магнитного поля.

Экспериментальные исследования конвективных течений магнитных жидкостей выполнялись в России (Г. П. Богатырёв, Г. Ф. Путин, А. Ф. Глухов, А. А. Божко, В. Г. Гилёв, Н. В. Колчанов, А. С. Сидоров), Японии (Н. Yamaguchi, К. Fumoto), Китае (Q. Li, W. Lian), Латвии (E. Blums, A. Mezulis) и Белоруссии (В. Г. Баштовой, М. С. Краков). Теоретическими и численными исследованиями конвективной устойчивости, а так же течений неоднородно нагретой магнитной жидкости занимались: P. N. Kaloni, J. X. Lou, M. Lücke, М. И. Шлиомис,

А. Ф. Пшеничников, Б. Л. Смородин, С. А. Суслов и другие. Изучались течения в сосудах различной геометрии: горизонтальном и вертикальном слоях, связанных каналах, ячейках Хеле–Шоу, кубе и шаре. Методики измерения свойств магнитных жидкостей разрабатываются в работах А. В. Лебедева, А. С. Иванова, П. А. Ряполова.

Использование магнитной жидкости в качестве теплоносителя — перспективный метод улучшения характеристик теплообменных устройств. Теоретические оценки предсказывают многократное усиление теплообмена при воздействии магнитного поля на неоднородно нагретую феррожидкость. Однако, несмотря на длительное изучение этого вопроса, обозначенного в работах Р. Розенцвейга (1964), проблема интенсификации теплопередачи с использованием магнитных жидкостей остаётся актуальной. Эксперименты (E. Blums 2008) и численное моделирование (R. Zanella 2019) зачастую завершаются скромным результатом: вклад термомагнитной конвекции в теплоперенос составляет несколько десятков процентов от вклада гравитационной. Решение этой проблемы требует поиска оптимальных, в смысле усиления теплопереноса, условий для термомагнитной конвекции. Вместе с тем магнитожидкостное теплообменное устройство должно обладать простой конструкцией и возможностью управления теплотоком.

**Целью** диссертационной работы является определение условий, обеспечивающих наибольшую интенсивность тепловой (гравитационной и термомагнитной) конвекции феррожидкости в замкнутом контуре, определение скорости течения и безразмерного теплотока (числа Нуссельта) в этих условиях.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Спроектирована, изготовлена и протестирована экспериментальная установка, состоящая из теплообменного устройства в виде замкнутого протяжённого гидродинамического контура и дополнительного оборудования, обеспечивающего проведение температурных измерений в контролируемых условиях теплообмена.
2. Получено аналитическое решение задачи о конвективном переносе тепла магнитной жидкостью вдоль охлаждаемого участка контура, применимое как в ситуации размещения нагревателя во внешнем градиентном магнитном поле, так и в нулевом магнитном поле.
3. Разработан метод анализа результатов температурных измерений, позволяющий рассчитать скорость потока жидкости в контуре, её объём-

ный расход и безразмерный тепловой поток (число Нуссельта). Метод апробирован в экспериментах с однокомпонентной жидкостью.

4. Изучено влияние объёмной доли магнитных наночастиц в феррожидкости, напряжённости внешнего магнитного поля и места расположения его источника на интенсификацию теплопереноса за счёт термомагнитной конвекции.
5. Исследованы особенности конвективного теплопереноса при воздействии сильного магнитного поля на контур с магнитной жидкостью, подверженной концентрационному расслоению с образованием капельных агрегатов. Проведены контрольные опыты над магнитной жидкостью, устойчивой к образованию капельных агрегатов, определившие роль последних в интенсификации или ослаблении течения.

**Научная новизна** работы состоит в том, что в ней впервые

1. Проанализирована степень влияния термомагнитной конвекции на интенсивность теплопереноса вдоль протяжённого вертикального замкнутого контура с исключением конкуренции термогравитационного и термомагнитного течений. Важную роль при этом играли простота и надёжность температурных измерений. Экспериментально доказано, что в режиме стационарного течения температура вдоль охлаждаемой части контура спадает экспоненциально.
2. Получены аналитические зависимости, однозначно связывающие скорость течения жидкости, объёмный расход и безразмерный тепловой поток (число Нуссельта) с показателем экспоненты. Единственным управляющим параметром в этих соотношениях выступает безразмерный коэффициент теплоотдачи — число Био, надёжно определённое в независимом эксперименте.
3. Показано, что измеренного в эксперименте декремента затухания температурного возмущения (показателя экспоненты) достаточно для того, чтобы однозначно судить о величине вклада термомагнитной конвекции в объёмный расход жидкости и число Нуссельта. Информация о свойствах жидкости для этого не требуется.
4. Экспериментально установлена доля твёрдой фазы в магнитной жидкости, при которой удовлетворяются противоречивые условия интенсификации термомагнитной конвекции: высокая намагниченность и низкая вязкость раствора.



5. Предложена гипотеза, объясняющая существенное отличие конвективного теплопереноса феррожидкостями с различным дисперсным составом частиц. Жидкость с крупнодисперсной фракцией при воздействии сильного магнитного поля блокирует глобальное циркуляционное течение в контуре благодаря формированию капельных агрегатов. Очищенный от крупных частиц путём магнитной сепарации коллоидный раствор, напротив, даёт шестикратное увеличение безразмерного теплопотока за счёт термомагнитной конвекции в сильном магнитном поле.

**Практическая значимость** заключается в том, что результаты проведённых исследований расширяют знания о тепловой конвекции магнитных жидкостей под действием магнитного и гравитационного полей, демонстрируя возможность многократного повышения интенсивности теплопереноса за счёт правильного выбора геометрии установки, концентрации и дисперсного состава частиц в жидкости. Результаты востребованы как в практических задачах конструирования пассивных охлаждающих устройств, так и при постановке новых экспериментов.

#### **Методология и методы исследования**

Проведены эксперименты с использованием вертикального гидродинамического контура, выполненного из тонкой трубки круглого сечения. Подвод тепла осуществлялся на коротком вертикальном участке контура, отвод — обдувом всей внешней поверхности трубки термостатированным воздухом. Неоднородное магнитное поле, источником которого служили плоские полюсные наконечники ферритового магнитопровода, накладывалось на участок контура вблизи нагревателя. В контрольных опытах источник поля демонтировался. Контур заполнялся магнитными жидкостями типа «магнетит–керосин–олеиновая кислота» умеренных концентраций. Интенсивность стационарного интегрального конвективного теплопотока вдоль контура рассчитывалась по результатам температурных измерений поверхности трубки медь–константановыми термопарами. В расчётах использовались методы регрессионного анализа. Окончательные результаты представлялись в безразмерном виде — взаимосвязи числа Нуссельта и теплового числа Рэлея.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Оптимальная геометрия магнитожидкостного теплообменного устройства в виде протяжённого замкнутого контура с сосредоточенным источником тепла, размещённом во внешнем неоднородном магнитном

поле, наиболее градиентная область которого накладывается на выходное сечение нагревателя, позволяет при равных тепловых числах Рэлея увеличить число Нуссельта в 2–4 раза за счёт термомагнитной конвекции.

2. Скорость течения жидкости, её объёмный расход и тепловой поток вдоль протяжённого замкнутого контура корректно описываются двумерной аналитической моделью теплообмена, при условии постоянства числа Био вдоль охлаждаемого участка контура. Предсказываемое моделью экспоненциальное затухание температуры вдоль контура подтверждается в экспериментах.
3. Отношение вкладов термомагнитной и термогравитационной конвекций в интегральный теплоперенос вдоль протяжённого замкнутого контура однозначным образом рассчитывается по результатам измерений температуры поверхности контура при условии постоянства коэффициента теплоотдачи.
4. Интенсивность конвективного теплопереноса в сильно неоднородном магнитном поле кратно возрастает при использовании в качестве теплоносителя магнитной жидкости, удовлетворяющей одновременно требованиям малой вязкости и высокой намагниченности с исключением образования капельных агрегатов.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается физической обоснованностью постановки эксперимента и используемых моделей, применением общепринятых и апробированных методов измерения и расчёта свойств магнитных жидкостей, тщательной настройкой термоизмерительной аппаратуры, тщательной математической обработкой первичных экспериментальных данных и критическим анализом полученных результатов, согласованностью и повторяемостью результатов многократно проведённых тестовых опытов, учётом доступных результатов работ других авторов.

#### **Апробация работы**

Результаты работы представлялись на следующих конференциях и семинарах: 19-я Международная плесская конференция по нанодисперсным магнитным жидкостям (Иваново, 8–11 сентября 2020 г.), XXII Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 22–26 марта 2021 г.), VII международная ставропольская конференция по магнитным коллоидам (Ставрополь, 5–9 сентября 2021 г.), XX Юбилейная Всероссийская с международным участием плесская научная

конференция по нанодисперсным магнитным жидкостям (Плес, 1–30 сентября 2022 г.), Пермские гидродинамические научные чтения (Пермь, 5–7 октября 2022 г.), VIII Ставропольская международная конференция по магнитным коллоидам ISCMC2023 (Ставрополь, 10–14 сентября 2023 г.), XXI Всероссийская с международным участием плесская научная конференция по нанодисперсным магнитным жидкостям (Плес, 10–13 сентября 2024 г.), XXIV Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 24–28 февраля 2025 г.), Пермский гидродинамический семинар (Пермь, 6 марта 2025 г.), Научный семинар Института механики сплошных сред (Пермь, 12 марта 2025 г.).

### **Личный вклад**

Автором самостоятельно выполнены все экспериментальные работы, представленные в диссертации, а именно: проектирование и изготовление экспериментальной установки [1], измерение её параметров включая напряжённость магнитного поля в месте размещения нагревателя [2], измерение вязкости и расчёт теплофизических свойств исследуемых жидкостей [3]. Автором самостоятельно выполнены все температурные измерения и предложена методика их анализа, основанная на полученных автором аналитических формулах [1; 4], с использованием которой автором измерены числа Нуссельта [1; 3–7] и скорость течения магнитной жидкости [2]. Вывод упрощённых формул в п. 2.4.3 главы 2 [3], обсуждение и интерпретация результатов производились совместно с соавтором д-р. физ.-мат. наук, проф. А. Ф. Пшеничниковым.

Все представленные в диссертации и выносимые на защиту положения получены автором лично.

### **Публикации**

Результаты по теме диссертации изложены в 16 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 2 — в прочих рецензируемых журналах, 9 — в сборниках трудов конференций и тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 122 страницы, включая 57 рисунков и 7 таблиц. Список литературы содержит 138 наименований.

### **Благодарности**

Автор выражает благодарность главному научному сотруднику лаборатории «Динамики дисперсных систем» ИМСС УрО РАН, соавтору д-р. физ.-мат.

наук, проф. А. Ф. Пшеничникову за ценные рекомендации и сотрудничество при проведении диссертационного исследования.

Автор благодарен научному руководителю д-р. физ.-мат. наук, проф. Б. Л. Смородину за руководство, помощь и поддержку, оказанную при работе над диссертацией.

Автор благодарит заведующего лаборатории «Динамики дисперсных систем» ИМСС УрО РАН д-р. физ.-мат. наук, доц. А. С. Иванова и старшего научного сотрудника д-р. физ.-мат. наук А. В. Лебедева за помощь в освоении экспериментальных методов измерения свойств магнитных жидкостей и обсуждение результатов работы.

## Глава 1. Современное состояние исследований

### 1.1 Тепловая конвекция магнитной жидкости

Магнитные жидкости (феррожидкости) представляют собой устойчивые коллоидные растворы с наноразмерными однодоменными частицами ферро- или ферримагнетиков [8–13], обладающие высокой чувствительностью к внешним магнитным полям. Обычно магнитная восприимчивость этих растворов в системе СИ имеет порядок нескольких единиц, но при высокой концентрации магнитных наночастиц и низкой температуре может достигать сотни единиц [14; 15]. Высокая чувствительность феррожидкости к внешнему полю и наличие вращательных степеней свободы коллоидных частиц приводят к сильной зависимости тензора напряжений и объёмной пондеромоторной силы от напряжённости магнитного поля, намагниченности жидкости и времён релаксации магнитных моментов частиц. В результате наблюдаются новые гидродинамические явления, отсутствующие в обычной жидкости. Речь идёт о зависимости гидростатического давления от напряжённости магнитного поля и о магнитном скачке давления на границе магнитной жидкости [10–13], о левитации магнитных и немагнитных тел [16–19], об анизотропном увеличении вязкости коллоидного раствора в постоянном магнитном поле и её уменьшении в переменном поле подходящей частоты [10; 13; 20; 21], о ротационном эффекте — вихревом течении феррожидкости во вращающемся поле, связанном с тангенциальными магнитными напряжениями на её границах и объёмными силами, возникающими из-за пространственной неоднородности жидкости и конечного времени релаксации намагниченности [22–24].

Настоящая диссертационная работа посвящена интенсификации конвективного течения магнитной жидкости. Под конвекцией здесь понимается макроскопическое движение неоднородно нагретой жидкости, вызванное зависимостью её свойств от температуры [25–27]. В общем случае, таковыми могут быть плотность, электропроводность, диэлектрическая проницаемость и прочие характеристики. В феррожидкостях зависимость от температуры присуща их намагниченности. Неоднородность свойств жидкости во внешнем поле:

гравитационном, вибрационном, электрическом и магнитном, порождает некомпенсированное силовое воздействие, приводящее к возникновению течений.

В некоторых случаях возможно механическое равновесие неоднородно нагретой жидкости [25–27]. Например, магнитная жидкость остаётся в покое, если градиент температуры, сила тяжести и градиент магнитного поля параллельны [28]. При этом существует порог возникновения конвекции — критическое значение управляющего параметра, начиная с которого равновесие теряет устойчивость и в результате бифуркации возникает конвективное течение.

Если условия существования механического равновесия нарушены, течение возникает беспороговым образом, а значение критического параметра равно нулю [29].

Существование двух независимых механизмов тепловой конвекции — важная особенность магнитной жидкости. Первый термогравитационный механизм проявляется в поле тяжести и связан с изменением силы плавучести в неоднородно нагретой жидкости из-за её теплового расширения [26; 27; 30]. Управляющим параметром, определяющим интенсивность конвективных тепловых потоков при термогравитационной конвекции выступает тепловое число Рэлея [25]:

$$\text{Ra} = \frac{g\rho\beta r_1^3}{\eta a} \Delta T, \quad (1.1)$$

где  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  — модуль ускорения свободного падения,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\beta$  — коэффициент её объёмного теплового расширения,  $\eta$  — динамическая вязкость,  $a$  — температуропроводность,  $\Delta T$  — характерный перепад температуры в сосуде с жидкостью. Если сосуд, представляет собой протяжённый канал, то в качестве масштаба длины выбирается его поперечный размер [29]. Таковым в цилиндрически-симметричном канале (трубке) является его радиус  $r_1$  [30].

Второй, свойственный магнитным жидкостям, термомагнитный механизм тепловой конвекции связан с уменьшением их намагниченности  $\vec{M}$  с ростом температуры [12; 13; 28]. В неоднородном магнитном поле на жидкость действует объёмная пондеромоторная сила, плотность которой равна  $\mu_0 M \nabla H$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  — магнитная постоянная [31],  $H$  — модуль напряжённости магнитного поля в жидкости [11; 32]. В изотермической жидкости эта сила потенциальна и приводит только к изменению гидростатического давления. При

наличии неоднородности температуры потенциальность нарушается. Появляется некомпенсированная гидростатическим давлением объёмная сила:

$$\vec{F} = \mu_0 \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right) T \nabla H, \quad (1.2)$$

где  $T$  — температурное возмущение, а  $M$  и  $H$  рассчитываются при невозмущенной абсолютной температуре  $T_0$ . Действие силы (1.2) со стороны внешнего магнитного поля приводит к возникновению термомагнитной конвекции. Интенсивность тепловых потоков при термомагнитной конвекции определяется другим управляющим параметром — магнитным числом Рэлея:

$$\text{Ra}_m = \frac{\mu_0 \beta_m M |\nabla H| r_1^3 \Delta T}{\eta a}, \quad (1.3)$$

где  $\beta_m = -M^{-1} (\partial M / \partial T)$  — температурный коэффициент намагниченности. Нетрудно оценить отношение между магнитным (1.3) и тепловым (1.1) числами Рэлея:

$$\frac{\text{Ra}_m}{\text{Ra}} = \frac{\mu_0 \beta_m M |\nabla H|}{g \beta \rho}.$$

Так, для магнитной жидкости типа «магнетит в керосине» в [33; 34] приводятся следующие параметры:  $\rho = 1,44 \text{ г/м}^3$ ,  $\beta = 7,7 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$ ,  $\beta_m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ . Намагниченность жидкости в поле с напряжённостью  $25 \text{ кА/м}$  составляет также примерно  $25 \cdot 10^3 \text{ А/м}$ . Если внешнее поле создано постоянным магнитом, то градиент напряжённости  $\nabla H$  имеет порядок величины  $10^6 \text{ А/м}^2$  (см. рис. 2.56). Подстановка числовых значений в формулу выше даёт  $\text{Ra}_m / \text{Ra} \approx 10$ . То есть магнитное число Рэлея может превышать тепловое на порядок, и более. Эта оценка даёт надежду на интенсификацию теплообмена в охлаждающих устройствах путём замены обычного теплоносителя феррожидкостью и наложения градиентного магнитного поля.

Начиная со второй половины XX века [28; 35] публикуется большое число работ по изучению механического равновесия или слабых течений феррожидкости в замкнутых полостях, размещённых во внешнем магнитном поле. Конвекция магнитной жидкости исследовалась в плоских горизонтальном [28; 33; 36–39] и вертикальном слоях [40; 41], в кубической [42; 43] и шаровой [44; 45] полостях. Внешнее магнитное поле в этих работах либо отсутствовало [39],

либо было однородным. В последнем случае неоднородность магнитного поля в жидкости возникала из-за неоднородности температуры, поэтому интенсивность термомагнитной конвекции была сопоставима с интенсивностью термогравитационной [44].

Интенсификация теплообмена в магнитной жидкости возможна при использовании внешнего неоднородного магнитного поля. Градиент напряжённости поля при этом становится независимым параметром [12] и может изменяться в эксперименте в широких пределах. Независимость градиента поля от температуры учтена в формулах (1.2) и (1.3).

В некоторых исследованиях, например [46], магнитную жидкость рассматривали как коллоидную систему с выраженной концентрационной неоднородностью и термодиффузией. Концентрационная неоднородность может приводить к колебательной неустойчивости и возникновению осциллирующих нелинейных течений коллоидных растворов, что наблюдалось в экспериментах [47; 48] и описано теоретически [49–51]. Эффекты, связанные с неоднородностью магнитной жидкости, возникающей благодаря перераспределению наночастиц за счёт термодиффузии и седиментации, изучались в вертикальных связанных каналах при подогреве снизу [48; 52]. В этих экспериментах после потери феррожидкостью устойчивости механического равновесия наблюдались релаксационные колебания. Жидкость в течение около двух часов сохраняла направление циркуляции в каналах по, либо против часовой стрелки, — затем следовала быстрая, за время порядка пяти минут, смена направления течения. Анализ ситуации [53] показал, что главной причиной неустойчивости и колебаний является термодиффузия наночастиц. Для использованной в обсуждаемых опытах магнитной жидкости типа «магнетит в керосине» коэффициент термодиффузии  $Соре$ , рассчитанный по экспериментальным термограммам, совпадает по порядку величины и знаку с результатами его измерения другими авторами [54].

Из перечисленных выше работ [47–50; 52; 53] следует, что колебательные течения магнитных жидкостей возникают и поддерживаются при наличии концентрационных неоднородностей, возникающих за счёт термодиффузии, магнетофореза или гравитационной седиментации наночастиц. Эти механизмы проявляются при сравнительно малой интенсивности конвективного переноса частиц. Напротив, при развитой тепловой конвекции, как будет видно далее в главах 2 и 3, магнитная жидкость ведёт себя подобно гомогенной.



Задача об интенсификации теплообмена с помощью феррожидкости исследуется экспериментально, начиная, по-видимому с работы [55], в которой предложено охлаждающее устройство работающее без механического насоса. Магнитная жидкость выступала теплоносителем, а источником постоянного магнитного поля служил электромагнит с полюсными наконечниками в форме треугольных призм. Для оценки вклада термомагнитной конвекции в теплоотдачу нагретых тел в [56] экспериментально исследована смешанная, гравитационная и термомагнитная, конвекция феррожидкости от немагнитного горизонтального цилиндра, погружённого в жидкость в однородном и неоднородном магнитных полях. Вследствие неблагоприятного распределения магнитного поля вблизи цилиндра вклад термомагнитной конвекции в теплоотдачу оказался существенно меньше ожидаемого. В [57] численно решена задача о конвекции феррожидкости в прямоугольной полости в неоднородном поле с индукцией до 0,8 Тл при подогреве снизу. Сделан вывод об усилении теплопередачи в поле магнита на 50 % и более. В [58] численно исследована тепловая конвекция в цилиндрическом контейнере с феррожидкостью на масляной основе и нагретым соленоидом, расположенным в центре контейнера. В зависимости от объёмной доли частиц в магнитной жидкости и наличия магнитного сердечника внутри соленоида наблюдалось усиление теплоотдачи до 15 %, соответствующее понижению температуры наиболее нагретой части соленоида приблизительно с 70 °С до 60 °С. Обобщая результаты работ [56–58] можно сказать, что термомагнитная конвекция приводит к относительно слабому эффекту — интенсивность теплоотдачи возрастает на несколько десятков процентов, по сравнению с гравитационной конвекцией. Наблюдаемый эффект на порядок меньше того, который можно ожидать при прямом сравнении теплового (1.1) и магнитного (1.3) чисел Рэлея.

Это расхождение было отмечено ранее [13] на примере смешанной (термомагнитной и термогравитационной) конвекции около горизонтального поперечно намагниченного цилиндра. Оно объясняется вихревой структурой термомагнитных потоков, распространяющихся в радиальном направлении на расстояние порядка диаметра цилиндра. Такое течение препятствует формированию на поверхности цилиндра теплового пограничного слоя с однонаправленным (азимутальным) течением, необходимого для интенсификации конвективного теплообмена. В численном моделировании [59] вихревые течения хорошо визуализированы на примере термомагнитной конвекции вокруг эллип-

тического проводника с током. При замене проводника цилиндром с большой магнитной проницаемостью, все же удаётся достигнуть увеличения интенсивности теплообмена в 2–4 раза, однако для этого требуется наложение сильного магнитного поля ( $Ra_m \sim 10^5$ ).

Ситуация качественно меняется при термомагнитной конвекции в конвективной петле (гидродинамическом контуре), если поперечные размеры трубы, образующей петлю будут достаточно малы. Малой должна быть и неоднородность магнитного поля в поперечном сечении трубки. В этой ситуации радиальное течение становится невозможным, а осевая компонента ponderomotive силы (1.2) будет сонаправлена с силами плавучести и приведёт к интенсификации теплообмена. Нагреватель и источник магнитного поля должны быть расположены на одном вертикальном участке контура. В работах [60–70] конвективная петля рассматривается как простейший вариант охлаждающего устройства, в котором циркулирующая феррожидкость непрерывно переносит тепло от нагревателя к холодильнику. Эти работы демонстрируют одновременно, как прикладную перспективность конвективной петли с феррожидкостью, так и высокую чувствительность интенсивности теплообмена к большому числу параметров задачи. Речь идёт о выборе дисперсионной среды и материала наночастиц [68], ориентации и месте приложения магнитного поля [60; 61; 67], агрегировании частиц в феррожидкости [71], их оседании на стенках канала и так далее.

Эта чувствительность, вероятно, является причиной большого разброса данных, касающихся интенсификации теплообмена за счёт термомагнитной конвекции в замкнутом контуре. Так, в [65] конвективная петля служила для отвода тепла от электронного чипа. Включение термомагнитной конвекции снизило температуру его поверхности на  $10^\circ\text{C}$ . Моделирование [67] предсказывает увеличение скорости потока феррожидкости в петле на 100% при добавлении дополнительного источника магнитного поля, и дополнительных нагревателя и холодильника. В работе [66] предсказывается четырёхкратное усиление эффективности теплообмена, при наложении поля многослойной катушки на нагреваемый участок конвективной петли прямоугольной формы, заполненной феррожидкостью. Наконец, в статье [70] конвективная петля с феррожидкостью снижает температуру мощного светодиода приблизительно на  $100^\circ\text{C}$ .

Сама по себе конвективная петля является хорошо изученным модельным объектом для исследования конвективных течений. Термогравитационной

конвекции немагнитного теплоносителя в этой системе посвящено множество работ, направленных на изучение устойчивости механического равновесия и ламинарного течения, хаотических режимов, валидации математических моделей систем охлаждения и прочего [72—77]. Все эти многочисленные проблемы здесь не рассматриваются.

Внимание в диссертационной работе сфокусировано на интегральных характеристиках течения: объёмном расходе через поперечное сечение канала и тепловом потоке вдоль контура в режиме стационарной тепловой конвекции.

## 1.2 Свойства магнитной жидкости

### 1.2.1 Гранулометрический состав

Интенсивность термомагнитной конвекции, как следует из (1.3), определяется тем, какую намагниченность приобретает феррожидкость во внешнем магнитном поле. Намагниченность жидкости зависит от концентрации магнитных наночастиц  $n$  и их магнитных моментов  $m$ . В каждом конкретном образце феррожидкости в разных долях присутствуют частицы разных размеров и, следовательно, обладающие различными размерами их магнитных ядер  $x$ . Эта полидисперсность приводит к различию магнитных моментов частиц, которое непосредственно влияет на зависимость намагниченности образца  $M$  от напряжённости поля  $H$  [78; 79]. В этой связи важна информация о распределении наночастиц магнитного коллоида по размерам — его гранулометрический состав. В главе 4 будут показаны существенные отличия конвективного течения феррожидкостей с различным дисперсным составом при воздействии магнитного поля большой напряжённости.

Магнитные моменты квазисферических частиц магнитной жидкости и распределение последних по диаметрам их магнитных ядер вычисляются путём магнитогранулометрического анализа экспериментальной кривой намагничивания  $M(H)$  [80]. Намагниченность феррожидкости измеряется методом дифференциальной прогонки [81], при котором непосредственному измерению подлежит дифференциальная магнитная восприимчивость  $\chi(H) = (\partial M / \partial H)$ , а

кривая намагничивания (например, рис. 3.3) строится путём численного интегрирования:

$$M(H) = \int_0^H \chi(H') dH'.$$

Под  $H$  подразумевается напряжённость магнитного поля непосредственно в исследуемом образце. Распределение частиц по диаметрам магнитных ядер  $x$  аппроксимируется гамма-распределением:

$$f(x) = \frac{x^\sigma \exp\left(-\frac{x}{x_0}\right)}{x_0^{\sigma+1} \Gamma(\sigma+1)}, \quad (1.4)$$

которое многократно использовалось ранее в исследованиях магнитных жидкостей [82; 83]. Здесь  $\Gamma(\dots)$  — гамма функция [84],  $x_0$  и  $\sigma$  — параметры распределения, определяемые по начальному участку кривой намагничивания и её асимптотике в сильных полях. Так, намагниченность насыщения раствора  $M_\infty = n\langle m \rangle$  пропорциональна величине среднего магнитного момента частиц  $\langle m \rangle$ . В сильном поле  $H \rightarrow \infty$  экспериментальная кривая намагничивания аппроксимируется зависимостью

$$M(H) = M_\infty - \frac{nk_B T_0}{\mu_0 (H + M/3)}, \quad (1.5)$$

где  $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана [31],  $T_0$  — абсолютная температура. Начальная восприимчивость  $\chi_0 = \chi(H \rightarrow 0)$  определяется средним квадратом магнитного момента  $\langle m^2 \rangle$  [85]. Согласно [86]:

$$\chi_0 = \chi_L \left( 1 + \frac{\chi_L}{3} + \frac{\chi_L^2}{144} \right), \quad \chi_L = \frac{\mu_0 \langle m^2 \rangle n}{3k_B T_0}, \quad (1.6)$$

$\chi_L$  — ланжевеновская восприимчивость. Формулы (1.5; 1.6) позволяют вычислить  $n$ ,  $\langle m \rangle$  и  $\langle m^2 \rangle$ . Параметры распределения (1.4) находятся путём численного решения уравнений:

$$\frac{\langle m^2 \rangle}{\langle m \rangle^2} = \frac{(\sigma+5)^3 - \sigma - 5}{(\sigma+2)^3 - \sigma - 2},$$

$$x_0^3 = \frac{6\langle m \rangle}{\pi M_s (\sigma+1)(\sigma+2)(\sigma+3)},$$

где  $M_s$  — намагниченность материала магнитного ядра частиц. Для магнетита  $M_s = 480$  кА/м [80; 87; 88].

## 1.2.2 Теплофизические свойства

В рамках задач о конвективном переносе тепла жидкостью наиболее интересны её теплофизические свойства и динамическая вязкость, которые входят в тепловое и магнитное числа Рэлея (1.1; 1.3). По измеренной пикнометром плотности раствора  $\rho$  рассчитывается объёмная доля частиц без учёта оболочки из молекул поверхностно-активного вещества

$$\varphi_s = \frac{\rho - \rho_b}{\rho_s - \rho_b}, \quad (1.7)$$

где  $\rho_b$ ,  $\rho_s$  — плотности жидкости-носителя и материала частиц соответственно. В случае использованных в работе магнитных жидкостей типа «магнетит-керосин-олеиновая кислота» пренебрежение наличием защитных оболочек оправдано тем, что плотность олеиновой кислоты  $\rho_h \approx 0,9$  г/см<sup>3</sup> [32] мало отличается от плотности осветительного керосина  $\rho_b = 0,780$  г/см<sup>3</sup>. Для сравнения, плотность кристаллического магнетита  $\rho_s = 5,17$  г/см<sup>3</sup> [88].

Теплоёмкость единицы массы (удельная теплоёмкость) магнитной жидкости рассчитывается по формуле, отражающей аддитивность теплоёмкостей её компонентов [12]:

$$c = \frac{c_b \rho_b (1 - \varphi_s) + c_s \rho_s \varphi_s}{\rho}, \quad (1.8)$$

где  $c_b = 2,0$  кДж/(кг · К) — удельная теплоёмкость носителя (керосина) [89; 90],  $c_s = 586,1$  Дж/(кг · К) — удельная теплоёмкость кристаллического магнетита [88]. Наличием молекул олеиновой кислоты здесь так же пренебрегается, поскольку удельная теплоёмкость олеиновой кислоты  $c_h \approx 1,8$  кДж/(кг · К) [32] близка к теплоёмкости керосина.

Коэффициент теплопроводности феррожидкости  $\lambda$  вычисляется по формуле Максвелла, первоначально служившей для расчёта диэлектрической проницаемости эмульсий [91] и адаптированной для расчёта теплопроводности [12; 13; 92; 93]:

$$\lambda = \lambda_b \left[ 1 - \frac{3(\lambda_b - \lambda_s) \varphi_s}{2\lambda_b + \lambda_s + (\lambda_b - \lambda_s) \varphi_s} \right]. \quad (1.9)$$

Здесь  $\lambda_b = 0,11 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $\lambda_s = 5,3 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  [88; 89] — теплопроводность керосина и магнетита соответственно.

Использование этой формулы применительно к магнитным жидкостям требует некоторых пояснений. Во-первых, в (1.9) не учитывается наличие слоя поверхностно-активного вещества на поверхности частиц, тогда как теплопроводность олеиновой кислоты —  $\lambda_h = 0,23 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  [32], что вдвое больше теплопроводности керосина. Во-вторых, исходная формула Максвелла получена для слабоконцентрированных суспензий, тогда как в экспериментах (см. гл. 3) используются магнитные жидкости умеренных концентраций. В-третьих, не учитывается броуновское движение частиц, так же вносящее вклад в теплоперенос. Эти сомнения подробно обсуждаются в работах [94—97]. В обзорной статье [95], анализирующей свыше трёх десятков экспериментов с немагнитными коллоидами, несмотря на отмеченные выше упрощения, показано хорошее согласие результатов расчёта теплопроводности по формуле Максвелла с экспериментами. В [97] напротив, показано, что в случае коллоидов с немагнитными частицами оксидов металлов, формула (1.9) предсказывает меньшее значение теплопроводности по сравнению с экспериментом. В случае магнетитовых частиц [96] наблюдается согласие формулы (1.9) с экспериментом только в области объёмных концентраций 4—6 %. Несмотря на это, (1.9) использовалась во множестве работ, посвящённых тепловой конвекции феррожидкостей, среди которых [45; 58; 63].

В работе [98] методом регулярного режима была измерена температуропроводность  $a$  концентрированной ( $\varphi_s = 0,16$ ) магнитной жидкости на основе магнетита и н-ундекана. Авторы приводят результат измерений  $a = (1,08 \pm 0,06) \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ . В свою очередь, расчёт температуропроводности  $a = \lambda / (c\rho)$  с использованием (1.8), (1.9) и справочных данных из [89] дал значение  $1,13 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , попадающее в доверительный интервал. Это совпадение —

дополнительный аргумент в пользу применения формулы (1.9) для расчёта теплопроводности магнитной жидкости.

Еще одним важным параметром, влияющим на конвективное движение феррожидкости и непосредственно входящим в тепловое число Рэлея (1.1) является коэффициент объёмного теплового расширения феррожидкости  $\beta$ . При его вычислении пренебрегалось объёмным расширением магнетита, поскольку коэффициент его теплового расширения на два порядка меньше такового у керосина [90; 99]. Так же, пренебрегалось расширением оболочки из молекул олеиновой кислоты. Как указано в [100] эффективная длина молекул олеиновой кислоты на поверхности частиц максимальна и, следовательно, оболочка не способна к значительному тепловому расширению. По правилу смешения:

$$\beta = \beta_b (1 - \varphi_h), \quad (1.10)$$

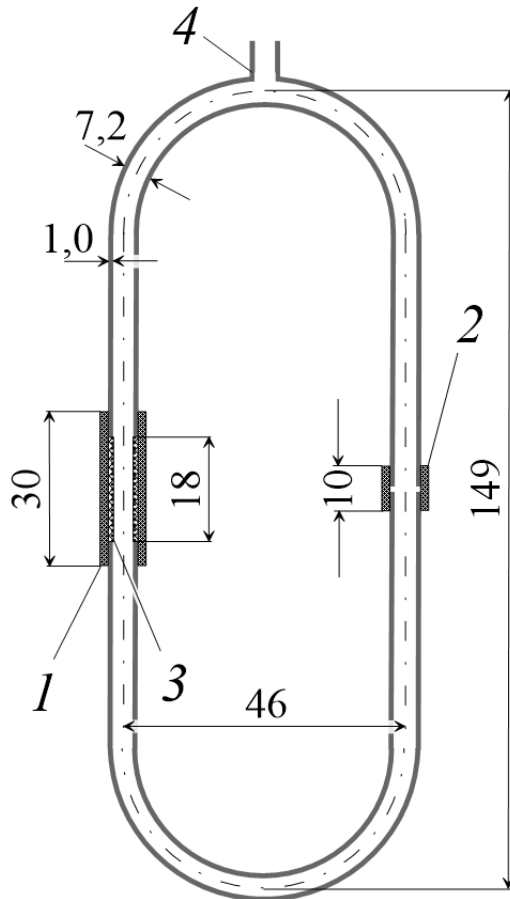
где  $\beta_b = 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  — коэффициент объёмного расширения керосина [89],  $\varphi_h$  — «гидродинамическая» объёмная доля частиц, с учётом оболочек из поверхностно-активного вещества. Отыскание последнего параметра производилось по результатам измерения динамической вязкости  $\eta$  магнитной жидкости в нулевом магнитном поле. Использовалась известная аппроксимация Чоу [101]:

$$\frac{\eta}{\eta_b} = \exp\left(\frac{2,5\varphi_h}{1 - \varphi_h}\right) + \frac{4,67\varphi_h^2}{1 - 4,67p\varphi_h^2}, \quad (1.11)$$

где  $p = 0,605$  — коэффициент плотной упаковки частиц [79; 102],  $\eta_b$  — динамическая вязкость жидкости-носителя, для осветительного керосина при  $27^\circ\text{C}$  равная  $1,04 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Искомое значение гидродинамической объёмной доли  $\varphi_h$  находилось численным решением уравнения (1.11).

## Глава 2. Аппаратурное оформление эксперимента и методика измерений

### 2.1 Описание установки



1, 2 — эбонитовые цилиндры, 3 — обмотка нагревателя, 4 — отвод.

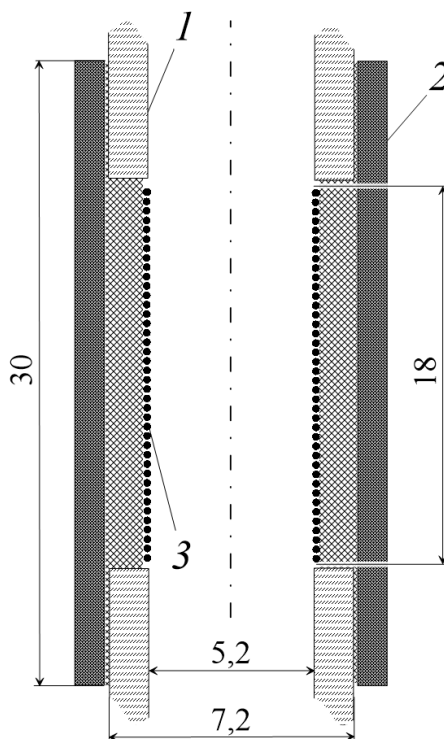
Рисунок 2.1 — Схема экспериментального гидродинамического контура. Размеры указаны в мм.

Эксперименты проводились в замкнутом гидродинамическом контуре (конвективной петле), изготовленном из боросиликатной стеклянной трубки круглого сечения с внутренним радиусом  $r_1 = (2,6 \pm 0,2)$  мм и внешним радиусом  $r_2 = (3,6 \pm 0,2)$  мм (рис. 2.1). Разброс размеров объясняется небольшой конусностью исходной прямой трубки и её деформацией при изготовлении криволинейных участков петли. Две U-образно изогнутых трубки скреплялись между собой при помощи тонкостенных эбонитовых цилиндров и склеивались эпоксидной смолой. Упрочнение соединения достигалось путём его прогрева до



60 °С в течение всего времени полимеризации смолы. Длина контура по оси трубки составила  $L = (35 \pm 2)$  см.

Внутри бóльшего эбонитового цилиндра располагался электрический нагреватель (рис. 2.2), обмотка которого наматывалась проводом ПЭВНХ (нихром) диаметром 0,09 мм и заливалась эпоксидной смолой. Толщина слоя смолы подбиралась таким образом, чтобы нагреватель плотно прилегал к стенкам эбонитового цилиндра, а его внутренний диаметр был равен внутреннему диаметру трубки. Для компенсации паразитных магнитных полей токов нагревателя, его обмотка выполнялась биффилярно. Сопротивление нагревателя при комнатной температуре составило 0,24 кОм. Для питания нагревателя использовался стабилизированный источник постоянного напряжения НУ3003D-2.

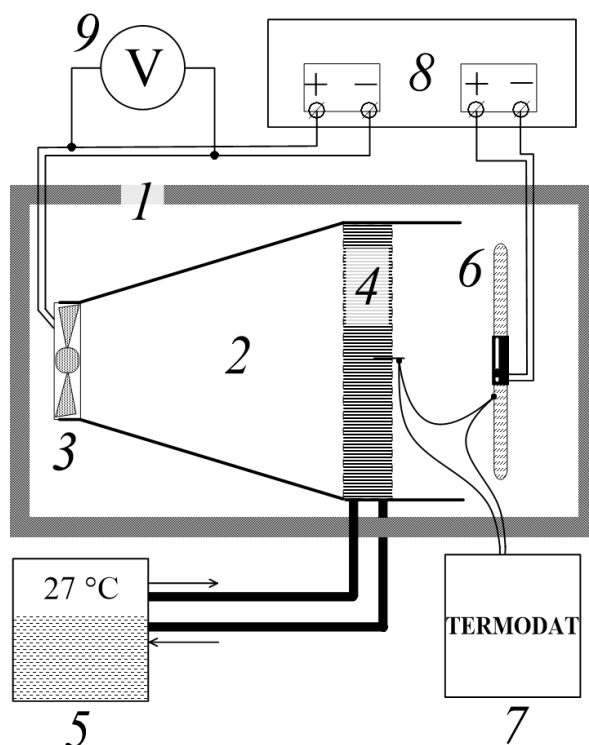


1 — стеклянная трубка контура, 2 — эбонитовый цилиндр, 3 — обмотка в слое эпоксидной смолы.

Рисунок 2.2 — Схема нагревателя в осевом сечении. Размеры указаны в мм.

Охлаждение контура осуществлялось по всей его длине без использования радиаторов путём обдува трубки контура воздухом. Стабилизация условий теплообмена и поддержание постоянства температуры охлаждающего воздуха осуществлялась за счёт размещения контура в камере воздушного термостата. Камера размерами 500 мм × 350 мм × 300 мм изготавливалась из листов экструзионного пенополистирола (рис. 2.3). Обдув трубки контура осуществлялся

при помощи системы из лопастного вентилятора, диффузора и теплообменника. Питание электродвигателя вентилятора осуществлялось от второго выхода источника НУ3003D-2. С целью поддержания постоянства скорости вращения вентилятора во всех сериях опытов напряжение на нём контролировалось вольтметром GDM-8246. Постоянство температуры воздуха в камере обеспечивалось прокачкой через теплообменник теплоносителя (ТОСОЛа) жидкостным термостатом Termex КРИО ВТ-12.

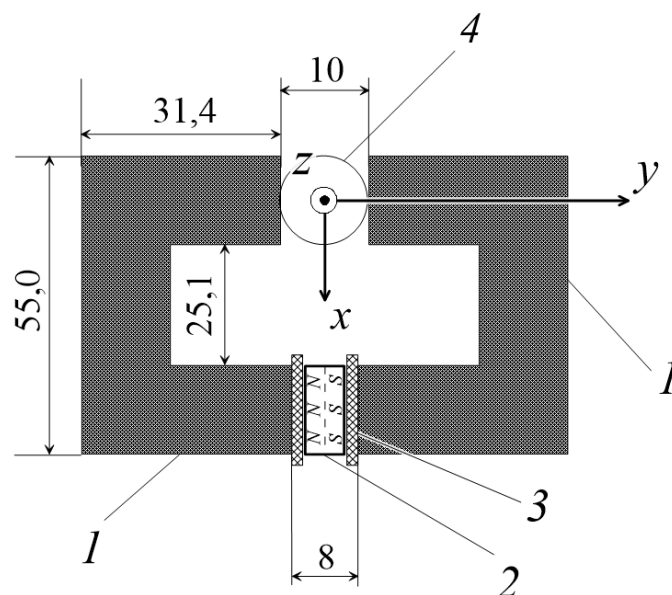


1 — теплоизолирующая камера, 2 — диффузор, 3 — вентилятор, 4 — теплообменник, 5 — жидкостный термостат Termex КРИО ВТ-12, 6 — экспериментальный контур, 7 — милливольтметр Termodat 25M6, 8 — источник постоянного напряжения, 9 — вольтметр GDM-8246.

Рисунок 2.3 — Схема экспериментальной установки.

Источником неоднородного магнитного поля служила намагничивающая система, состоящая из ферритового магнитопровода с плоскими полюсными наконечниками размерами  $14\text{ мм} \times 14\text{ мм}$  и дисковых постоянных аксиально-намагниченных магнитов типа «неодим-железо-бор N35» [103] (рис. 2.4). Магнитопровод жёстко фиксировался на толстой алюминиевой пластине при помощи немагнитного крепежа. Так исключалась неконтролируемая деформация магнитной системы. Горизонтальная  $H_y$  компонента напряжённости магнитного поля в средней части зазора, плоскости  $0xz$ , измерялась тесламером Ш1-15-У3.

Результаты измерений представлены на рисунке 2.5а. Амплитудное значение напряжённости, при наличии немагнитных прокладок (3 на рис. 2.4), составило 23 кА/м. Такая конфигурация источника магнитного поля использовалась в тестовых опытах. По результатам измерений, методом конечных разностей, рассчитывался градиент горизонтальной компоненты напряжённости (рис. 2.5б). Характерное значение градиента в месте размещения нагревателя по порядку величины составило  $10^6$  А/м<sup>2</sup>, что является типичным для используемых в технике ферритовых магнитов [104]. Фиксация намагничивающей системы на контуре осуществлялась при помощи алюминиевого штатива, не препятствующего потоку воздуха вокруг трубы контура. Магнитное поле охватывало область контура длиной около 30 мм вблизи нагревателя.



1 — ферритовый магнитопровод, 2 — постоянный магнит, 3 — немагнитные прокладки, служащие ослаблению магнитного потока, 4 — нагреваемый участок контура.

Рисунок 2.4 — Намагничивающая система в локальной системе координат, вид сверху. Размеры указаны в мм.

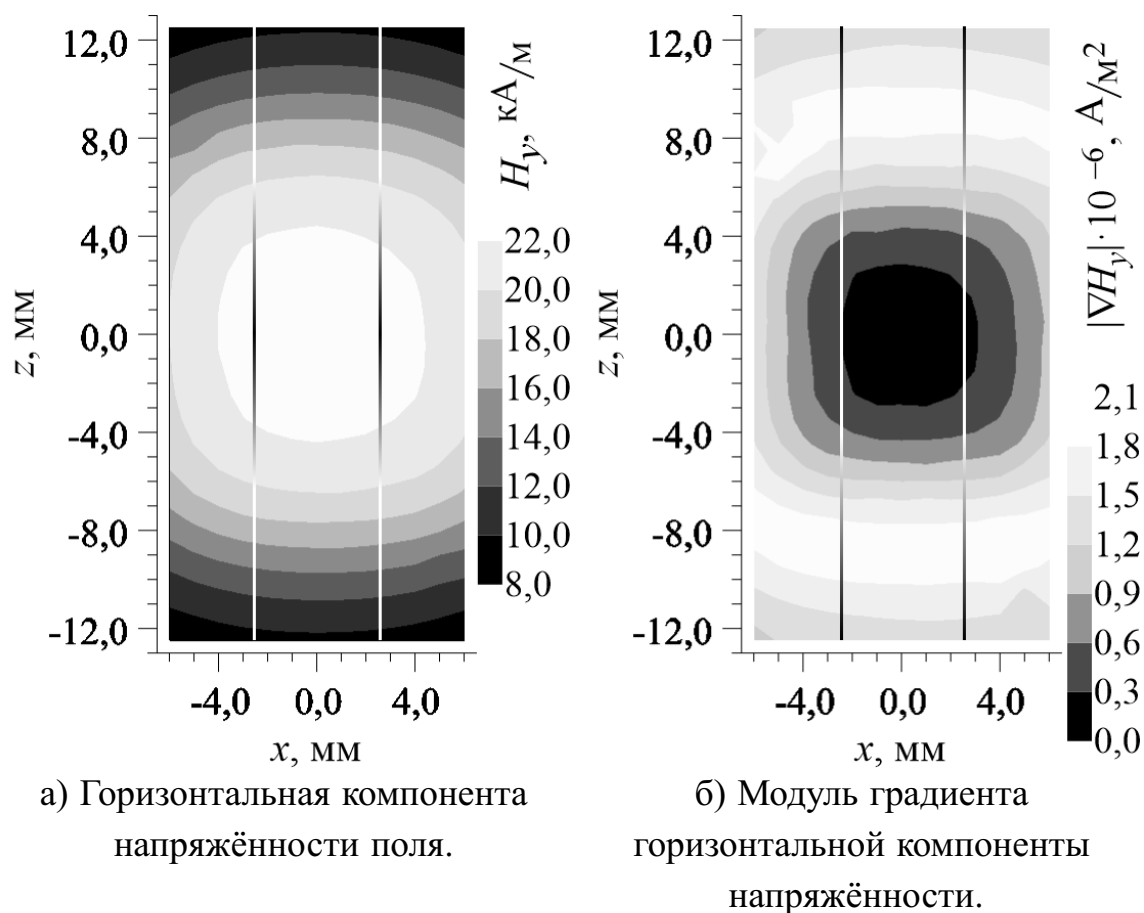
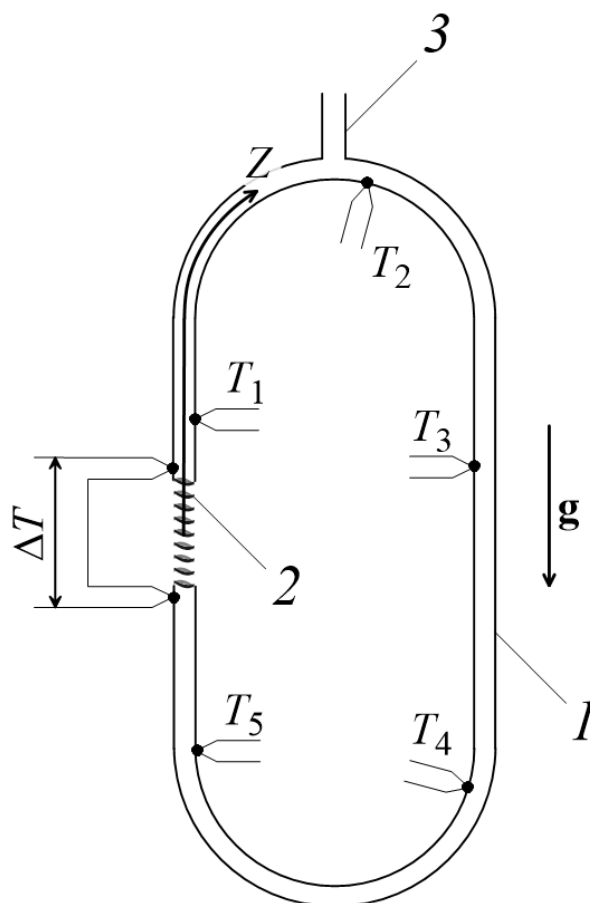


Рисунок 2.5 — Магнитное поле в рабочем зазоре намагничивающей системы. Контрастными вертикальными линиями показана внешняя граница жидкости в контуре.

Температурные измерения производились при помощи медь-константановых термопар с толщиной проводников 0,1 мм. Горячие спаи приклеивались к поверхности контура, а холодные были размещены вблизи радиатора и поддерживались при температуре охлаждающего воздуха (рис. 2.6). Для улучшения теплового контакта горячие спаи припаивались к пластинкам из медной фольги в форме полуцилиндров площадью 20–30 мм<sup>2</sup>, которые наклеивались на поверхность контура. Перепад температуры на контуре  $\Delta T$  измерялся дополнительной термопарой, горячий и холодный спаи которой находились на 5 мм выше и ниже нагревателя соответственно. Термо-ЭДС всех термопар измерялась многоканальным милливольтметром Termodat 25M6 и записывалась в энергонезависимую память устройства.



$1$  — трубка контура,  $2$  — нагреватель,  $3$  — отвод.

Рисунок 2.6 — Схема размещения спаев термопар на поверхности контура и система координат с началом в центре нагревателя.

## 2.2 Настройка измерителя температуры

Согласно руководству по эксплуатации [105] прибор Termodat 25M6 имеет класс точности 0,25. При использовании медь-константановых термопар верхний предел измерений —  $400\text{ }^\circ\text{C}$ . Таким образом, абсолютная приборная ошибка [106] составляет  $1\text{ }^\circ\text{C}$ . При этом максимальное разрешение прибора —  $0,1\text{ }^\circ\text{C}$ . Имеющаяся приборная погрешность слишком велика для конвективного эксперимента, поэтому, с целью её уменьшения, возникла необходимость внесения поправок к показаниям милливольтметра.

Для тарирования был использован поверенный лабораторный ртутный термометр ТЛ-4 с диапазоном измеряемых температур  $0,0\text{--}55,0\text{ }^\circ\text{C}$  и абсолютной ошибкой (цена деления шкалы)  $0,1\text{ }^\circ\text{C}$ . Горячий спай тарируемой термопары крепился к шарiku термометра, холодный помещался в сосуд с тающей ледяной крошкой. Термометр погружался в ванну водяного термостата, температура

воды в котором менялась ступенчато. Был получен набор показаний термометра  $T$  и не скорректированных показаний прибора Thermodat 25M6  $T^{(0)}$ . На рисунке 2.7 эти показания представлены в виде зависимости  $T(T^{(0)})$ . Все экспериментальные точки на рисунке легли выше прямой пропорциональности  $T = T^{(0)}$ , что свидетельствует о наличии систематической ошибки. Минимизация этой погрешности производилась путём внесения в настройки прибора линейной поправки:

$$\delta T^{(0)} = a + bT^{(0)}.$$

Ради наглядности, все иллюстрации в этом параграфе приведены для интервала температур, значительно более широкого ( $0-50\text{ }^\circ\text{C}$ ) нежели разности температур, достигаемые в эксперименте ( $\sim 0-10\text{ }^\circ\text{C}$ ). Так же, автор надеется, что пересечение буквенных обозначений коэффициентов с обозначениями физических величин в других частях работы не запутает читателя.

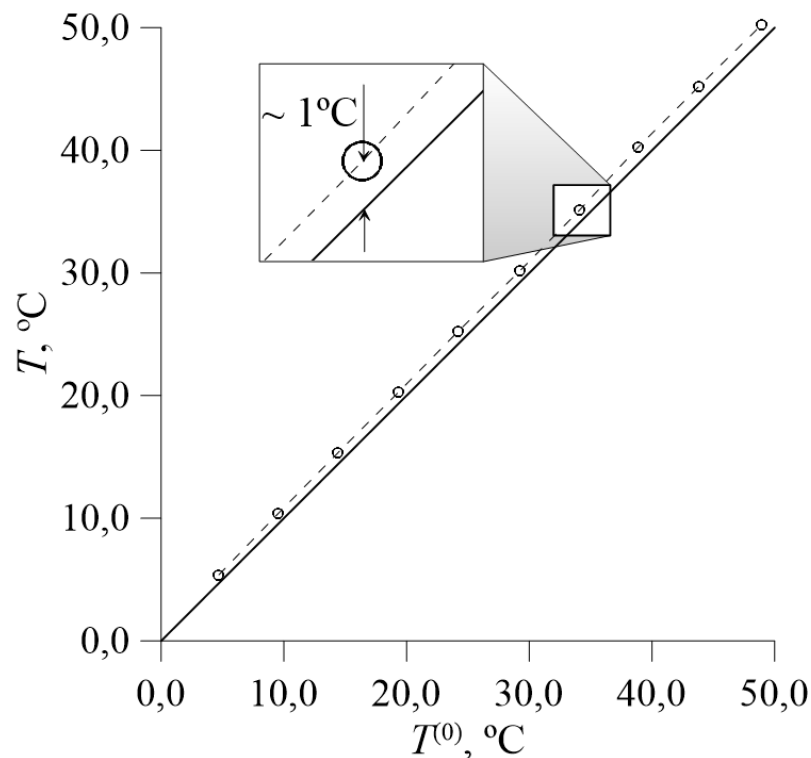


Рисунок 2.7 — Результаты измерения температуры поверенным ртутным термометром  $T$  в зависимости от показаний прибора Thermodat 25M6  $T^{(0)}$ . Символы соответствуют эксперименту. Сплошная толстая линия — прямая пропорциональность ( $T = T^{(0)}$ ).

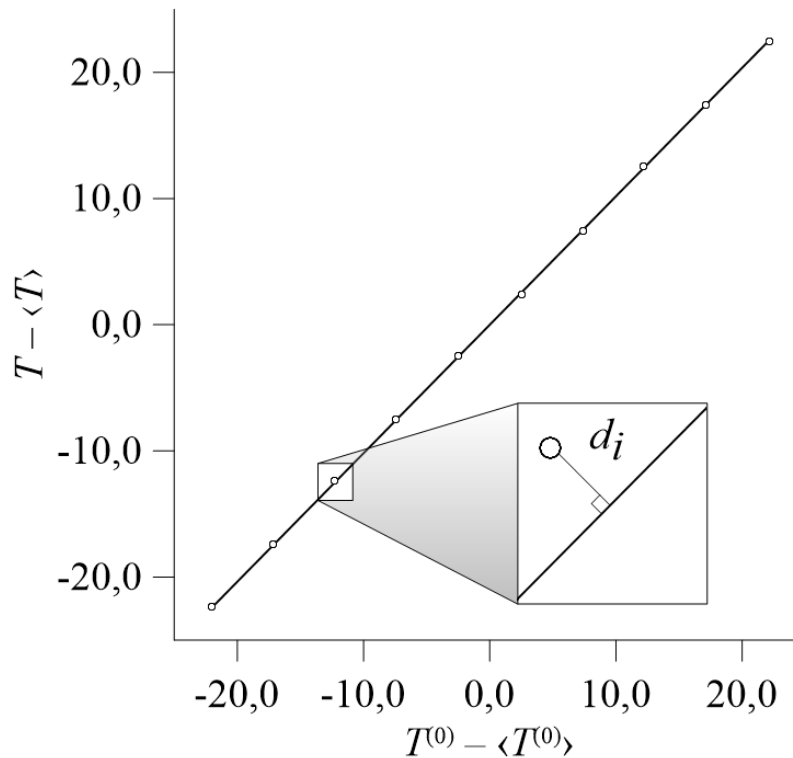


Рисунок 2.8 — Центрированные результаты измерений температуры поверенным термометром  $T$  в зависимости от центрированных показаний прибора Termodat 25M6  $T^{(0)}$ . Точки — эксперимент, аппроксимирующая прямая построена по методу наименьших квадратов.

Для нахождения поправочного углового коэффициента  $b$  значения  $T$  и  $T^{(0)}$  центрировались. Находились средние по всем  $N = 10$  (для примера на рис. 2.7) измерениям:

$$\langle T^{(0)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i T_i^{(0)}, \quad \langle T \rangle = \frac{1}{N} \sum_i T_i.$$

Центрированные значения  $T - \langle T \rangle$  откладывались по оси ординат в зависимости от  $T^{(0)} - \langle T^{(0)} \rangle$ . Поправочный коэффициент  $b$  находился путём аппроксимации полученной зависимости прямой пропорциональностью методом наименьших квадратов. В отличие от [106; 107] минимизировалась сумма квадратов расстояний ( $d_i$  на рис. 2.8) от экспериментальных точек до аппроксимирующей прямой. Такой подход позволил исключить ошибку, связанную с тем, что температура холодного спая может несколько отличаться от  $0^\circ\text{C}$  из-за неоднородности температуры в сосуде со льдом. Угловой коэффициент  $b = 0,018$  был найден из формул:

$$1 + b = \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4}}{2},$$

$$\zeta = \frac{\langle (T^{(0)} - \langle T^{(0)} \rangle)^2 \rangle - \langle (T - \langle T \rangle)^2 \rangle}{\langle (T^{(0)} - \langle T^{(0)} \rangle) (T - \langle T \rangle) \rangle},$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по всем  $N$  измерениям.

Коэффициент  $a = 0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$ , поправка нуля, был найден независимо. Для этого холодный и горячий спаи термопары одновременно размещались в ванне водяного термостата. После внесения поправок в настройки прибора разница показаний термометра ТЛ-4 и милливольтметра Termodat 25М6 не превысила  $\delta T = 0,2 \text{ } ^\circ\text{C}$  (рис. 2.9), что и было принято за приборную ошибку температурных измерений.

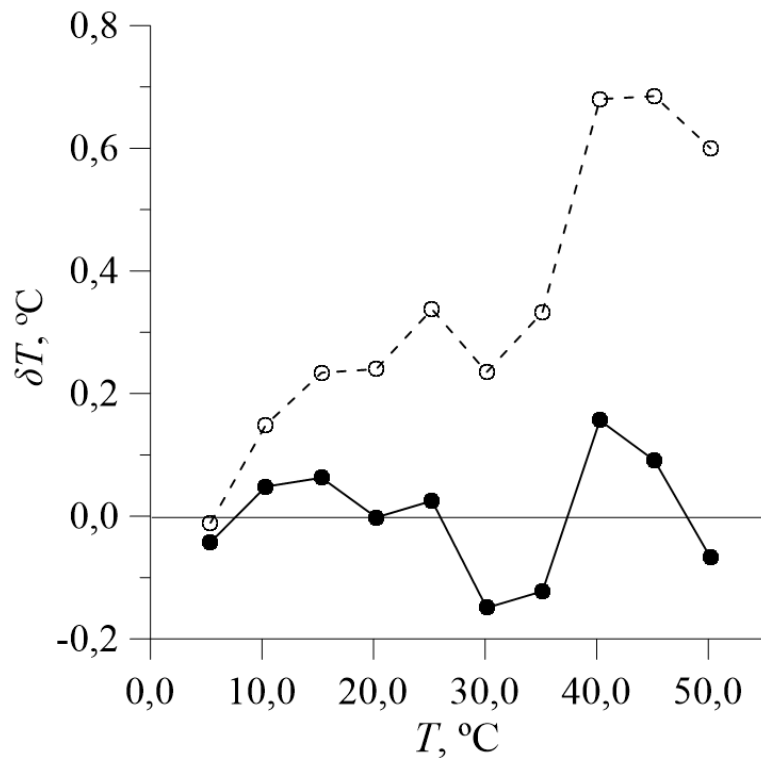
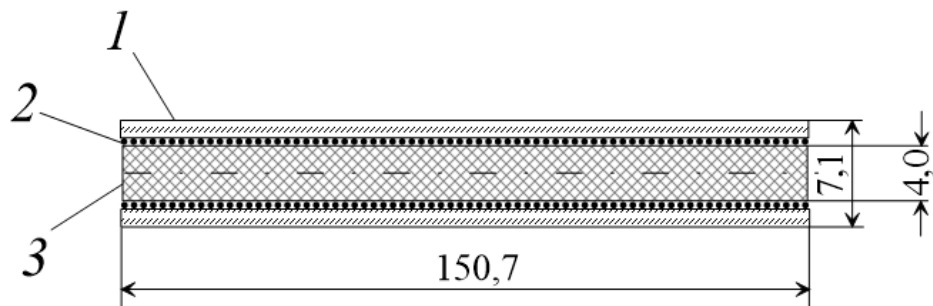


Рисунок 2.9 — Разница показаний термометра ТЛ-4 и прибора Thermodat 25М6 в зависимости от температуры. Светлые символы показывают ошибку до калибровки, тёмные — после.



### 2.3 Измерение коэффициента теплоотдачи

Проверка однородности условий теплообмена [108; 109] и измерение коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  в месте размещения контура производились в независимых опытах [1; 110]. Для этого из отрезка стеклянной трубки был изготовлен стержневой нагреватель, имитирующий часть контура. Внутри трубки клеивался однослойный соленоид, намотанный проводом ПЭВМ (манганин) диаметром 0,2 мм в один слой на пластиковом стержне (рис. 2.10). Выбор манганинового провода связан с его малым температурным коэффициентом сопротивления [90]. Конструкция нагревателя обеспечила постоянство погонной мощности нагрева вдоль всей трубки. Сопротивление нагревателя при комнатной температуре было измерено омметром GDM–8246 с ошибкой менее 1% и составило 152 Ом. Нагреватель питался постоянным током от источника НУ5003Е–2, выходное напряжение которого контролировалось вольтметром GDM–8246. Температура поверхности нагревателя  $T$  измерялась медь-константановыми термопарами, одинаковыми по конструкции с термопарами, используемыми на контуре. Горячие спаи термопар находились на поверхности нагревателя, холодные размещались в сосуде с тающим льдом. Температура охлаждающего воздуха  $T_0$  так же измерялась термопарой. Термо-ЭДС измерялась вольтметром Щ300. Шкала вольтметра градуировалась тем же способом, что и шкала Termodat 25M6 (§ 2.2). В результате, для температур близких к комнатной (20–40 °С) была получена линейная зависимость температуры  $T = 1,3\text{ °С} + 24,7\text{ °С/мВ} \times E$ , от термо-ЭДС  $E$  справедливая с ошибкой не более 0,3 °С.



1 — стеклянная трубка, 2 — манганиновый соленоид, 3 — пластиковый стержень.  
Рисунок 2.10 — Схема стержневого нагревателя в осевом разрезе. Размеры указаны в мм.

Нагреватель устанавливался в камеру воздушного термостата в плоскости размещения контура под различными углами к горизонту. Тем самым имитировался отвод тепла не только с вертикальных, но и с закруглённых участков конвективной петли. Коэффициент теплоотдачи вычислялся из установившейся разности температур  $T - T_0$  поверхности нагревателя и охлаждающего воздуха:

$$\alpha = \frac{P}{S(T - T_0)}, \quad (2.1)$$

$P$  — мощность нагревателя,  $S$  — площадь боковой поверхности трубки равная  $(33,4 \pm 0,2)$  см<sup>2</sup>. В формуле (2.1) теплообменом через торцы нагревателя пренебрегалось, поскольку их суммарная площадь примерно в 40 раз меньше площади боковой поверхности нагревателя.

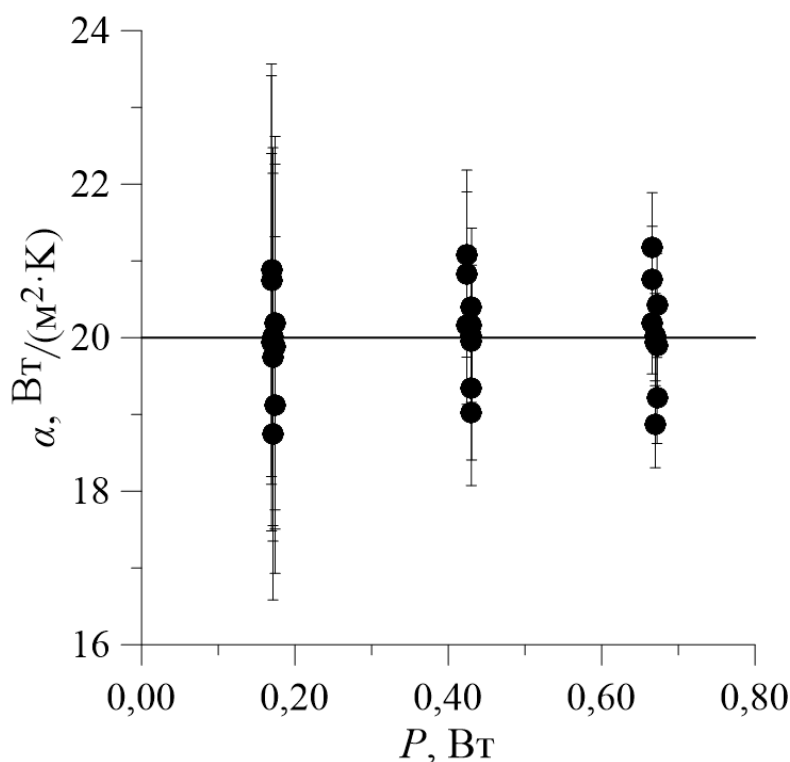


Рисунок 2.11 — Коэффициент теплоотдачи в зависимости от мощности стержневого нагревателя. Точки соответствуют эксперименту, сплошная линия — среднее значение.

Результаты измерений  $\alpha$  представлены на рис. 2.11 в зависимости от  $P$ . Планки на рисунке демонстрируют ошибку, связанную с погрешностью температурных измерений. Эта погрешность, тем больше, чем меньше мощность нагрева и соответственно установившаяся разность температур. Разброс

экспериментальных значений  $\alpha$ , по-видимому, обусловлен неодинаковостью коэффициента теплоотдачи в различных точках выходного сечения диффузора (см. рис. 2.3).

Как видно на рис. 2.11 доверительные интервалы пересекаются во всех сериях опытов. Усилия по дальнейшему улучшению ситуации с пространственной неоднородностью коэффициента теплоотдачи путём доработки воздушного термостата нецелесообразны. Такое улучшение не могло быть обнаружено из-за пределов точности имеющейся измерительной аппаратуры.

В результате усреднения экспериментальных данных (рис. 2.11) получено значение  $\alpha = (20 \pm 2) \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . Пространственная неоднородность коэффициента теплоотдачи в месте размещения контура не превысила 10 %.

## 2.4 Распределение температуры на охлаждаемом участке контура

### 2.4.1 Интегральное приближение

Получить информацию о распределении температуры вдоль охлаждаемого участка контура, достаточную для проведения эксперимента можно в рамках интегрального «гидравлического» приближения [5; 111–113]. Рассмотрим замкнутый контур (рис. 2.1), бóльшая часть поверхности которого охлаждается воздухом. Теплоотдача на поверхности происходит по закону Ньютона–Рихмана [108; 109; 114]. Плотность потока тепла с внешней поверхности равна  $\alpha(T - T_0)$ . Далее, температура охлаждающего воздуха  $T_0$  принимается за начало отсчёта.

Выделим произвольный малый элемент трубки (рис. 2.12) длиной  $\Delta z$  и введём локальную систему координат. Рассмотрим тепловые потоки  $\Phi$  через замкнутую поверхность, ограничивающую этот элемент. Осевая часть теплотока складывается из конвективного и молекулярных теплотоков через поперечные сечения  $z = z_1$  ( $\Phi_1$ ) и  $z = z_2$  ( $\Phi_2$ ):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \rho c q_V T(z_1) - \pi [\lambda r_1^2 + \lambda_w (r_2^2 - r_1^2)] \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=z_1}, \\ \Phi_2 &= \rho c q_V T(z_2) - \pi [\lambda r_1^2 + \lambda_w (r_2^2 - r_1^2)] \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=z_2}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

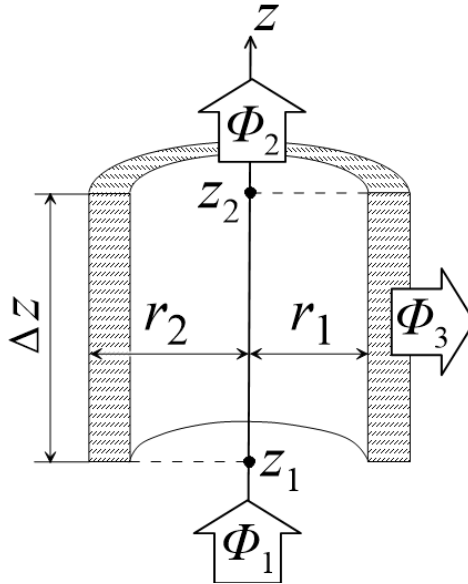


Рисунок 2.12 — Элемент трубки в локальной системе координат с указанием направления тепловых потоков.

Здесь  $\lambda_w = 1,1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  — коэффициент теплопроводности стекла [90],  $q_V$  — объёмный расход жидкости через поперечное сечение трубки. Для несжимаемой жидкости при стационарном течении  $q_V$  — постоянная величина.

Радиальный поток тепла можно определить через температурный градиент в стекле или через коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности контура:

$$\Phi_3 = -2\pi r_2 \lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_2} \Delta z = 2\pi r_2 \alpha T \Delta z. \quad (2.3)$$

При стационарном теплообмене выполняется баланс тепловых потоков:

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0. \quad (2.4)$$

Раскладывая температуру и её производную в (2.2) по малому  $\Delta z$ , получим:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = -\pi [\lambda r_1^2 + \lambda_w (r_2^2 - r_1^2)] \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Delta z + \rho c q_V \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z. \quad (2.5)$$

При интенсивной конвекции тепловое возмущение от нагревателя распространяется вдоль трубки на расстояния порядка длины контура  $L$ . Отношение молекулярных тепловых потоков в уравнениях (2.5) и (2.3) имеет порядок  $r_2 (r_2 - r_1) / L \ll$

1, и первым слагаемым в (2.5) можно пренебречь. Подставив (2.3; 2.5) в (2.4) получим уравнение, описывающее распределение температуры вдоль охлаждаемого участка контура:

$$\rho c q_V \frac{\partial T}{\partial z} + 2\pi r_2 \alpha T = 0.$$

Его решением является затухающая экспонента:

$$T \propto \exp\left(-\frac{kz}{L}\right), \quad k = \frac{2\pi r_2 L \alpha}{\rho c q_V}, \quad (2.6)$$

нормированный на длину контура показатель которой несёт информацию об интенсивности конвективного движения  $q_V \propto k^{-1}$ . Измеряя  $k$  в эксперименте можно рассчитать объёмный расход жидкости и, связанный с ним, конвективный тепловой поток вдоль контура.

#### 2.4.2 Модификация интегрального приближения. Поиск радиального перепада температуры

Строго говоря, различные слагаемые в уравнениях (2.2) и (2.3) содержат отличающиеся по смыслу температуры. Теплообмен на внешней поверхности трубки определяется её собственной температурой, а конвективный теплопоток вдоль контура — средней по потоку температурой жидкости. В (2.2; 2.3) пренебрегается этим различием. Погрешности, связанные с этим предположением, нуждаются в дополнительной оценке.

Воспользуемся цилиндрической системой координат (рис. 2.13). Ввиду протяжённости контура, скорость жидкости можно считать всюду параллельной стенкам трубки [29; 115]:  $\vec{v} = \{0, 0, v(r)\}$ . Профиль скорости аппроксимируем квадратичной параболой, как это сделано, например в [75].

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right), \quad (2.7)$$

где  $v_0$  — модуль скорости потока на оси трубки. Поле температуры  $T(r, z)$ , как и поле скорости, обладает осевой симметрией. Стационарное уравнение Фурье-Кирхгофа [27; 108; 109] в этом случае примет вид:

$$v(r) \frac{\partial T}{\partial z} = a \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]. \quad (2.8)$$

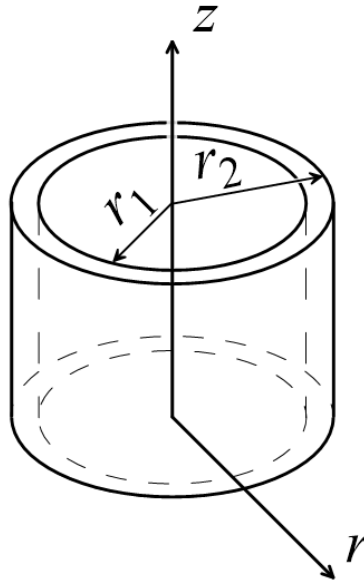


Рисунок 2.13 — Поперечное сечение трубки контура и локальная система координат.

В рамках эксперимента интерес представляет распределение температуры  $T = T(z)$  вдоль поверхности охлаждаемой части контура, то есть там, где расположены горячие спаи термопар (см. рис. 2.6).

Изложение приближенного метода решения уравнений (2.7; 2.8) начнём с предельного случая трубки с бесконечно тонкой стенкой  $r_2 = r_1$  и условием непрерывности теплового потока на границе:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \alpha T(r_1). \quad (2.9)$$

Для уменьшения количества параметров, входящих в уравнение (2.8), перейдём к безразмерным величинам. В качестве единицы измерения температуры используем перепад температуры на контуре  $\Delta T$ . Масштаб вдоль радиуса  $r$  — внутренний радиус трубки  $r_1$ , а масштаб продольной оси  $z$  — длина контура  $L$ . При таком выборе масштабов единицы измерения скорости  $aL/r_1^2$ , а объёмного расхода жидкости —  $aL$ .

Уравнение (2.8) с учётом (2.7) принимает вид:

$$U_0 (1 - R^2) \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + b^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2}, \quad (2.10)$$

где  $\Theta$  — безразмерная температура жидкости,  $R$  и  $Z$  — безразмерные радиальная и продольная координаты соответственно.  $U_0$  — безразмерная скорость течения на оси потока. Отметим, что  $b = r_1/L \ll 1$  — малый геометрический параметр, применительно к экспериментальной установке равный  $(7,4 \pm 0,7) \cdot 10^{-3}$ .

Используем метод Фурье [116; 117], и будем искать решение в виде затухающей экспоненты  $\Theta(R, Z) = \theta(R) \exp(-kZ)$ . Величина  $k$  имеет смысл обратного характерного расстояния, на которое конвекция переносит температурное возмущение вдоль контура. В эксперименте исследовались интенсивные течения, такие что  $k \sim 1$ . Второе слагаемое в правой части уравнения (2.10) соответствует молекулярному теплотокку вдоль трубки и, ввиду малости произведения  $b^2 k^2 \ll 1$ , может быть отброшено. Для удобства дальнейшего изложения заменим декремент  $k = \gamma^2/U_0$ .

Уравнение (2.10) после преобразований запишется в виде:

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dR} + \gamma^2\theta - \gamma^2 R^2\theta = 0. \quad (2.11)$$

Частное решение этого уравнения [4] (см. прил. А), конечное при  $R = 0$  и чётное относительно знака  $\gamma$  выражается через функцию Куммера:

$$\theta(R) = C M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 1, \gamma R^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma R^2\right). \quad (2.12)$$

Уточним, что функция Куммера  $M$  является решением вырожденного гипергеометрического уравнения [84; 118].  $C$  — постоянная интегрирования, определяемая из условия непрерывности температуры на концах нагреваемого участка.

Полученное решение должно удовлетворять условию (2.9), записанному в безразмерном виде

$$-\left. \frac{d\theta}{dR} \right|_{R=1} = \text{Bi}\theta(1), \quad (2.13)$$

где  $\text{Bi} = \alpha r_1/\lambda$  — число Био [109; 114].

Подстановка (2.12) в (2.13) даёт трансцендентное уравнение относительно параметра  $\gamma$ :

$$(\gamma - \text{Bi}) M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 1, \gamma\right) = \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{2}\right) M\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 2, \gamma\right). \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) имеет множество решений (см. табл. 1), поэтому поле безразмерной температуры жидкости в трубке формально описывается рядом:

$$\Theta = \sum_{i=0}^{\infty} C_i M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma_i, 1, \gamma_i R^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_i R^2\right) \exp(-k_i Z), \quad k_i = \frac{\gamma_i^2}{U_0}. \quad (2.15)$$

Таблица 1 — Наименьшие по модулю корни уравнения (2.14) при различных числах Био.

Bi	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
0,1	0,618	5,117	9,189	13,221
0,5	1,271	5,295	9,306	13,312
1,0	1,641	5,478	9,436	13,415
1,5	1,856	5,625	9,548	13,508

Интерес представляет слагаемое, соответствующее наименьшему по модулю значению  $\gamma_0$ , поскольку остальные быстро затухают с ростом  $Z$  вблизи торцов нагревателя и не вносят вклада в температурное поле вдоль большей части охлаждаемого участка контура. Более того, для больших  $\gamma_i$  несправедливым оказывается и утверждение  $b^2 k_i^2 \ll 1$ , поэтому их учёт не повышает точности решения уравнения теплопереноса. Таким образом, температура  $\Theta(R, Z)$  на охлаждаемом участке контура (рис. 2.14) хорошо описывается первым членом ряда (2.15):

$$\Theta \approx C M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 1, \gamma R^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma R^2\right) \exp(-kZ), \quad k = \frac{\gamma^2}{U_0}. \quad (2.16)$$

Здесь и далее индекс «0» у пространственного декремента затухания  $k$  и параметра  $\gamma$  опущен для краткости.

Учёт конечной толщины стенок трубки требует решения уравнения Лапласа [109; 116; 117], для температуры  $\Theta_w(R, Z)$  внутри стенки. Поиск решения в виде затухающей экспоненты  $\Theta_w(R, Z) = \theta_w(R) \exp(-kZ)$  позволяет свести  $\theta_w(R)$  к решению известной задачи о теплообмене через цилиндрический слой [108]. При этом пренебрегается слагаемым, содержащим малый множитель  $b^2 \ll 1$ .

$$\theta_w(R) = C_{w1} + C_{w2} \ln(R),$$



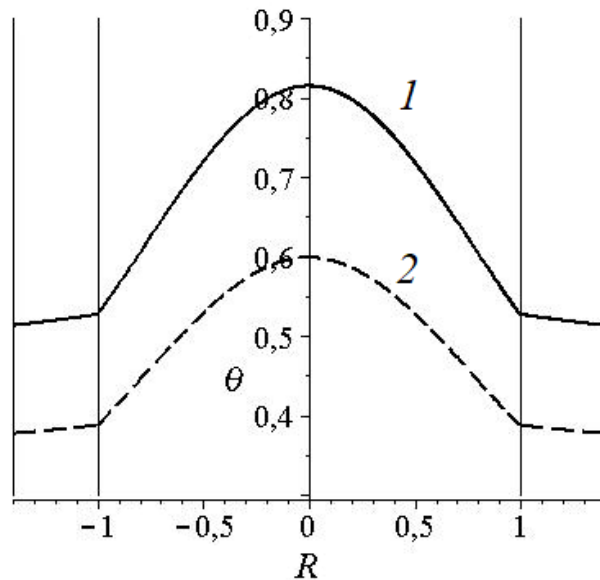


Рисунок 2.14 — Безразмерная температура в поперечном сечении трубки при  $U_0 = 2$ . Сплошная линия (1) соответствует  $Z = 0,2$ , штриховая (2) —  $Z = 0,5$ . Расчёт проведён при значении числа Био  $Bi = 0,5$  близком к экспериментальному. Вертикальными линиями показаны внутренняя и внешняя поверхности трубки.

где  $C_{w1}, C_{w2}$  — постоянные, а безразмерный радиус  $R$  пробегает значения от 1 до  $R_2 = r_2/r_1$ . Решение при  $R = 1$  сшивается с (2.12) посредством условий непрерывности температуры и теплового потока. Теплообмен на внешней поверхности трубки происходит по закону Ньютона–Рихмана [109].

$$\theta(1) = \theta_w(1), \quad -\varkappa \frac{d\theta}{dR} \Big|_{R=1} = -\frac{d\theta_w}{dR} \Big|_{R=1}, \quad -\frac{d\theta_w}{dR} \Big|_{R=R_2} = \varkappa Bi \theta_w(R_2),$$

где  $\varkappa = \lambda/\lambda_w \approx 0,1$  — отношение теплопроводности жидкости к теплопроводности стекла. После несложных преобразований, получаем граничное условие для температуры жидкости:

$$-\frac{d\theta}{dR} \Big|_{R=1} = \frac{Bi R_2}{1 + \varkappa Bi R_2 \ln(R_2)} \theta(1). \quad (2.17)$$

Применительно к условиям эксперимента  $R_2 = 1,4 \pm 0,1$ , и  $Bi \sim 1$ , поэтому

$$\frac{Bi R_2}{1 + \varkappa Bi R_2 \ln(R_2)} \approx Bi R_2.$$

Таким образом, учёт конечной толщины стенок трубки и её теплопроводности сводится к замене  $Bi$  на  $Bi R_2$  в уравнении (2.14).

По измеренному значению пространственного декремента затухания температурного возмущения  $k$  несложно вычислить безразмерную скорость на оси потока жидкости  $U_0 = \gamma^2/k$ . Следовательно, безразмерный расход жидкости через поперечное сечение канала имеет вид:

$$Q_V = 2\pi\gamma^2 k^{-1} \int_0^1 (1 - R^2) R dR = \frac{\pi\gamma^2}{2k},$$

а, выраженный в  $\text{м}^3/\text{с}$ , объёмный расход:

$$q_V = \frac{\pi\gamma^2 aL}{2k}, \quad (2.18)$$

при этом, выраженная в  $\text{м}/\text{с}$ , скорость на оси трубки контура:

$$v_0 = \frac{\gamma^2 aL}{r_1^2 k}. \quad (2.19)$$

Безразмерный тепловой поток — число Нуссельта [30] определим как отношение конвективного теплового потока вдоль трубки к молекулярному тепловому потоку без учёта тепловых потоков внутри стенок. Учитывая параболическую аппроксимацию профиля скорости (2.7), имеем:

$$\text{Nu} = \frac{\int_0^1 U_0 (1 - R^2) \Theta(R, Z) R dR}{-b^2 \int_0^1 \frac{\partial \Theta(R, Z)}{\partial Z} R dR}.$$

Используя (2.12) и (2.16), получим удобную для анализа экспериментальных результатов формулу:

$$\text{Nu} = \frac{A_\gamma}{b^2 k^2}, \quad (2.20)$$

где  $A_\gamma$  — безразмерный коэффициент порядка единицы, зависящий от свойств жидкости и коэффициента теплоотдачи. Экспоненциальные множители  $\exp(-kZ)$ , описывающие затухание температурного возмущения вдоль контура (2.16) здесь сокращаются. Безразмерный тепловой поток  $\text{Nu}$  одинаков в любом поперечном сечении охлаждаемой части контура, за исключением областей вблизи входного и выходного сечения нагревателя. Поиск  $A_\gamma$  производился численным интегрированием:

$$A_\gamma = \frac{\int_0^1 \gamma^2 (1 - R^2) \theta(R) R dR}{\int_0^1 \theta(R) R dR}. \quad (2.21)$$

Как видно из (2.20), число Нуссельта на охлаждаемом участке контура обратно-пропорционально квадрату пространственного декремента затухания  $k$  температурного возмущения. Таким образом, зависимость числа Нуссельта (2.20) от теплового числа Рэлея (1.1) для одного и того же образца жидкости с точностью до постоянных множителей эквивалентна зависимости  $k^{-2}(\Delta T)$ , измеряемой в эксперименте. В результате, о влиянии магнитного поля на интенсивность переноса тепла магнитной жидкостью можно судить, не имея информации о свойствах этой жидкости.

### 2.4.3 Упрощенные формулы для расчёта скорости потока, расхода жидкости и числа Нуссельта

Точное решение уравнения (2.11) в виде суперпозиции функций Куммера довольно громоздко, а так же не позволяет получить простые аналитические формулы для обработки экспериментальных данных. Эта ситуация делает более привлекательным, предложенное д-р. физ.-мат. наук, проф. А. Ф. Пшеничниковым в [3] приближённое решение методом Галёркина [119] с использованием единственной базисной функции:

$$\theta(R) = \theta_1 + (\theta_0 - \theta_1) (1 - R^2), \quad (2.22)$$

где  $\theta_0$  и  $\theta_1$  — безразмерная температура на оси канала и на его внутренней стенке соответственно. Подстановка (2.22) в уравнение (2.11) даёт невязку:

$$\delta(R) = -4(\theta_0 - \theta_1) + \gamma^2 (1 - R^2) [\theta_1 + (\theta_0 - \theta_1) (1 - R^2)],$$

а условие ортогональности базисной функции к невязке,

$$\int_0^1 \theta(R) \delta(R) R dR = 0,$$

определяет коэффициент  $\gamma$ :

$$\gamma^2 = \frac{24(\theta_0^2 - \theta_1^2)}{2\theta_0^2 + (\theta_0 + \theta_1)^2}.$$

В свою очередь, подстановка (2.22) в учитывающее конечную толщину стенки граничное условие (2.17) даёт отношение между неизвестными температурами

$$\theta_0 \approx \left(1 + \frac{\text{Bi}R_2}{2}\right) \theta_1. \quad (2.23)$$

С использованием которого зависимость  $\gamma^2$  от числа Био и толщины стенок трубки примет вид:

$$\gamma^2 \approx \frac{6\text{Bi}R_2(4 + \text{Bi}R_2)}{6 + 4\text{Bi}R_2 + 0,75\text{Bi}^2R_2^2}. \quad (2.24)$$

Этот результат позволяет пользоваться формулами (2.18; 2.19) при анализе результатов эксперимента. Не представляет затруднений получить и приближённую формулу для числа Нуссельта (2.20), подставив (2.22) и (2.24) в (2.21):

$$\text{Nu} = \frac{4\text{Bi}R_2(3 + \text{Bi}R_2)}{b^2k^2(6 + 4\text{Bi}R_2 + 0,75\text{Bi}^2R_2^2)}. \quad (2.25)$$

Приближённая формула (2.25) в области чисел Био  $\text{Bi} \sim 1$  завышает число Нуссельта на 1–3% в сравнении с (2.20), что, как будет выяснено далее, пренебрежимо мало в сравнении с обнаруженными эффектами (усилением теплопереноса в магнитном поле в 2–4 раза).

Наконец, оценим погрешность, допускаемую при использовании интегрального приближения (п. 2.4.1) для анализа распределения температуры вдоль контура. Подстановка формулы для объёмного расхода (2.18) в (2.6) после простых преобразований даст значение  $\gamma^2 = 4\text{Bi}R_2$ , что на 20–40% больше, чем результат расчёта  $\gamma^2$  по формуле (2.24). Эта ошибка приводит к систематическому завышению значений объёмного расхода жидкости через поперечное сечение трубки, вычисляемого по измеряемому показателю экспоненты  $k$  с использованием (2.6). Поэтому, при обработке экспериментальных данных использовались формулы из п. 2.4.2, а именно: (2.18), (2.19) и (2.20).

## 2.5 Тестовые опыты и измерение пространственного декремента затухания

С целью проверки справедливости экспоненциального распределения температуры вдоль охлаждаемого участка контура и отладки методики измерений были проведены тестовые опыты [1; 5; 110]. В качестве теплоносителя в контур был заправлен химически чистый *n*-ундекан. Каждый опыт начинался с установления температуры охлаждающего воздуха равной 27 °С. После установления теплового равновесия между контуром и охлаждающим воздухом включался нагреватель, мощность которого выбиралась в диапазоне 0,2–0,9 Вт и в течение опыта поддерживалась постоянной. Стационарное распределение температуры в контуре достигалось в течение  $\Delta t \approx 20$  мин после включения нагревателя. Пример установления стационарного режима теплообмена приведён на рис. 2.15. Небольшой «дребезг» термомпарных показаний связан, по-видимому, с дискретностью цифрового прибора Termodat 25М6. Признаком стационарного режима конвективного теплообмена служила неизменность показаний всех термомпар (рис. 2.6) в пределах 0,2 °С в течение не менее двух часов. Затем, для уменьшения влияния «дребезга», производилось накопление результатов измерений термо-ЭДС в течение 60 мин, снимаемых с интервалом 30 с, и их последующее усреднение. Во всех опытах среднеквадратичное отклонение температуры оказывалось пренебрежимо малым по сравнению с приборной  $\delta T = 0,2$  °С погрешностью, которая и принималась в итоге за ошибку температурных измерений. По полученным средним значениям строились профили температуры  $T_i = T(Z_i)$  вдоль охлаждаемого участка контура, где  $i = \overline{1 \dots 5}$  — номер термомпары. Типичные профили температуры для контура с *n*-ундеканом приведены на рис. 2.16 в полулогарифмическом масштабе. После получения стационарного температурного профиля нагреватель выключался. Далее опыт повторялся при другой мощности нагрева.

Температурные профили аппроксимировались затухающими экспонентами  $C \exp(-kZ)$  по методу наименьших квадратов [107] с весовыми коэффициентами. В качестве весов  $w_i = T_i/\delta T$  использовалась точность измерений. Введение весовых коэффициентов компенсирует зависимость относительной погрешности измерений от безразмерной продольной координаты  $Z$ . Для нахождения декремента  $k$  использовались формулы [107]:

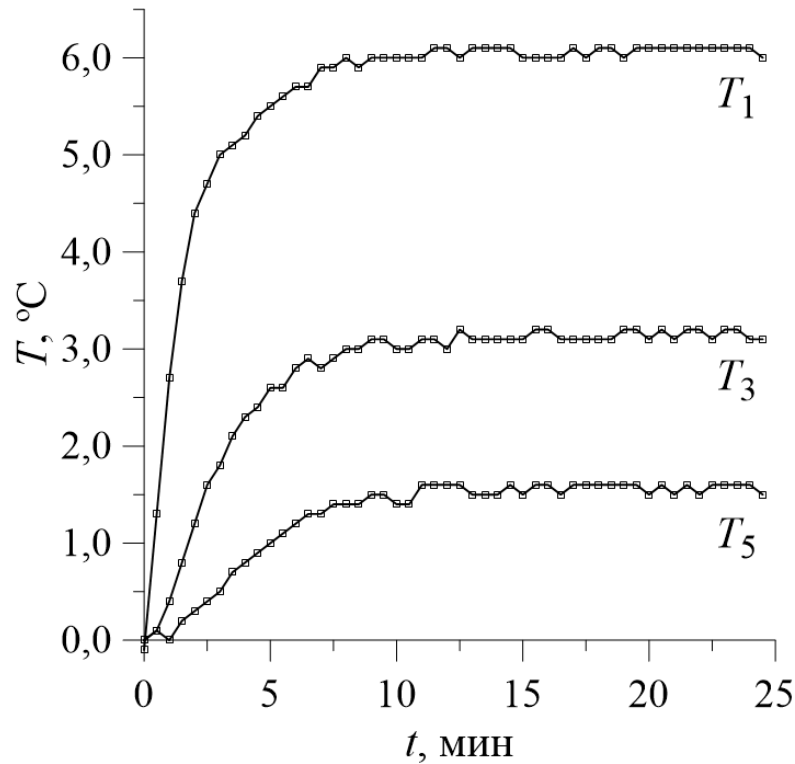


Рисунок 2.15 — Установление стационарного температурного режима в опытах с н-ундеканом.  $T_1, T_3, T_5$  — показания термопар (рис. 2.6), удалённых от середины нагревателя на  $z = 30; 160; 290$  мм соответственно в зависимости от времени работы нагревателя.

$$\langle Z \rangle = \frac{\sum_i w_i Z_i}{\sum_i w_i},$$

$$k = \frac{\sum_i w_i (Z_i - \langle Z \rangle) \ln(T_i)}{\sum_i w_i (Z_i - \langle Z \rangle)^2},$$

$$\delta k \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\sum_i (Z_i - \langle Z \rangle)^2}}{\sum_i w_i (Z_i - \langle Z \rangle)^2}.$$

Суммирование здесь ведётся по всем ( $i = \overline{1 \dots 5}$ ) спаям термопар. Для оценки абсолютной ошибки  $\delta k$  взят квадратный корень из дисперсии  $k$ . При этом температура  $T_i$  каждого горячего спая термопары рассматривалась как независимая случайная величина, равномерно распределённая в интервале  $(T_i - \delta T; T_i + \delta T)$ .

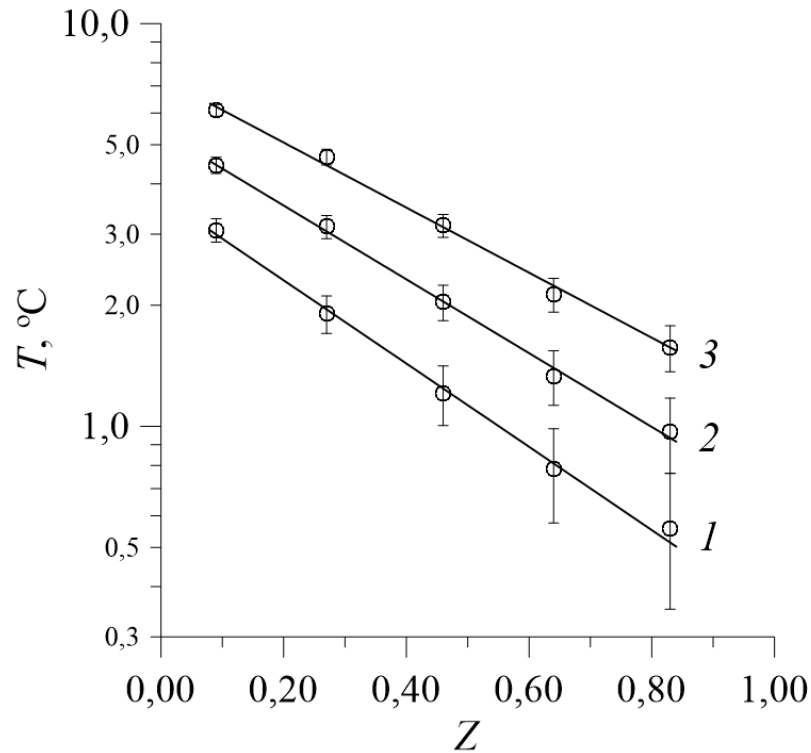


Рисунок 2.16 — Установившаяся температура вдоль охлаждаемого участка контура с н-ундеканом при различных перепадах температуры  $\Delta T$  на контуре 1 — 3,8 °C, 2 — 5,5 °C, 3 — 7,4 °C. Точки соответствуют эксперименту, сплошные линии — аппроксимации экспонентами.

Как видно из рисунка 2.16, аппроксимирующие кривые в пределах погрешности укладываются на экспериментальные точки. Это обстоятельство является ключевым аргументом в пользу формулы (2.20) для определения числа Нуссельта в опытах с конвективной петлёй. По результатам аппроксимации температурных профилей строилась зависимость  $k^{-2}(\Delta T)$  (рис. 2.17).

По результатам измерений оценивалось число Рейнольдса [27]  $Re = \rho v_0 r_1 / \eta$ , которое выражается через  $k$  формулой:

$$Re = \frac{\gamma^2}{bk Pr}.$$

Здесь  $Pr = \eta c / \lambda$  — число Прандтля, для н-ундекана равное 17. Оценки показали  $Re \sim 10$ , что говорит о ламинарном характере течения жидкости в контуре [120].

Дальнейшее тестирование методики измерений производилось с использованием образца магнитной жидкости типа «магнетит–керосин–олеиновая кислота» умеренной концентрации магнетита. Целью этих опытов являлась оценка перспектив дальнейшей экспериментальной работы по исследованию термомагнитной конвекции в замкнутом контуре.

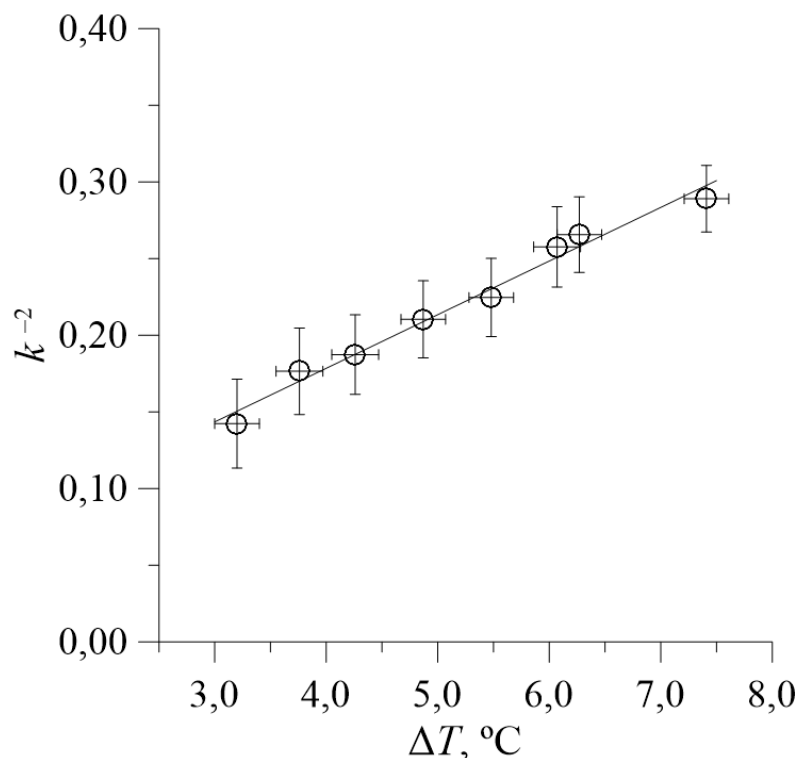


Рисунок 2.17 — Величина  $k^{-2}$  в зависимости от разности температур  $\Delta T$  на концах нагреваемого участка контура с н-ундеканом. Точки соответствуют эксперименту, линия тренда — линейная функция, служит повышению наглядности результатов.

Плотность образца феррожидкости измерялась пикнометром, вязкость — ротационным вискозиметром при комнатной температуре. Остальные параметры образца рассчитывались по формулам, представленным в главе 1 с использованием справочных данных [89; 90]. В таблице 2 эти свойства представлены в сравнении со свойствами н-ундекана.

Таблица 2 — Некоторые свойства образца магнитной жидкости в сравнении со свойствами н-ундекана.

	$\rho, \text{г/см}^3$	$\beta \cdot 10^3, \text{K}^{-1}$	$\lambda, \text{Вт/(м} \cdot \text{K)}$	$c, \text{кДж/(кг} \cdot \text{K)}$	$a \cdot 10^8, \text{м}^2/\text{с}$	$\eta, \text{мПа} \cdot \text{с}$
Ундекан	0,733	1,0	0,13	2,19	8,5	1,06
Магн. жидк.	1,13	0,65	0,14	1,49	8,1	2,2

Проведено две серии экспериментов. В первой неоднородное магнитное поле (рис. 2.5а) накладывалось на нагреваемый участок контура. Конвекция в этой ситуации вызвана совместно терромагнитным и гравитационным механизмом. Во второй серии опытов, магнитное поле выключалось и течение магнитной жидкости в контуре происходило только за счёт гравитационной



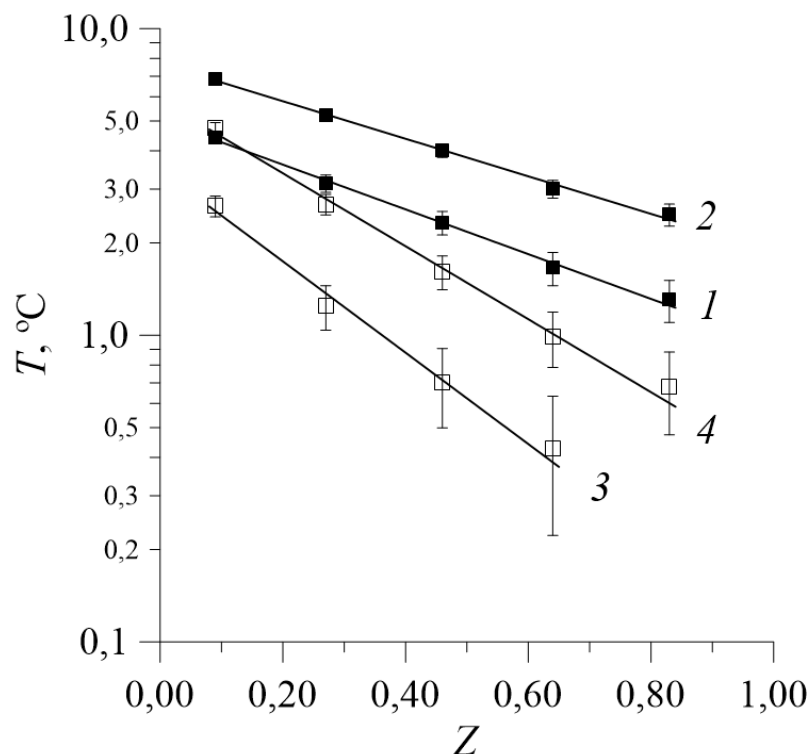


Рисунок 2.18 — Температура вдоль охлаждаемого участка контура с магнитной жидкостью при различных перепадах температуры  $\Delta T$  на нагревателе. В неоднородном магнитном поле 1 — 4,0 °C, 2 — 5,4 °C. В нулевом поле 3 — 3,3 °C, 4 — 5,8 °C. Точки соответствуют эксперименту, сплошные линии — аппроксимации экспонентами.

конвекции. Примеры стационарных профилей температуры вдоль контура с магнитной жидкостью представлены на рис. 2.18. Очевидно, что включение поля существенно уменьшает наклон температурного профиля, что свидетельствует об интенсификации теплопереноса за счёт термомагнитной конвекции. Зависимость обратного квадрата декремента затухания  $k^{-2}$  от перепада температуры  $\Delta T$  демонстрирует усиление теплового потока в 3–4 раза при включении неоднородного магнитного поля (рис. 2.19). Этот весьма значительный эффект показал перспективность дальнейшей работы по интенсификации теплообмена за счёт термомагнитной конвекции.

Результаты измерений (рис. 2.17 и 2.19) пересчитывались с использованием формул (1.1; 2.20) и представлялись точками на плоскости  $Nu(Ra)$ . Как и следовало ожидать, безразмерный осевой тепловой поток — число Нуссельта при включении термомагнитной конвекции превосходит теплоток в режиме только гравитационной конвекции (рис. 2.20). Результаты опытов с гравитационной конвекцией согласуются между собой, притягиваясь к одной универсальной для

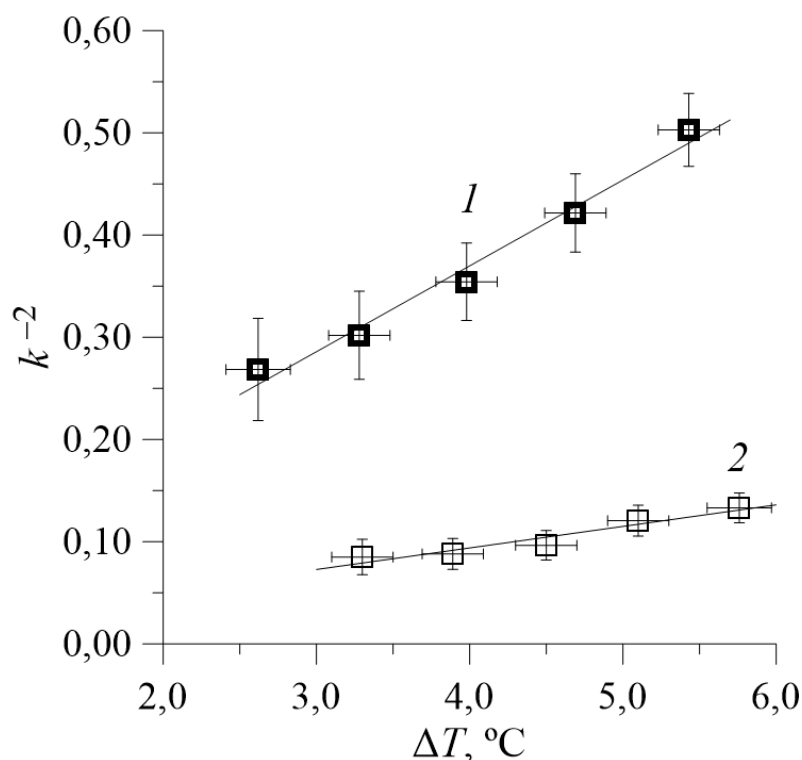


Рисунок 2.19 — Величина  $k^{-2}$  в зависимости от перепада температуры  $\Delta T$  на контуре с магнитной жидкостью. Точки 1 соответствуют опытам в неоднородном магнитном поле, 2 — опытам в нулевом поле.

н-ундекана и магнитной жидкости кривой. Отличие состоит в том, что менее вязкий ундекан при прочих равных условиях даёт бóльшие числа Рэлея. Наложение точек на одну универсальную кривую в пределах погрешности произошло даже не смотря на то, что не учитывалась довольно существенная зависимость вязкости жидкостей от температуры. Так же отметим, что планки на рисунке 2.20 демонстрируют лишь случайную погрешность измерений. Учёт систематических ошибок привёл бы к пропорциональному сдвигу всех экспериментальных кривых в ту или иную сторону, но не изменил бы их взаимного расположения.

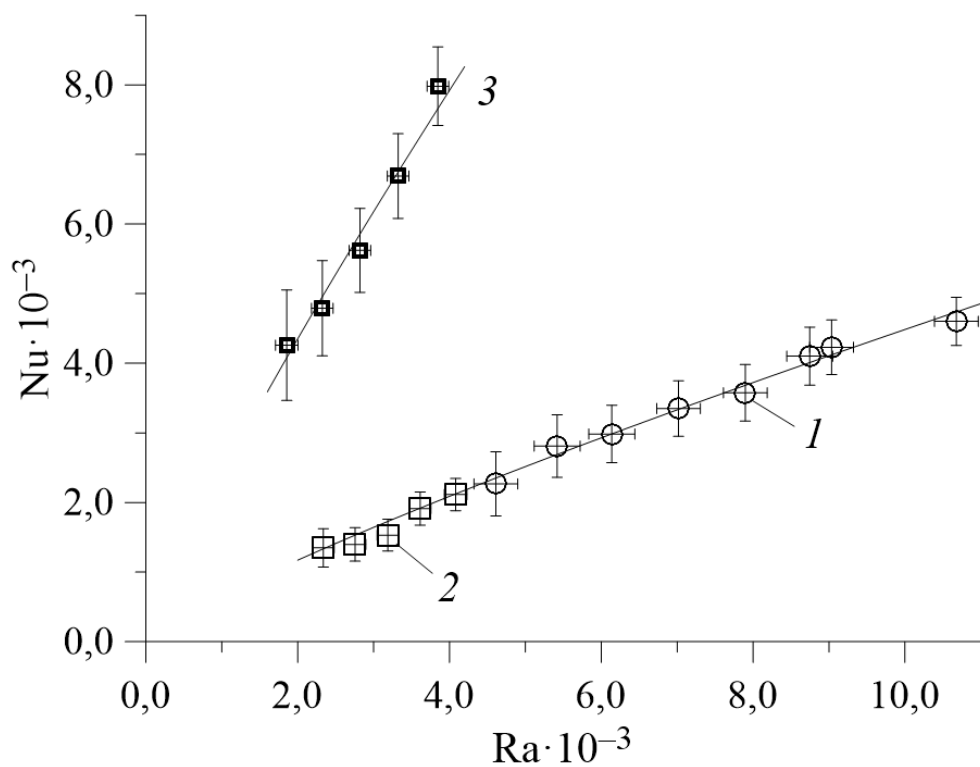


Рисунок 2.20 — Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэлея. *1* — опыты с ундеканом, *2* — опыты с магнитной жидкостью в нулевом магнитном поле, *3* — опыты с магнитной жидкостью в градиентном внешнем поле.

Линии тренда служат повышению наглядности результатов.

### Глава 3. Интенсификация теплообмена в магнитном поле

#### 3.1 Влияние концентрации магнитных наночастиц на интенсивность теплопереноса

В нижеследующей части работы поставлен и решён вопрос о поиске некоторой «оптимальной» концентрации магнитных частиц в магнитной жидкости [3; 121; 122]. Предельные случаи слабо- и сильноконцентрированных растворов исключались из рассмотрения. В случае малых концентраций магнитное число Рэлея (1.3) мало из-за малой намагничённости, а в пределе больших концентраций мало из-за высокой вязкости раствора.

Следуя этим соображениям для экспериментов приготавливались образцы феррожидкостей умеренных концентраций. Было подготовлено четыре образца, различающихся концентрацией, но с одинаковым распределением частиц по размерам. Образцы были получены путём разбавления осветительным керосином базовой концентрированной магнитной жидкости типа «магнетит–керосин–олеиновая кислота». Коллоидный магнетит для базового образца синтезирован стандартным методом химического осаждения [9; 11; 12]. Для предотвращения коагуляции и выпадения раствора в осадок при разбавлении вносился небольшой избыток олеиновой кислоты. После приготовления растворы тщательно перемешивались и выстаивались при комнатной температуре не менее 60 суток. После выстаивания осадка в образцах не обнаружилось. Плотность образцов после отстаивания и повторного перемешивания измерялась пикнометром при комнатной температуре. Остальные теплофизические параметры рассчитывались по формулам из гл. 1. Физические свойства образцов приведены в таблице 3 в сравнении со свойствами чистого керосина [89].

Динамическая вязкость образцов жидкостей в нулевом магнитном поле измерялась ротационным вискозиметром Anton Paar в диапазоне температур 25–42 °С (рис. 3.1). Экспериментальные значения  $\eta$  в зависимости от температуры  $T$  аппроксимировались приближением типа Аррениуса [123] по методу наименьших квадратов. Реологические кривые (рис. 3.2), полученные при 27 °С демонстрируют ньютоновское поведение магнитных жидкостей во всем диапазоне концентраций и скоростей сдвига.

Таблица 3 — Теплофизические свойства образцов магнитной жидкости в сравнении со свойствами керосина при комнатной (25 °C) температуре.

	$\rho, \text{г/см}^3$	$\varphi_s$	$\beta \cdot 10^3, \text{K}^{-1}$	$\lambda, \text{Вт/(м} \cdot \text{K)}$	$c, \text{кДж/(кг} \cdot \text{K)}$	$a \cdot 10^8, \text{м}^2/\text{с}$	$\eta, \text{мПа} \cdot \text{с}$
Керос.	0,78	0,000	0,88	0,11	2,0	7,0	1,07
Обр. 1	0,96	0,040	0,73	0,12	1,7	7,6	1,63
Обр. 2	1,05	0,061	0,64	0,13	1,6	7,9	2,26
Обр. 3	1,13	0,078	0,60	0,14	1,5	8,1	2,72
Обр. 4	1,22	0,100	0,55	0,14	1,4	8,4	3,74
Базов.	1,45	0,151	—	0,16	1,2	9,2	—

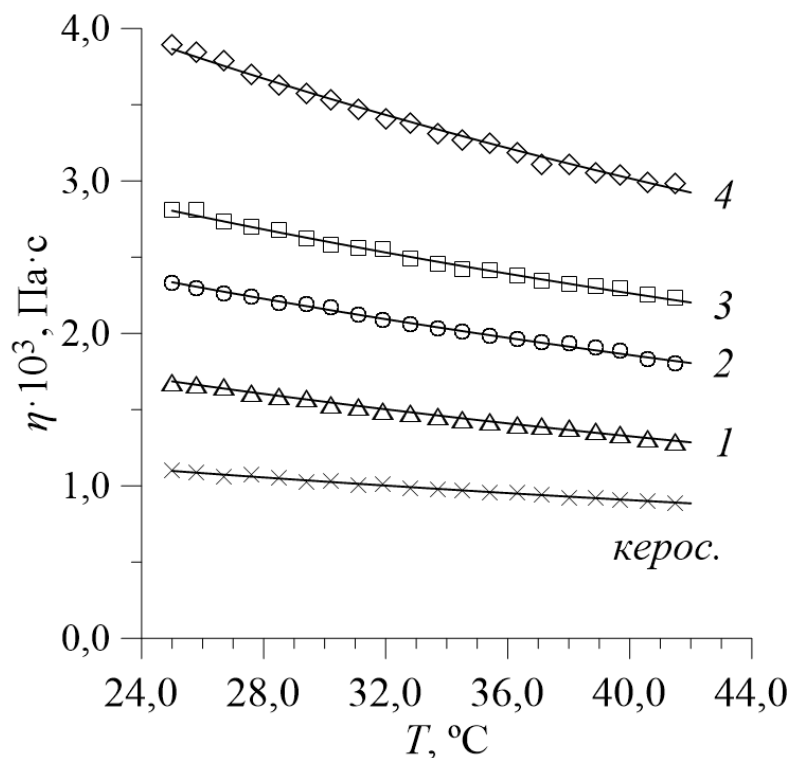


Рисунок 3.1 — Динамическая вязкость образцов магнитной жидкости в зависимости от температуры. Символы соответствуют измеренным значениям, сплошные кривые — аппроксимации по Аррениусу. Нумерация кривых соответствует нумерации образцов в табл. 3.

Кривые намагничивания базового образца магнитной жидкости и разбавленного образца № 2 снимались методом дифференциальной прогонки [81]. Результаты магнитогранулометрического анализа полученных кривых (рис. 3.3) приведены в таблице 4. Как видно из таблицы, параметры распределения частиц (1.4) по размерам магнитных ядер ( $\sigma$ ,  $x_0$ ), а так же средний диаметр магнитного ядра  $\langle x \rangle$  и магнитный момент  $\langle m \rangle$  остались после разбавления практически

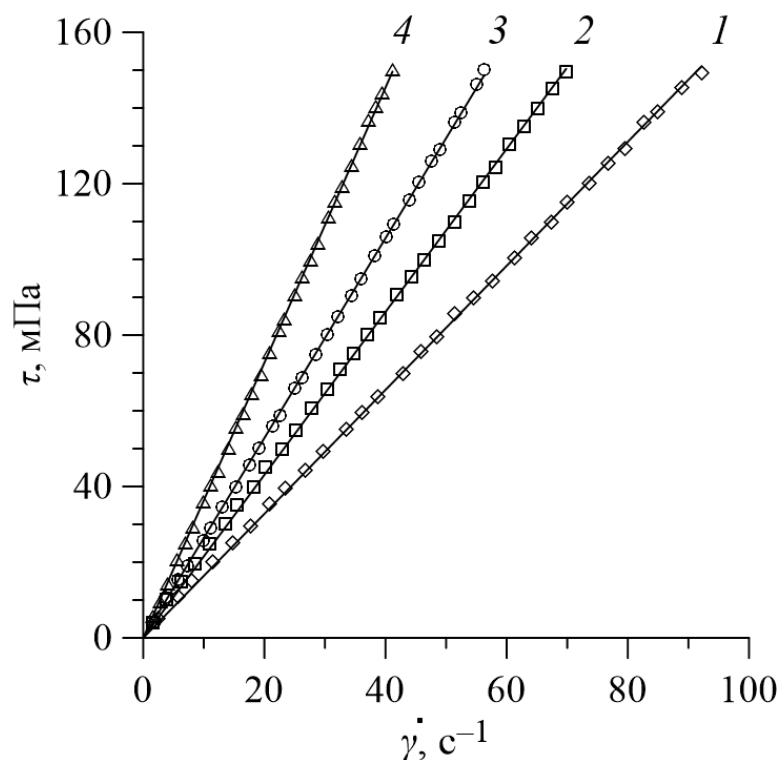


Рисунок 3.2 — Реологические кривые (сдвиговое напряжение в зависимости от скорости сдвига) образцов магнитной жидкости при 27 °С. Символы соответствуют измеренным значениям, сплошные линии — аппроксимация прямой пропорциональностью. Нумерация кривых соответствует нумерации образцов в табл. 3.

Таблица 4 — Магнитные и гранулометрические свойства разбавленного образца феррожидкости в сравнении со свойствами базового образца.

	$M_{\infty}$ , кА/м	$\chi_0$	$\sigma$	$x_0$ , нм	$\langle x \rangle$ , нм	$\langle m \rangle \cdot 10^{19}$ , А · м <sup>2</sup>
Обр. 2	21,0	1,56	4,68	1,32	7,44	1,66
Базовый	52,0	5,13	4,90	1,26	7,38	1,61

неизменными. Кривая распределения частиц по диаметрам магнитных ядер показана на рисунке 3.4.

Каждый образец феррожидкости использовался в двух сериях измерений. В первой серии исследовалась гравитационная конвекция в нулевом магнитном поле. В этой же серии проведены опыты с чистым осветительным керосином, который рассматривался как предельный случай магнитной жидкости с нулевой концентрацией коллоидных частиц. Во второй серии исследовалась смешанная гравитационная и термомагнитная конвекция при наложении градиентного маг-

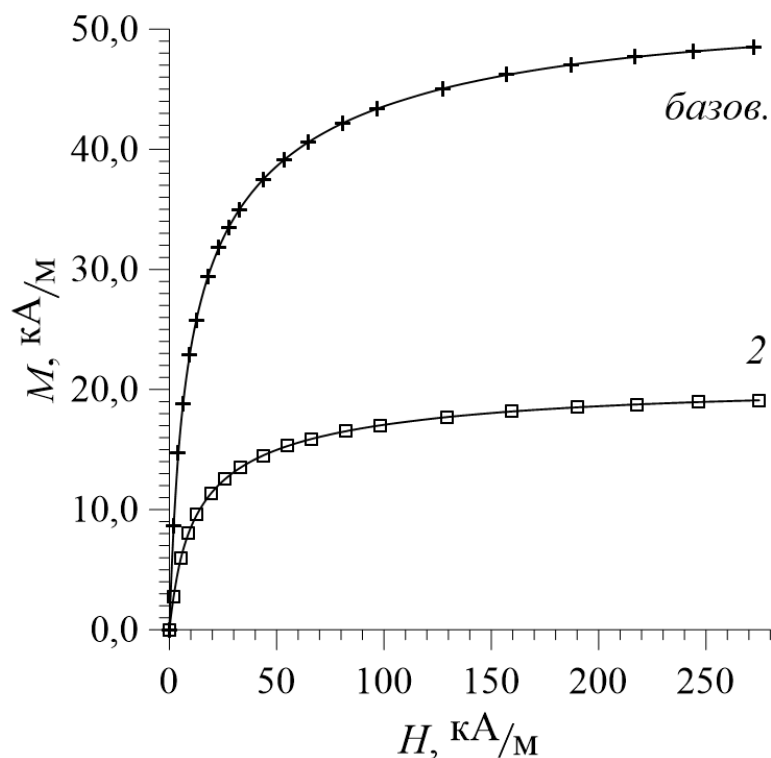


Рисунок 3.3 — Кривые намагничивания базового и разбавленного (№ 2 табл. 3) образцов магнитной жидкости. Точки получены методом дифференциальной прогонки, сплошные линии — интерполяция сплайнами.

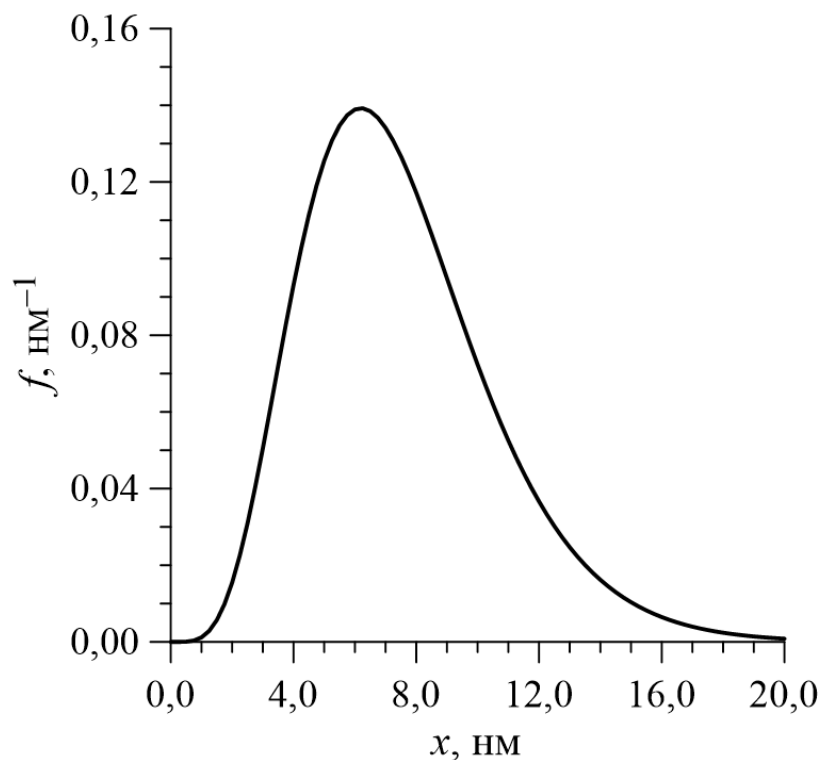


Рисунок 3.4 — Распределение коллоидных частиц по диаметрам магнитных ядер согласно формуле (1.4). Используются усреднённые параметры распределения:

$$\sigma = 4,84, x_0 = 1,28 \text{ нм.}$$

нитного поля (с напряжённостью до 23 кА/м в отсутствие жидкости) на участок контура вблизи нагревателя (рис. 2.5а).

Во всех опытах температура воздушного термостата поддерживалась равной 27 °С. Стационарное распределение температуры в контуре, как и в тестовых опытах (см. § 2.5), достигалось через несколько десятков минут после включения нагревателя. Примеры установления стационарной конвекции образца магнитной жидкости №2 с объёмной долей магнетита  $\varphi_s = 0,060$  приведены на рисунках 3.5. Сравнение термограммы (рис. 3.5а) с аналогичной термограммой для н-ундекана (рис. 2.15) показывает, что гравитационная конвекция феррожидкости не отличается от конвекции гомогенной жидкости. Примеры стационарного распределения температуры вдоль контура в опытах с образцами минимальной №1 и максимальной концентрации №4 представлены на рис. 3.6. Экспериментальные точки хорошо укладываются на аппроксимирующие экспоненты, в полулогарифмическом масштабе графика — прямые линии. Это позволяет воспользоваться формулой (2.20) для расчёта безразмерного интегрального теплового потока.

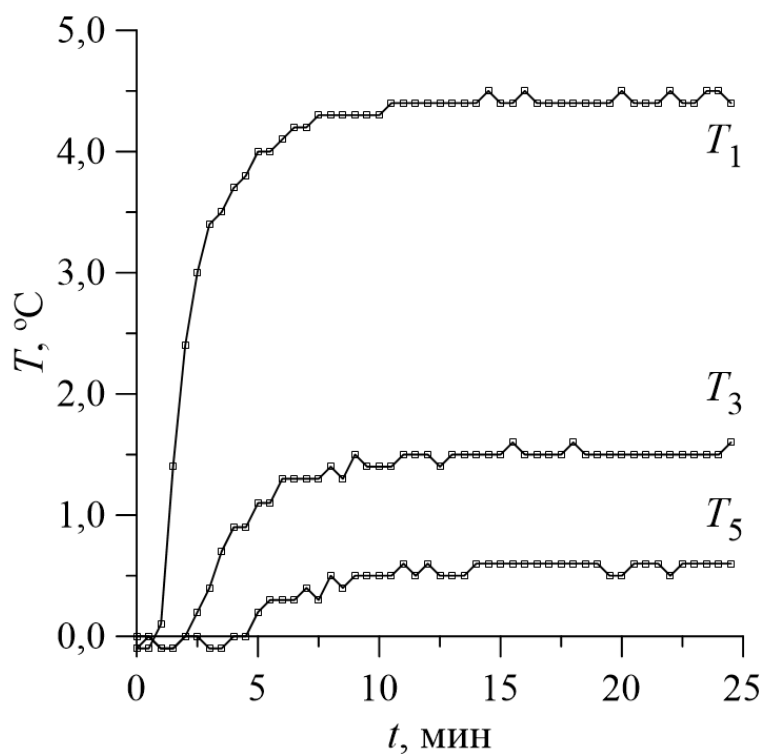
Согласно (2.20) вклад термомагнитной конвекции в теплоток можно оценить по величине  $k^{-2}$ , где  $k$  — угловой коэффициент аппроксимирующих прямых. На рисунке 3.7 значения величины  $k^{-2}$  представлены в зависимости от перепада температуры на нагревателе  $\Delta T$ . Очевидно, что при фиксированной разности температур вклад термомагнитной конвекции превосходит вклад гравитационной. Так, в опытах с образцом №1, тепловой поток при включении магнитного поля усиливается в 2–2,4 раза, а для образца №4 в 3,7 раза.

Стандартное, как в § 2.5 представление результатов опытов по тепловой конвекции в виде зависимости  $Nu = Nu(Ra)$  показано на рис. 3.8. При расчётах использованы теплофизические свойства образцов жидкостей из таблицы 3, а так же учтена температурная зависимость вязкости (рис. 3.1). При расчёте последней использована средняя температура вдоль контура.

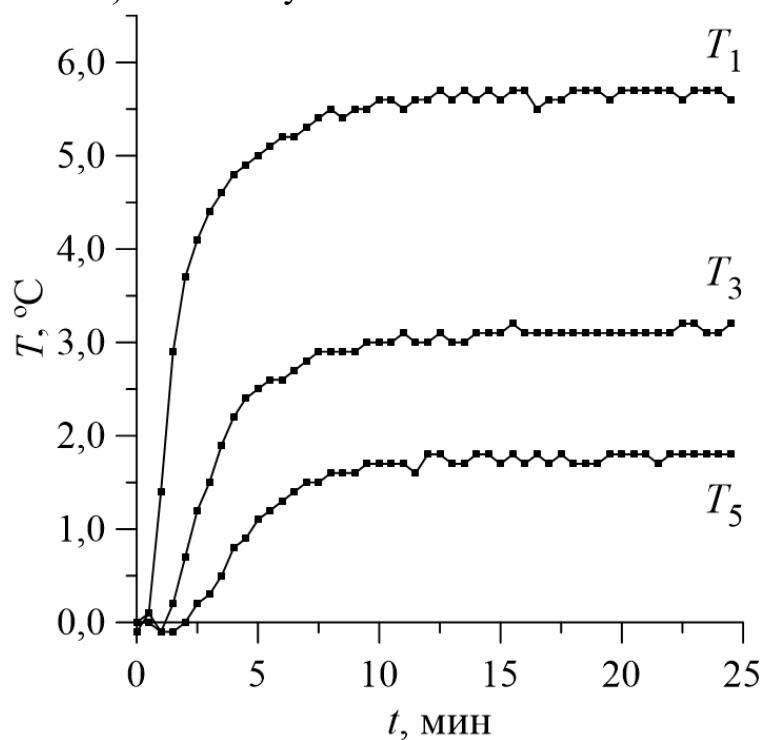
Как и ожидалось, для всех образцов магнитных жидкостей, результаты опытов в нулевом поле и опыты с керосином ложатся на одну универсальную кривую  $Nu(Ra)$ .

Наложение магнитного поля запускает механизм термомагнитной конвекции, которая увеличивает конвективный теплоток в 2,5–3,5 раза в зависимости от свойств использованной в эксперименте феррожидкости.



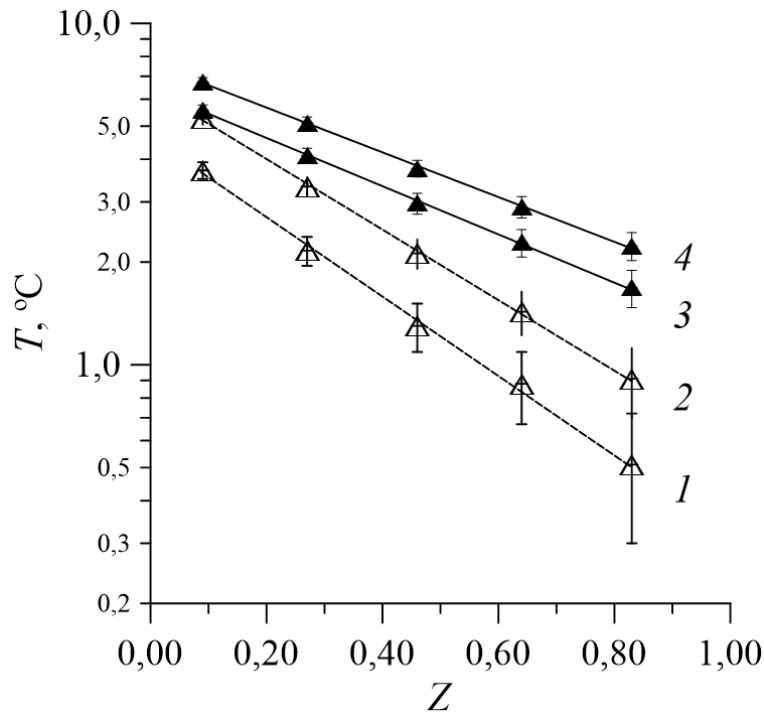


а) Опыт в нулевом магнитном поле.

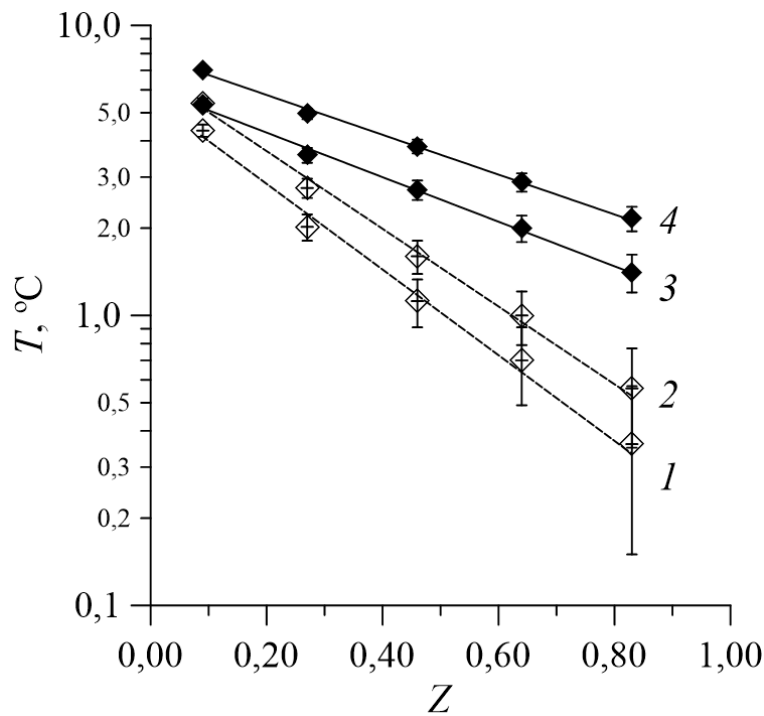


б) Опыт в градиентном магнитном поле.

Рисунок 3.5 — Установление стационарного режима в конвективных экспериментах с образцом магнитной жидкости № 2 ( $\varphi_s = 0,060$ ). Обозначения термограмм ясны из рис. 2.6.



а) Опыты с образцом минимальной ( $\varphi_s = 0,040$ ) концентрации. Установившиеся перепады температуры  $\Delta T$ : 1 — 4,5 °C, 2 — 6,3 °C, 3 — 5,3 °C, 4 — 6,4 °C.



б) Опыты с образцом максимальной ( $\varphi_s = 0,100$ ) концентрации. Установившиеся перепады температуры  $\Delta T$ : 1 — 5,4 °C, 2 — 6,6 °C, 3 — 5,2 °C, 4 — 6,4 °C.

Рисунок 3.6 — Стационарное распределение температуры вдоль охлаждаемой части контура при различных мощностях нагревателя. Тёмными символами обозначены результаты экспериментов в градиентном магнитном поле, светлыми символами — в нулевом поле. Сплошные линии — аппроксимация экспоненциальными функциями.

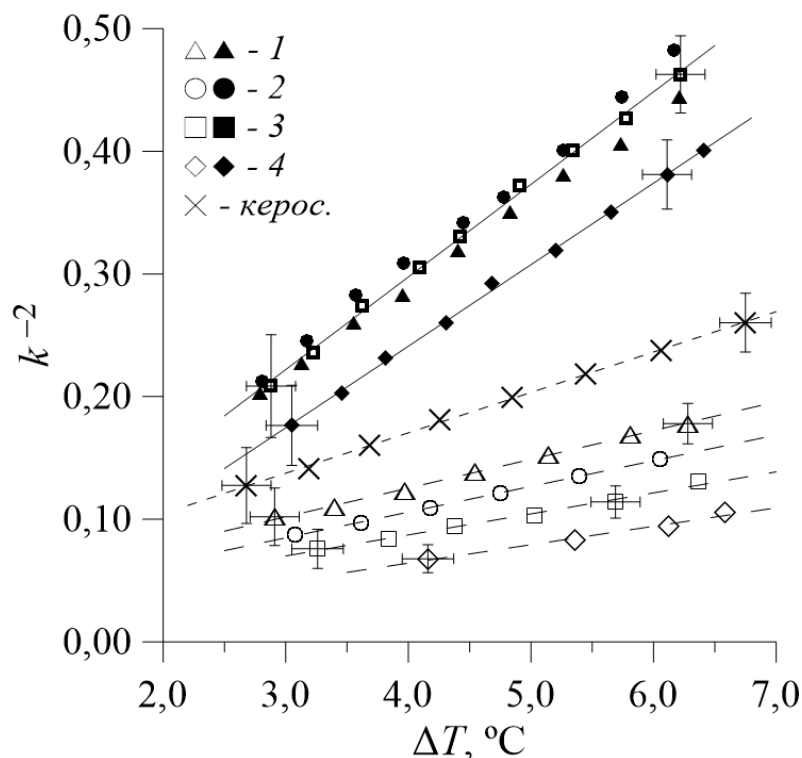


Рисунок 3.7 — Величина  $k^{-2}$  в зависимости от перепада температуры на нагревателе  $\Delta T$ . Тёмные символы соответствуют опытам в градиентном магнитном поле, светлые — в нулевом поле. Нумерация символов соответствует нумерации образцов в табл. 3. Линии тренда служат повышению наглядности результатов.

Объёмный расход жидкости через поперечное сечение трубки контура определяется формулой (2.18). В условиях проводившихся опытов, он оказался порядка нескольких десятков  $\text{мм}^3/\text{с}$ . Зависимость расхода жидкости от перепада температуры на нагревателе [121; 122] представлена на рис. 3.9. При площади поперечного сечения канала около  $20 \text{ мм}^2$  характерная скорость течения составляет несколько  $\text{мм}/\text{с}$ .

Поскольку с ростом концентрации коллоидных частиц в растворе увеличивается намагниченность жидкости, увеличивается и наклон кривых на плоскости  $\text{Nu}(\text{Ra})$ . Если же ориентироваться на термомагнитную конвекцию, с максимальной интенсивностью, а так же на объёмный расход, то оказывается, что наилучшие результаты достигаются на растворах с умеренной концентрацией магнетита  $\varphi_s = 0,06-0,08$ . При меньших концентрациях интенсивность конвекции уменьшается за счёт уменьшения намагниченности, а при больших за счёт увеличения вязкости раствора. В случае умеренных концентраций эти два конкурирующих механизма компенсируют друг друга.

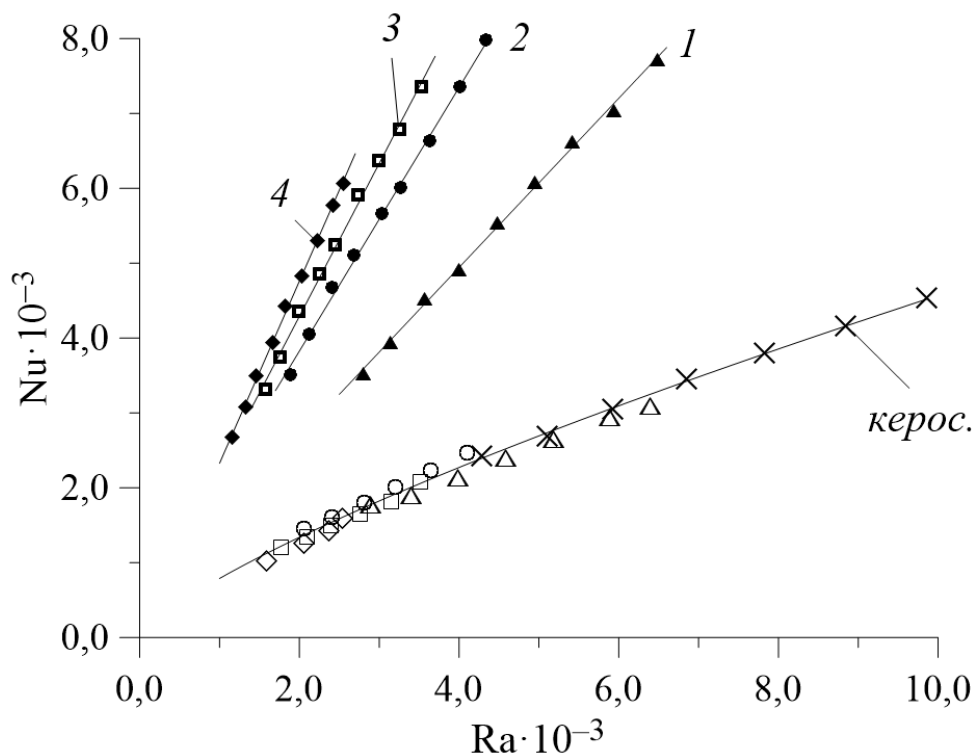


Рисунок 3.8 — Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэля. Тёмные символы соответствуют конвективным опытам в градиентном магнитном поле, светлые — в нулевом поле. Нумерация экспериментальных кривых соответствует нумерации образцов в табл. 3. Линии тренда служат повышению наглядности результатов.

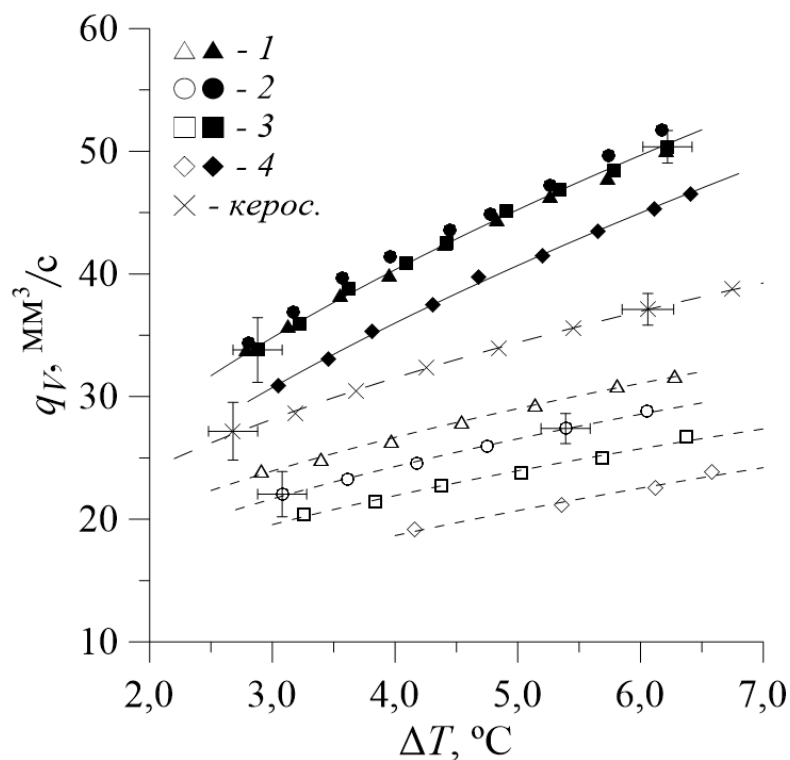
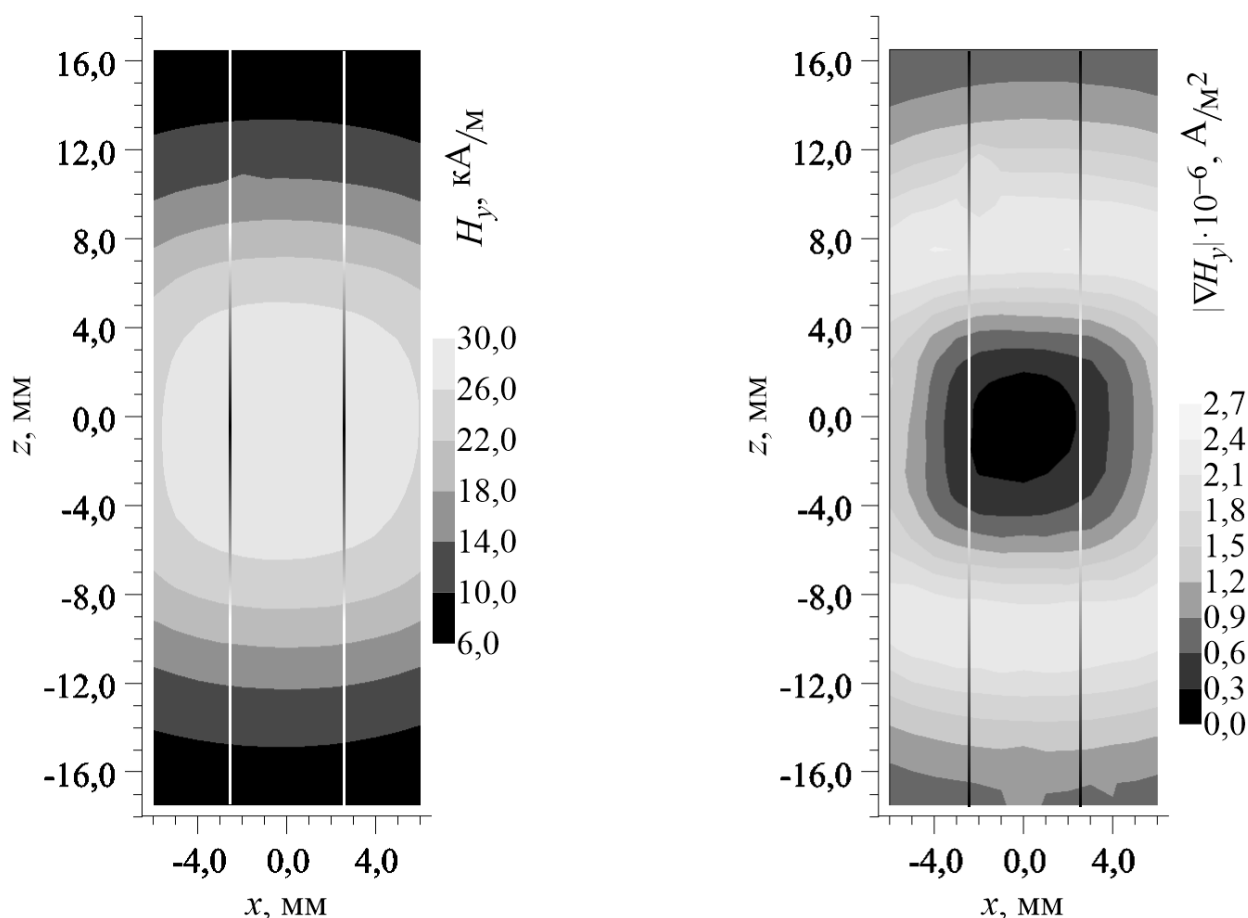


Рисунок 3.9 — Объёмный расход жидкости через поперечное сечение трубы контура в зависимости от перепада температуры на нагревателе. Тёмные символы соответствуют опытам в градиентном магнитном поле, светлые — в нулевом поле. Нумерация символов соответствует обозначениям в табл. 3. Линии тренда служат повышению наглядности результатов.

### 3.2 Опыты в поле увеличенной напряжённости. Измерение скорости потока жидкости



а) Горизонтальная компонента напряжённости поля.

б) Модуль градиента горизонтальной компоненты напряжённости поля.

Рисунок 3.10 — Повышенное магнитное поле в рабочем зазоре намагничивающей системы. Контрастными вертикальными линиями показана внутренняя поверхность нагревателя.

С целью проверки повторяемости результатов описанные в предыдущем параграфе 3.1 эксперименты были проведены повторно в магнитном поле бóльшей напряжённости (рис. 3.10). Для повышения напряжённости постоянный магнит в намагничивающей системе (рис. 2.4) был заменён магнитом бóльшего размера, а немагнитные прокладки убраны [2; 7; 121; 124; 125]. Амплитуда напряжённости в зазоре намагничивающей системы без магнитной жидкости увеличилась на 24% с 23 кА/м до 29 кА/м. Геометрия магнитного

поля в области размещения нагревателя существенно не изменилась (для сравнения см. рис. 2.5).

Результаты измерения числа Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэля представлены на рисунке 3.11. Сравнение с представленными ранее результатами (рис. 3.8) не выявляет качественных отличий в расположении экспериментальных кривых  $Nu(Ra)$  для всех образцов магнитных жидкостей. Различие исключительно количественное и состоит в том, что вклад термомагнитной конвекции в интегральный теплоперенос при повышении напряжённости внешнего поля оказывается еще более значительным. Термомагнитная конвекция в поле с амплитудой напряжённости 29 кА/м даёт уже четырёхкратное усиление теплового потока.

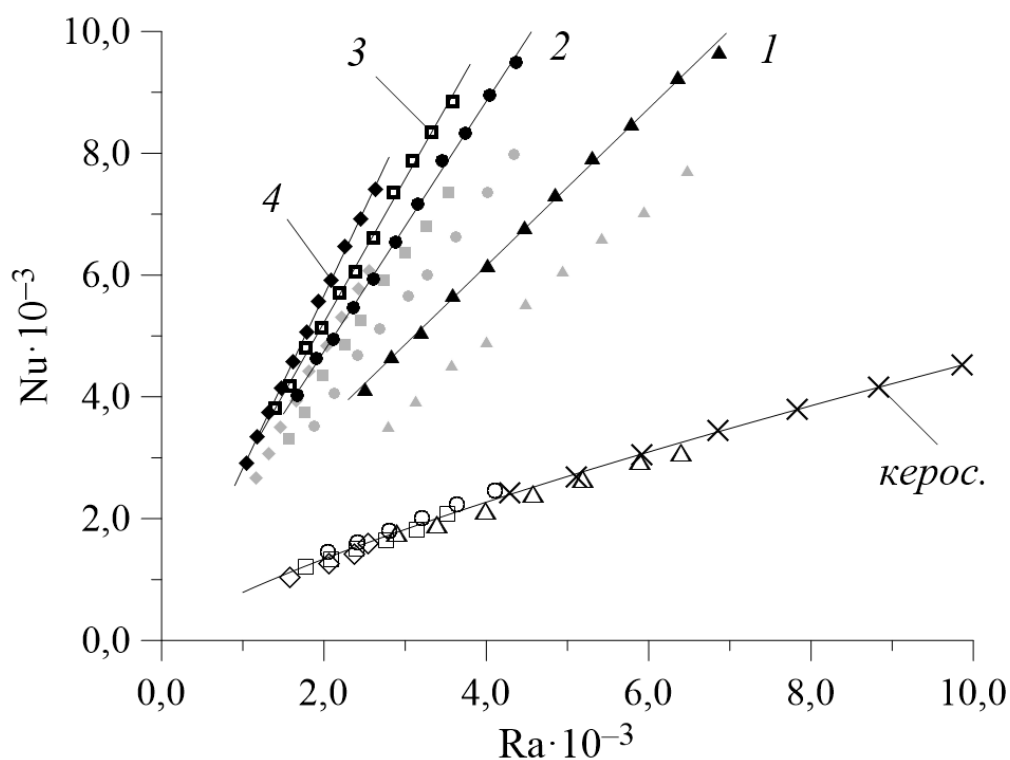


Рисунок 3.11 — Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэля. Тёмные символы соответствуют конвективным опытам в градиентном магнитном поле повышенной напряжённости ( $H_{\max} = 29$  кА/м), светлые — в нулевом поле. Для сравнения, светло-серым цветом показаны результаты опытов с рис. 3.8 ( $H_{\max} = 23$  кА/м). Нумерация экспериментальных зависимостей соответствует нумерации образцов магнитных жидкостей в табл. 3. Линии тренда служат повышению наглядности результатов.

С использованием формулы (2.19) по результатам опытов с образцом магнитной жидкости № 2 получена величина скорости течения на оси трубки

контура  $v_0$  в режиме комбинированной (терромагнитной и гравитационной) конвекции. На рисунке 3.12 скорость  $v_0$  в зависимости от мощности нагревателя  $P$  представлена точками 1.

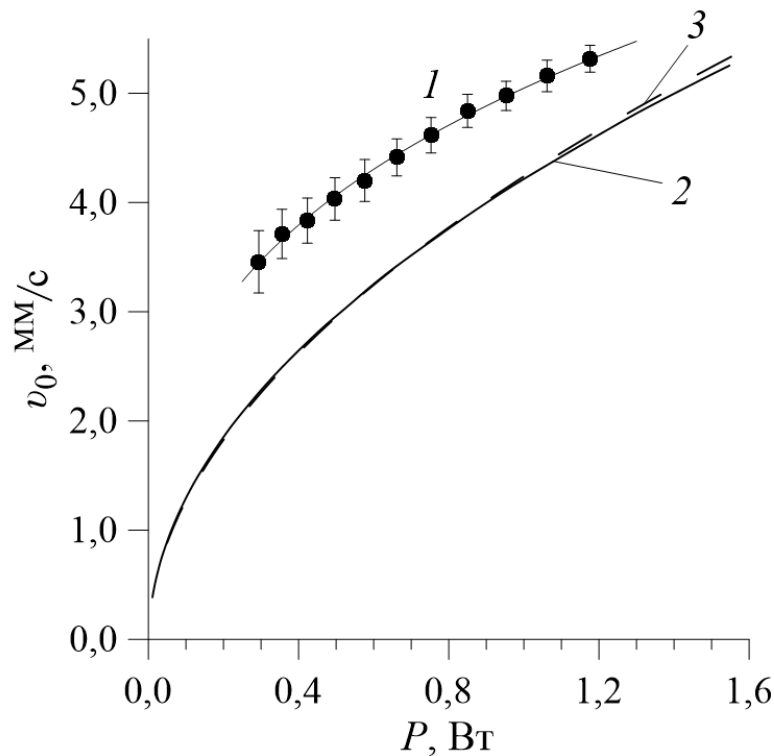


Рисунок 3.12 — Скорость течения на оси трубки контура в зависимости от мощности нагревателя в опытах с образцом магнитной жидкости № 2 ( $\varphi_s = 0,061$ ). 1 — данные эксперимента в режиме комбинированной терромагнитной и гравитационной конвекции, 2 — расчёт без учёта гравитации, 3 — аппроксимация степенным законом:  $v_0 \propto P^{0,523}$ .

Кривая 2 на рисунке 3.12 соответствует решению уравнения, предложенного в [2] д-р. физ.-мат. наук, проф. А. Ф. Пшеничниковым для случая терромагнитной конвекции в отсутствии гравитации:

$$v_0 = -\frac{\mu_0 \chi \beta_m H_{\max}^2 r_1^2}{16\pi\alpha\eta L r_2 (1 + \kappa\chi)^2} \left(\frac{P}{l}\right) \left\{ \int_0^l \frac{\partial(\Psi^2)}{\partial z} [1 - \exp(-kz)] dz + [\exp(kl) - 1] \int_l^\infty \frac{\partial(\Psi^2)}{\partial z} \exp(-kz) dz \right\}. \quad (3.1)$$

Здесь  $H_{\max} = 28,8$  кА/м — амплитудное значение напряжённости поля в зазоре намагничивающей системы (рис. 3.10),  $\Psi = H_y/H_{\max}$  — перпендикулярная



оси контура компонента напряжённости магнитного поля, нормированная на амплитудное значение, измеренное в эксперименте. Распределение  $\Psi(z)$  вдоль оси трубки  $z$  аппроксимировалось обратным полиномом четвёртой степени:

$$\Psi = \frac{1}{1 + 0,4 \left(\frac{z}{\ell}\right)^2 + 1,6 \left(\frac{z}{\ell}\right)^4}, \quad (3.2)$$

где  $\ell = 14$  мм — размер полюсных наконечников источника магнитного поля (рис. 2.4). На рис. 3.13 экспериментальные значения  $H_y/H_{\max}$  показаны точками, а аппроксимация  $\Psi(z)$  — сплошной линией. Начало оси  $z$  в формуле для расчёта скорости (3.1) размещено у входного сечения нагревателя, поэтому в подынтегральных выражениях  $\Psi = \Psi(z - l/2)$ , где  $l = 18$  мм — длина нагревателя.

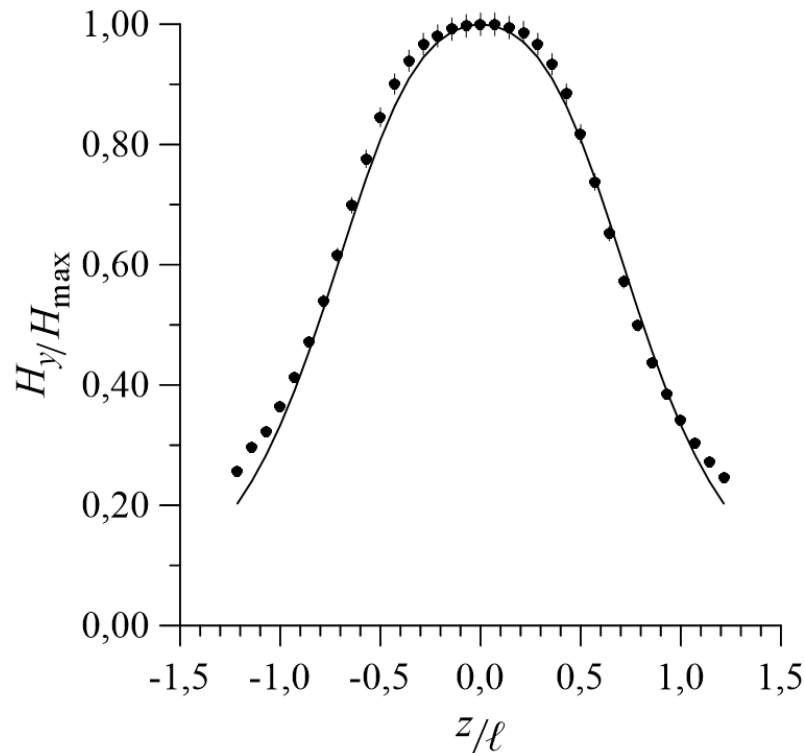


Рисунок 3.13 — Магнитное поле в воздушном зазоре намагничивающей системы, нормированное на его амплитудное значение  $H_{\max} = 29$  кА/м. Точки соответствуют эксперименту, сплошная линия — аппроксимации (3.2).

Показатель экспоненты  $k$  в уравнении (3.1) связан с искомой скоростью на оси потока  $k = a\gamma^2/(r_1^2\nu_0)$ , где  $\gamma^2$  рассчитывается по формуле (2.24). Важно заметить, что используемая здесь величина  $k$  имеет размерность ( $\text{м}^{-1}$ ). С безразмерным декрементом затухания температурного возмущения, измерявшемся в экспериментах, она связана очевидным соотношением  $k = k/L$ .

Магнитная восприимчивость  $\chi$ , являющаяся параметром в уравнении (3.1), рассчитывалась с использованием аппроксимации кривой намагничивания (2 на рис. 3.3) в рамках бидисперсной модели [2]. В расчёте использовалась связь напряжённости магнитного поля в жидкости  $H$  с напряжённостью внешнего поля  $H$ , выражаемая известным соотношением [91]

$$H = H - \kappa M(H), \quad (3.3)$$

где  $\kappa$  — размагничивающий фактор.

Применённое для нахождения скорости  $v_0$  значение восприимчивости  $\chi = 0,80$  соответствует среднему в интервале полей от 0 кА/м до  $H_{\max} = 22$  кА/м, которое достигается в жидкости при максимальном внешнем поле  $H_{\max} = 29$  кА/м.

Размагничивающий фактор  $\kappa$  в (3.1) и (3.3) принимался равным 0,5, как в случае длинного цилиндра с приложенным поперёк его оси однородным внешним полем. В эксперименте реализована похожая ситуация, в том смысле, что неоднородность поля в поперечном сечении трубки невелика (рис. 3.10). Среднее по напряжённости магнитного поля значение использовано и для температурного коэффициента намагниченности  $\beta_m = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . Расчёт коэффициента учитывал тепловое расширение жидкости носителя, уменьшение намагниченности магнетита с ростом температуры, а так же тепловые флуктуации направления магнитных моментов частиц.

Численное решение уравнения (3.1), выполненное А. Ф. Пшеничниковым, хорошо приближается степенным законом  $v_0 \propto P^{0,523}$  (кривая 3 на рис. 3.12). Экспериментальные точки  $l$  лежат на 16–20 % выше этой кривой из-за неучтённого в уравнении (3.1) влияния гравитационной конвекции. Это расхождение говорит о заметном, но сравнительно небольшом вкладе сил плавучести в скорость течения магнитной жидкости по сравнению с вкладом пондеромоторных сил.

### 3.3 Влияние расположения источника магнитного поля

Целью экспериментов, описанных в этом параграфе [7; 124; 125], было получение информации о влиянии взаимного расположения источника неод-

нородного магнитного поля и нагревателя на интенсивность конвективного теплопереноса в замкнутом протяжённом гидродинамическом контуре. Производился поиск наиболее оптимального, с точки зрения интенсификации теплопереноса термомагнитной конвекцией, положения источника магнитного поля. Выше было показано, что повышение амплитуды напряжённости магнитного поля в зазоре намагничивающей системы с 23 кА/м до 29 кА/м привело к сопоставимо более выраженному усилению теплопереноса за счёт термомагнитной конвекции. Поэтому в этих опытах использовалась намагничивающая система, дающая повышенное поле.

Кроме того, ранее было установлено, что наиболее оптимальной является умеренная концентрация магнетитовых наночастиц в магнитной жидкости. В этой связи, методом разбавления высококонцентрированной магнитной жидкости (см. § 3.1) приготавливался новый образец феррожидкости «магнетит–керосин–олеиновая кислота» с объёмной долей твёрдой фазы  $\varphi_s = 0,073$ . По измеренной пикнометром при комнатной температуре плотности образца были рассчитаны его теплофизические параметры (табл. 5).

Таблица 5 — Теплофизические свойства образца магнитной жидкости при комнатной (27 °С) температуре.

$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\beta \cdot 10^3$ , К <sup>-1</sup>	$\lambda$ , Вт/(м · К)	$c$ , кДж/(кг · К)	$a \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\eta$ , мПа · с
1,11	0,68	0,14	1,5	8,1	2,54

Динамическая вязкость образца измерялась ротационным вискозиметром Brookfield в интервале температур 20–40 °С в отсутствии магнитного поля. Результаты измерений (рис. 3.14) аппроксимировались по Аррениусу [123].

Кривая намагничивания образца измерялась методом дифференциальной прогонки. По полученной кривой (рис. 3.15), методом магнитогранулометрического анализа были рассчитаны намагниченность насыщения  $M_\infty = 20,7$  кА/м, средний магнитный момент  $\langle m \rangle = 1,94 \cdot 10^{-19}$  А/м<sup>2</sup> и средний диаметр магнитного ядра частиц  $\langle x \rangle = 7,94$  нм. Из сравнения этих свойств с указанными в табл. 4 видно, что дисперсный состав вновь приготовленного образца отличается от состава использованных ранее жидкостей незначительно.

В эксперименте расположение источника неоднородного магнитного поля относительно нагревателя варьировалось по вертикали, оси  $z$  на рис. 3.16. Для

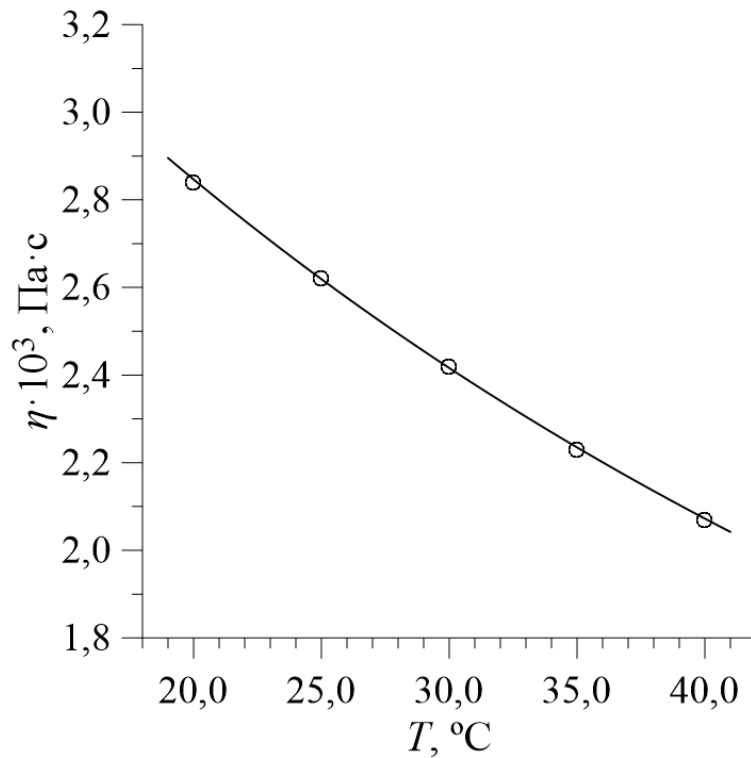


Рисунок 3.14 — Динамическая вязкость образца магнитной жидкости в зависимости от температуры. Точки соответствуют результатам измерений, сплошная линия — аппроксимация по Аррениусу.

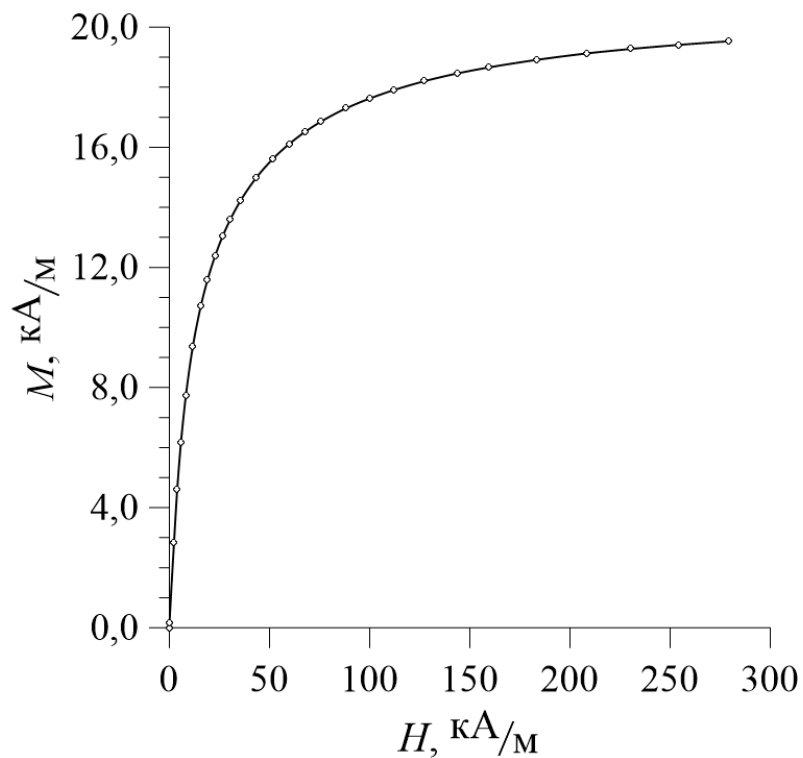
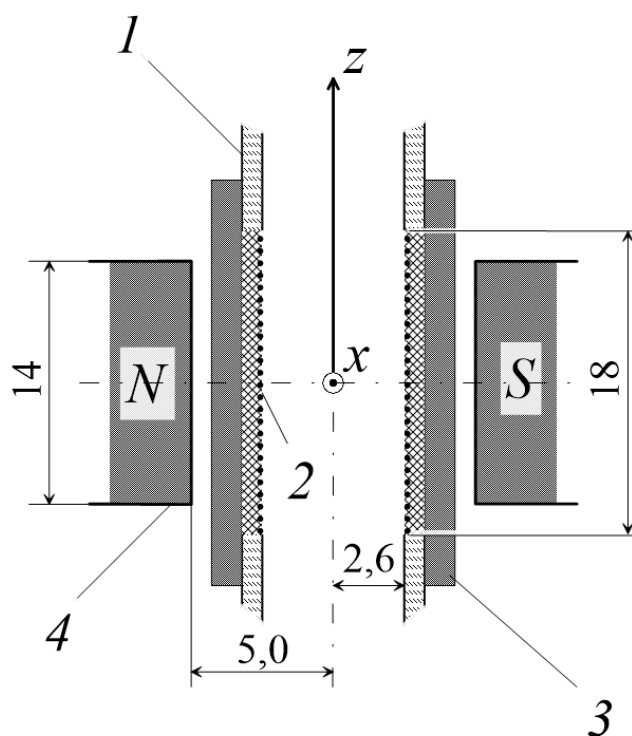


Рисунок 3.15 — Кривая намагничивания образца магнитной жидкости.



1 — трубка контура, 2 — обмотка нагревателя в слое эпоксидной смолы, 3 — эбонитовый цилиндр, 4 — полюсные наконечники магнитопровода.

Рисунок 3.16 — Осевое сечение нагревателя и полюсных наконечников магнитопровода в системе координат. Размеры указаны в мм.

бóльшей наглядности на рисунке 3.16 показано расположение полюсных наконечников источника поля в начале координат  $z = 0$ , а так же указаны размеры основных частей нагревателя. Диапазон положений, в которых фиксировался источник поля на время проведения опытов составлял от минус 10 мм до плюс 10 мм.

Время работы нагревателя необходимое для установления стационарного температурного режима в контуре составляет  $\Delta t \approx 20$  мин (рис. 3.5). Этого времени достаточно для получения информации о характере развивающегося в контуре течения.

При размещении полюсных наконечников магнитопровода выше центра нагревателя температурное возмущение распространялось вниз, противоположно направлению оси  $z$  (см. рис. 2.1). Зависимость температуры поверхности контура от времени работы нагревателя, при расположении источника магнитного поля на высоте  $z = +10$  мм приведена на рис. 3.17а. Аналогичный результат наблюдался и при размещении магнитопровода на высоте  $z = +5$  мм. Термомагнитная конвекция в этих ситуациях привела к течению жидкости из нагревателя

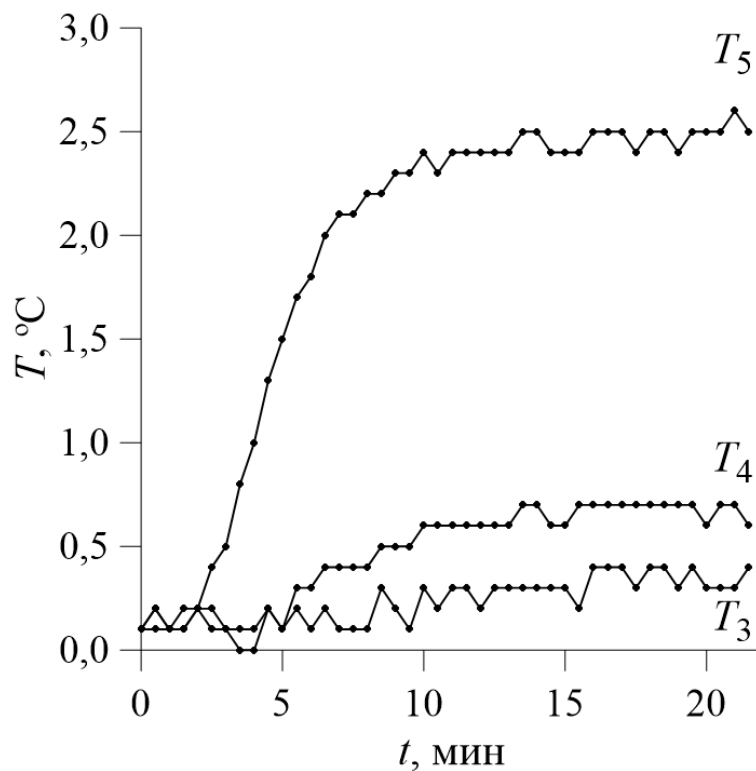
вниз, в то время как гравитационная конвекция имеет противоположное направление. Похожая ситуация продемонстрирована в работе [126] на примере конкурирующих термомагнитной и термогравитационной конвекций в горизонтальном канале квадратного сечения, над которым находился постоянный магнит. В рамках задачи об усилении конвективного теплопотока конкуренция двух типов конвекции не представляет интереса. Формулы из § 2.3 не справедливы, поэтому дальнейший анализ температурных профилей (рис. 3.17а) не проводился.

При размещении полюсных наконечников магнитопровода в центре и ниже центра нагревателя, температурное возмущение распространялось вверх, вдоль оси  $z$ . Температура поверхности контура в зависимости от времени, прошедшего с начала эксперимента при расположении магнитопровода на высоте минус 10 мм показана на рис. 3.17б. Аналогичный вид этой зависимости наблюдался при  $z = -5$  мм и, как и в § 3.1, при  $z = 0$  мм. В этих случаях термомагнитная и гравитационная конвекция сонаправлены, что приводит к усилению конвективного теплопереноса.

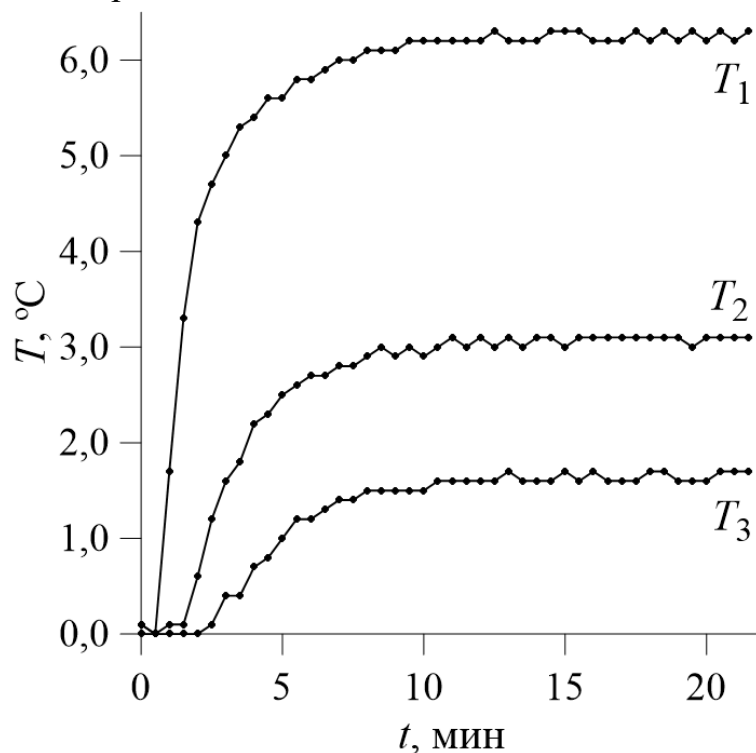
Оценка вклада непосредственно термомагнитной конвекции в теплоперенос производилась в двух сериях контрольных опытов. В первой серии магнитопровод фиксировался в трех положениях: в центре нагревателя  $z = 0$  мм, на 5 и 10 мм ниже нагревателя. Производилось измерение пространственного декремента затухания температурного возмущения  $k$  вдоль контура в зависимости от установившегося перепада температуры  $\Delta T$  на нагревателе. Во второй серии, аналогичные измерения были произведены без источника магнитного поля. По результатам измерений вычислялись числа Нуссельта (2.20) и откладывались по оси абсцисс в зависимости от теплового числа Рэлея (1.1). Полученные зависимости показаны на рис. 3.18.

Кроме того, проведены расчёты объёмного расхода магнитной жидкости через поперечное сечение трубы контура (2.18). Результаты расчёта объёмного расхода  $q_V$  по формуле (2.18) в зависимости от разности температур  $\Delta T$  на концах нагревателя представлены на рисунке 3.19.

Из взаимного расположения экспериментальных кривых на рис. 3.18 видно, что наибольшее усиление теплообмена в 3–4 раза, по сравнению с гравитационной конвекцией наблюдается при расположении полюсных наконечников магнитопровода на одной высоте с нагревателем и на 5 мм ниже нагреваемого участка контура. Соответствующие этим расположениям источника поля данные



а) Источник неоднородного магнитного поля на 10 мм выше нагревателя.



б) Источник неоднородного магнитного поля на 10 мм ниже нагревателя.

Рисунок 3.17 — Температура поверхности контура в зависимости от времени работы нагревателя при различных положениях полюсных наконечников магнитопровода. Обозначения  $T_1$ – $T_5$  на термограммах соответствуют обозначениям термопар на рис. 2.6.

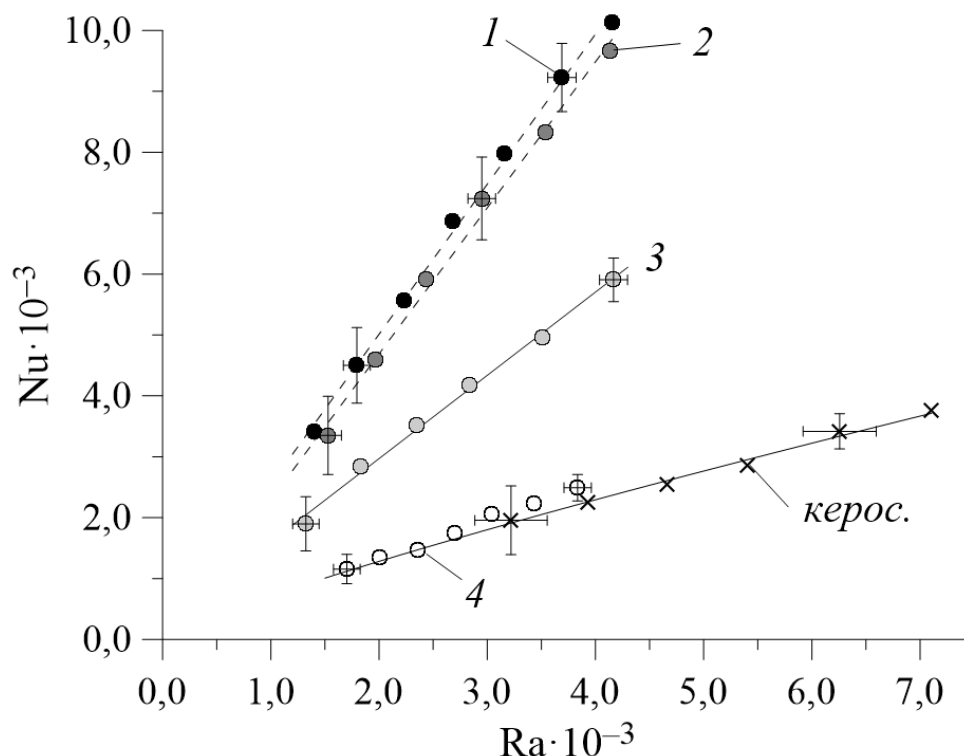


Рисунок 3.18 — Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэлея. В экспериментах с магнитной жидкостью при наложении неоднородного магнитного поля на 1 — центр нагревателя, 2 — на 5 мм и 3 — 10 мм ниже центра нагревателя. В эксперименте, проведённом без источника магнитного поля — 4. Для сравнения добавлены результаты опытов с чистым осветительным керосином (×). Символы соответствуют эксперименту, линии тренда служат повышению наглядности результатов.

(кривые 1 и 2 на рис. 3.18) совпадают в пределах погрешности. Этого следовало ожидать из качественного анализа формулы (1.2) для некомпенсированной гидростатическим давлением пондеромоторной силы [12]:

$$\vec{F} = -\mu_0 \beta_m T M \nabla H.$$

Модуль этой силы при прочих равных условиях максимален, если наиболее нагретая жидкость оказывается в области наиболее неоднородного магнитного поля. В ситуациях, соответствующих линиям 1 и 2 на рис. 3.18, область с наибольшим градиентом поля накладывается на выходное сечение нагревателя, где магнитная жидкость имеет наибольшую температуру. Подтверждение этому представлено на рисунке 3.20. По мере опускания полюсных наконечников вниз (кривая 3 на рис. 3.18), градиентная область магнитного поля спускается



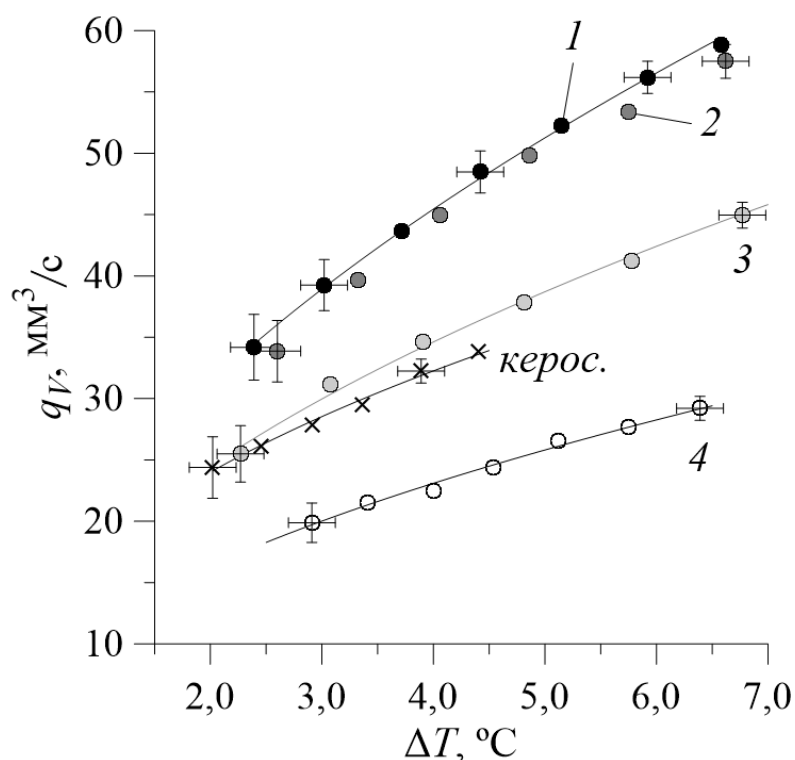


Рисунок 3.19 — Объёмный расход жидкости в зависимости от перепада температуры на нагревателе. В экспериментах с магнитной жидкостью при наложении неоднородного магнитного поля на 1 — центр нагревателя, 2 — на 5 мм и 3 — 10 мм ниже центра нагревателя. В эксперименте, проведённом без источника магнитного поля — 4. Для сравнения добавлены результаты опытов с чистым осветительным керосином (×). Точки соответствуют эксперименту, линии тренда служат повышению наглядности результатов.

к нижней части нагревателя, где температура жидкости меньше. Вклад термомагнитной конвекции в общий тепловой поток уменьшается. Расход жидкости через поперечное сечение трубки контура при этом практически не отличается от расхода чистого керосина, приводимого в движение только термогравитационной конвекцией (рис. 3.19). Выигрыш в величине теплового потока в этой ситуации объясняется бóльшей плотностью и, как следствие, бóльшей теплоёмкостью единичного объёма магнитной жидкости.

Во всех предыдущих опытах, полюсные наконечники магнитопровода располагались вблизи центра нагревателя. Таким образом, можно считать что эксперименты, описанные в § 3.1 и 3.2 проводились при оптимальном расположении источника неоднородного магнитного поля. Это позволило отложить экспериментально измеренные числа Нуссельта по оси ординат в зависимости от линейной комбинации теплового (1.1) и магнитного (1.3) чисел Рэлея

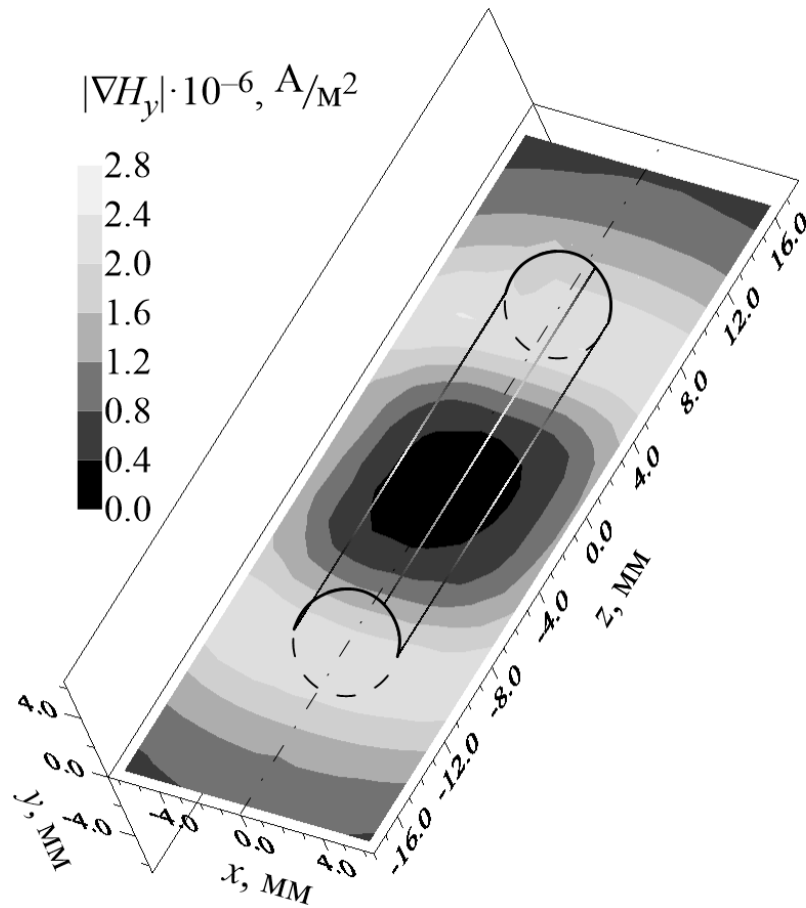


Рисунок 3.20 — Модуль градиента горизонтальной компоненты напряжённости магнитного поля при расположении полюсных наконечников магнитопровода в центре ( $z = 0$  мм) нагревателя. Границы обмотки нагревателя показаны контрастными линиями.

(рис. 3.21). При вычислении последнего учитывалось, что термомагнитная конвекция вызвана компонентной градиента напряжённости магнитного поля  $\partial H/\partial z$ , направленной вдоль оси контура. В качестве единицы измерения продольной координаты  $z$  в § 2.4 была принята длина контура  $L$ , поэтому под  $\nabla H$  в (1.3) понималось отношение  $H_{\max}/L$ , где  $H_{\max}$  — амплитудное значение напряжённости магнитного поля в жидкости. В качестве единицы измерения намагниченности так же принималось её амплитудное значение  $M_{\max} = M(H_{\max})$ . В итоге, вклад термомагнитной конвекции в теплоток в экспериментальном контуре определялся числом:

$$\text{Ra}_m = \frac{\mu_0 \beta_m M_{\max} H_{\max} r_1^2 \Delta T}{\eta a}$$

$M_{\max}$  и  $H_{\max}$  вычислялись по кривым намагничивания жидкостей с использованием формулы (3.3).

Линейная комбинация  $Ra + \zeta Ra_m$  содержит один универсальный подгоночный коэффициент  $\zeta$ . Вследствие выбора внутреннего радиуса трубки  $r_1$  масштабом радиальной координаты  $r$ , а длины контура  $L$  — масштабом осевой координаты  $z$ , постоянная  $\zeta$  формально пропорциональна введённому в § 2.4 геометрическому параметру  $b = r_1/L$ . Как видно на рис. 3.21, при  $\zeta = 11b = 0,082$  экспериментальные точки притягиваются к одной общей для гравитационной и комбинированной конвекции кривой. Включение магнитного поля приводит к смещению вдоль этой кривой вправо.

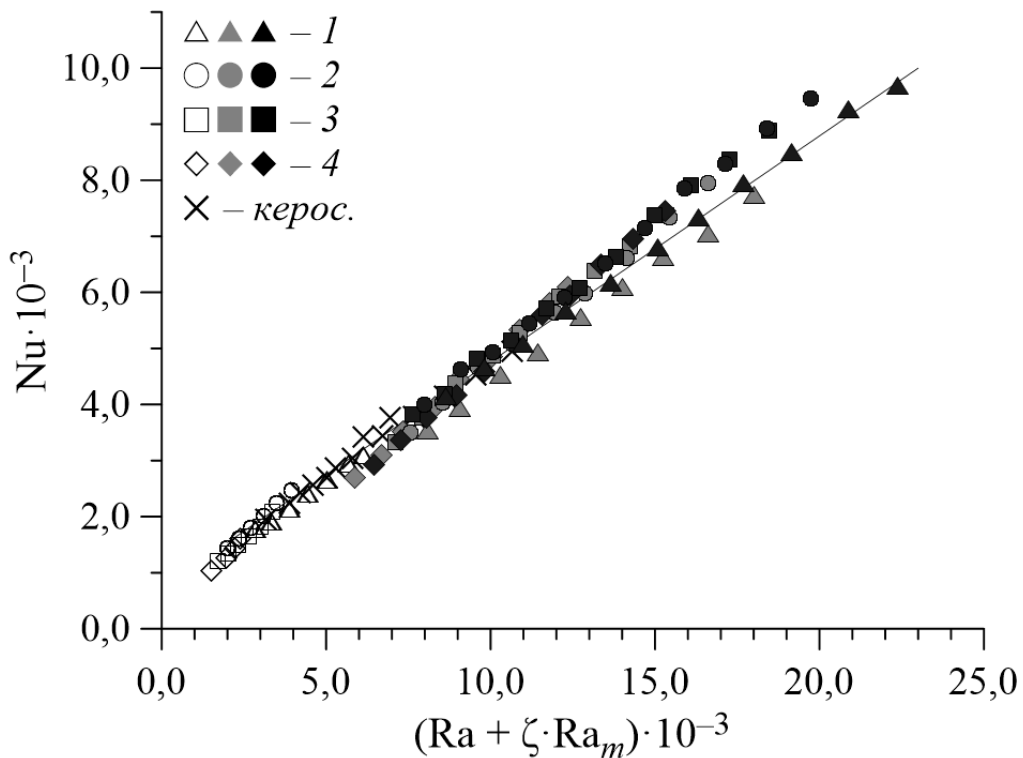


Рисунок 3.21 — Число Нуссельта в зависимости от линейной комбинации теплового и магнитного чисел Рэлея. Светлые символы соответствуют опытам с образцами магнитных жидкостей из § 3.1 в нулевом магнитном поле, светло-серые — опытам в поле с амплитудной напряжённостью 23 кА/м, чёрные — опытам из § 3.2 в поле с напряжённостью 29 кА/м. Универсальный подгоночный коэффициент  $\zeta = 0,082$ . Нумерация символов соответствует нумерации образцов феррожидкостей из табл. 3.

## Глава 4. Термомагнитная конвекция в сильном поле. Роль капельных агрегатов

### 4.1 Эксперименты с феррожидкостью, термодинамически неустойчивой в сильных полях

Цель экспериментов, представленных в этой главе, — демонстрация важной роли капельных агрегатов, возникающих в магнитной жидкости в результате магниточувствительного фазового перехода [6; 124; 125; 127].

Образование капельных агрегатов в магнитной жидкости наблюдается при понижении температуры или включении магнитного поля, если в растворе присутствуют крупные коллоидные частицы с энергией магнитодипольных взаимодействий в 2–4 раза большей энергии теплового движения [128]. В магнитной жидкости самопроизвольно возникает множество сферических капель характерным размером до нескольких десятков микрометров, отличающихся от окружающей среды преобладанием крупных частиц, высокой концентрации магнитной фазы и высокой магнитной проницаемостью в десятки единиц [128–136]. Во внешнем магнитном поле капельные агрегаты принимают вытянутую форму и дрейфуют вдоль градиента напряжённости магнитного поля. Массовый дрейф агрегатов в неоднородном поле (магнитофорез) может привести к увлечению окружающей магнитной жидкости, появлению нестационарных вихревых течений и многократному усилению локального массообмена [137].

Однако, в случае замкнутого гидродинамического контура с сильным магнитным полем, локализованным на небольшом участке, следует ожидать противоположного эффекта. Оседание капельных агрегатов на стенках канала в области с максимальной напряжённостью поля может привести к уменьшению эффективного сечения канала, его «тромбированию», и подавлению тепловой конвекции вдоль контура вплоть до полной её блокировки. Поскольку повышение напряжённости магнитного поля, как было показано в гл. 3, один из основных способов интенсификации термомагнитной конвекции в замкнутом контуре, отсутствие в литературе информации о влиянии агрегатов представляет значимую проблему.

В серии опытов, направленных на демонстрацию роли капельных агрегатов, экспериментальный контур заполнялся магнитной жидкостью на основе керосина ТС–1 и магнетита, стабилизированной олеиновой кислотой. Жидкость была синтезирована стандартным методом химического осаждения [9] без дополнительных мер по удалению крупнодисперсной фракции, то есть без центрифугирования или магнитной сепарации. Исходная жидкость не разбавлялась керосином, поскольку её сравнительно высокая концентрация позволяла более отчётливо наблюдать эффекты, о которых пойдёт речь ниже.

Динамическая вязкость жидкости измерялась ротационным вискозиметром в диапазоне температур 15–40 °С и аппроксимировалась по Аррениусу (рис. 4.1), для учёта температурной зависимости вязкости в числе Рэлея (1.1). Плотность жидкости измерялась пикнометром при комнатной температуре, остальные теплофизические параметры (табл. 6) вычислялись по формулам гл. 1.

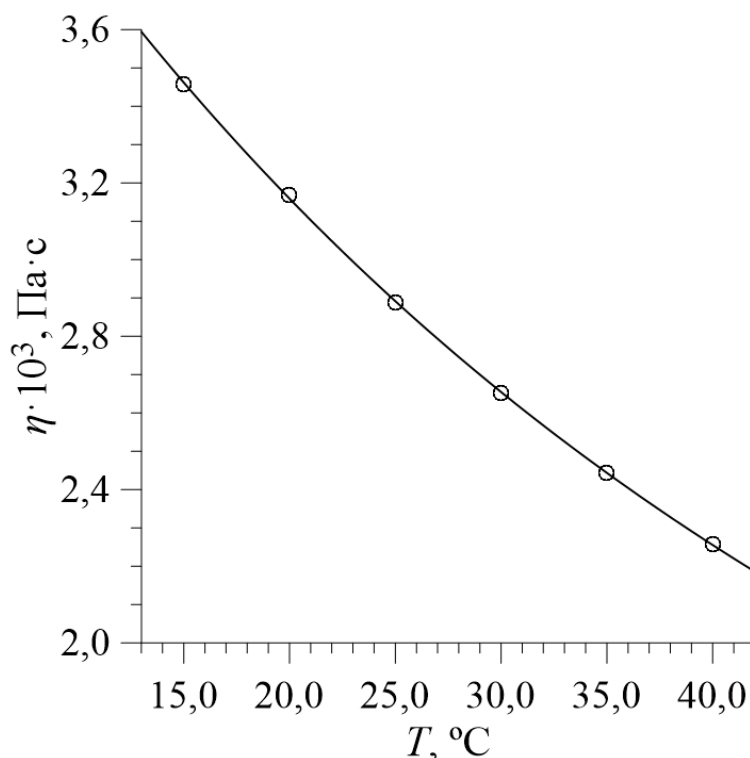


Рисунок 4.1 — Вязкость образца магнитной жидкости, использованного в демонстрационных опытах, в зависимости от температуры. Точки соответствуют результатам измерений ротационным вискозиметром, сплошная линия — аппроксимация по Аррениусу.

Методом магнитогранулометрического анализа кривой намагничивания (рис. 4.2) [80] было получено распределение частиц по диаметрам магнитных

Таблица 6 — Теплофизические свойства образца магнитной жидкости при комнатной (27 °С) температуре.

$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\varphi_s$	$\beta \cdot 10^3$ , К <sup>-1</sup>	$\lambda$ , Вт/(м · К)	$c$ , кДж/(кг · К)	$a \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\eta$ , мПа · с
1,18	0,090	0,60	0,14	1,4	8,3	2,8

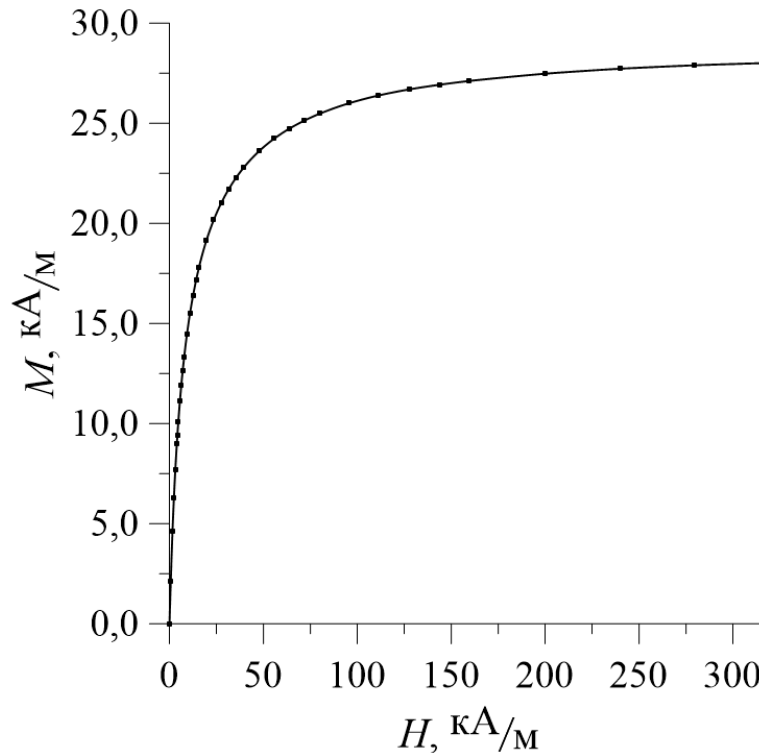


Рисунок 4.2 — Кривая намагничивания магнитной жидкости, использованной в демонстрационных опытах. Точки соответствуют эксперименту, сплошная линия — интерполяция сплайнами.

ядер (рис. 4.3). Из распределения видно, что хоть средний диаметр магнитного ядра частицы  $\langle x \rangle = 9,7$  нм не очень велик, в растворе всё же присутствует значительное количество частиц с диаметрами магнитных ядер свыше 16 нм. Средний магнитный момент частиц составил  $\langle m \rangle = 3,1 \cdot 10^{-19}$  А · м<sup>2</sup>, а намагниченность насыщения  $M_\infty = 29,0$  кА/м. В такой магнитной жидкости капельные агрегаты возникают уже в относительно слабых полях порядка нескольких десятков кА/м. Наложение же неоднородного магнитного поля умеренной напряжённости, еще не приводящего к появлению агрегатов, приводит к усилению теплообмена в замкнутом контуре в 2–4 раза.

Для демонстрации того, что в умеренных (до 29 кА/м) полях вышеописанный образец магнитной жидкости ведёт себя аналогично образцам из гл. 3, а в нулевом магнитном поле — аналогично гомогенной жидкости (§ 2.5), были про-

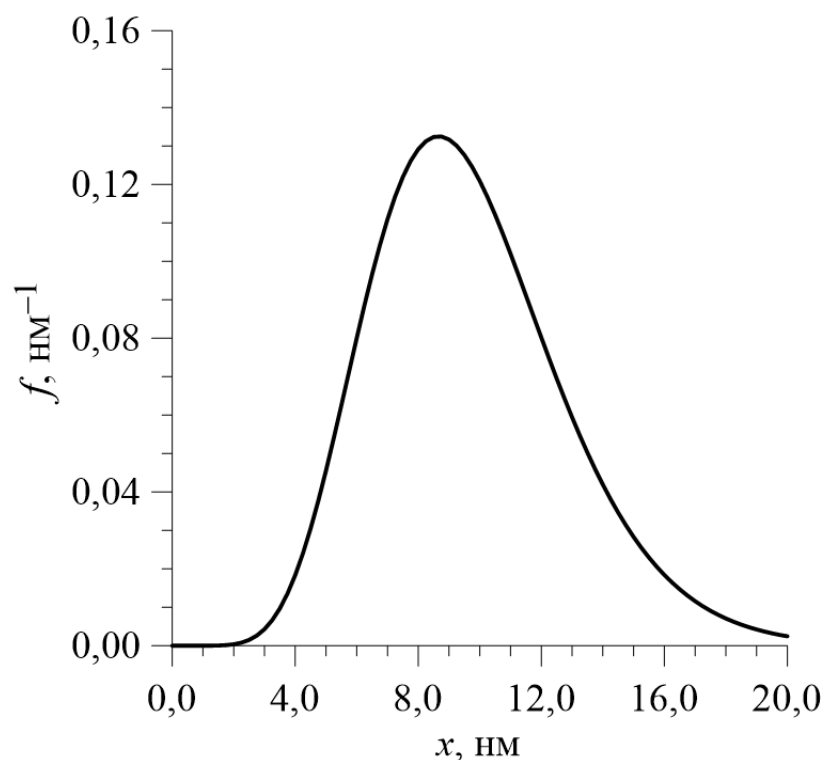
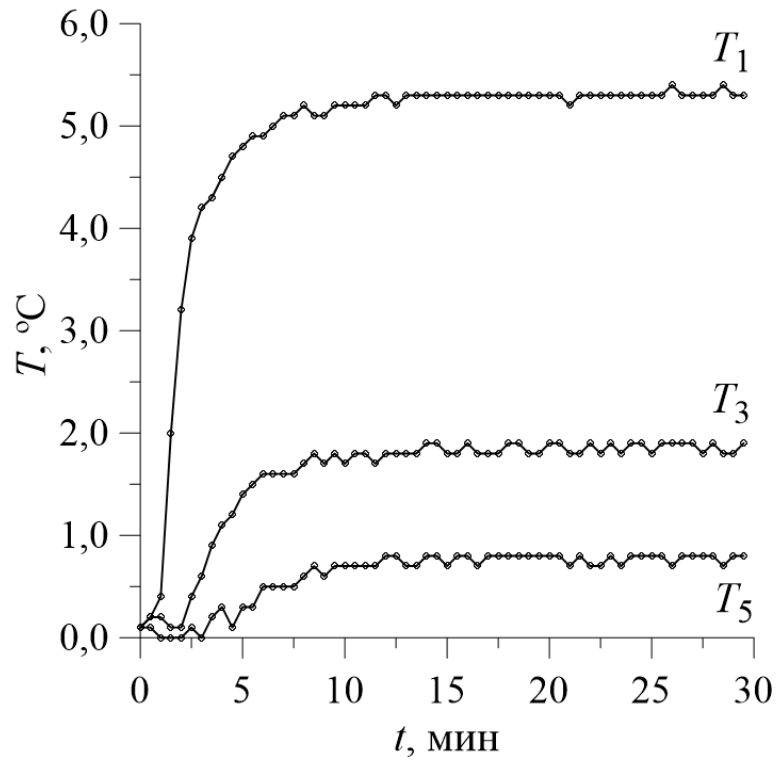


Рисунок 4.3 — Распределение частиц по диаметрам магнитных ядер в образце жидкости, использованном в демонстрационных опытах.

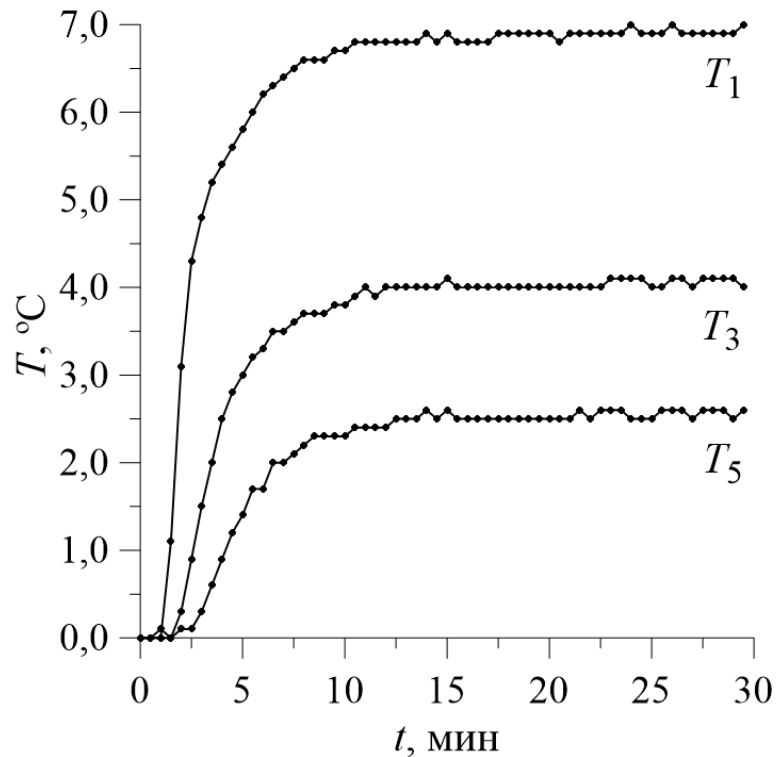
ведены две серии опытов, в которых исследовалось поведение образца в режиме гравитационной и смешанной гравитационной и термомагнитной конвекции.

Термограммы зависимости температуры поверхности контура от времени демонстрируют монотонный выход в режим стационарной конвекции, как в умеренном, так и в нулевом магнитном полях (рис. 4.4). Результаты измерения интегрального безразмерного теплового потока, числа Нуссельта (рис. 4.5), так же не показывают принципиальных отличий от результатов опытов, представленных в гл. 3. Включение магнитного поля умеренной напряжённости приводит к усилению теплообмена в 2–4 раза.

Попытки дальнейшей интенсификации теплообмена потребовали значительного повышения напряжённости магнитного поля. Для этого, магнитная система (рис. 2.4) была заменена на систему близкую по конструкции, но отличающуюся расположением постоянных магнитов. Принципиальные отличия новой магнитной системы от применявшейся ранее показаны на рис. 4.6. Горизонтальная компонента напряжённости поля в центре зазора новой магнитной системы измерялась тесламером Ш1–15–У3 (рис. 4.7а). Амплитуда напряжённости в отсутствие жидкости оказалась около 190 кА/м. Если судить по кривой намагничивания (рис. 4.2), то в поле такой напряженности намагниченность



а) Термограммы опыта в нулевом магнитном поле.



б) Термограммы опыта в умеренном (до 29 кА/м) магнитном поле.

Рисунок 4.4 — Установление стационарного температурного режима в экспериментах с магнитной жидкостью, свойства которой представлены в табл. 6. Нумерация термограмм соответствует нумерации горячих спаев термопар на рис. 2.6.



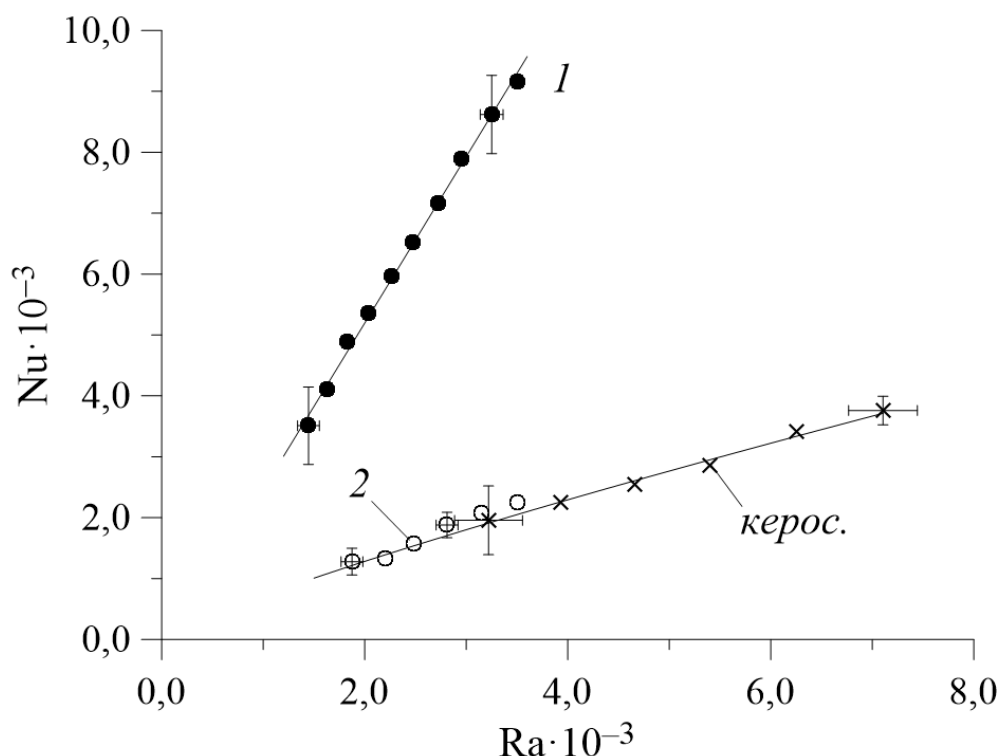
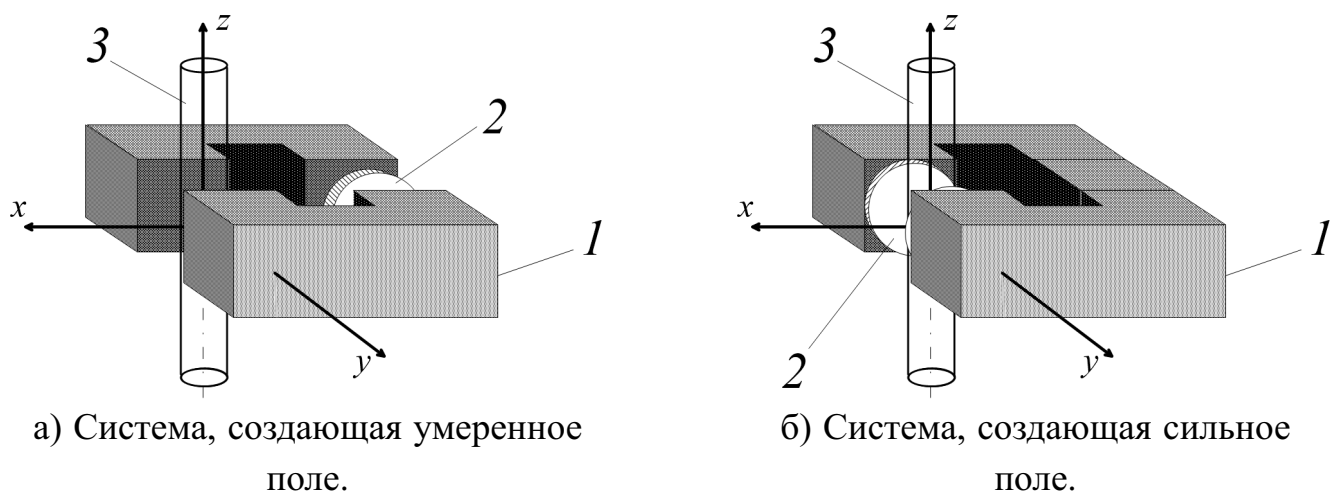


Рисунок 4.5 — Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэлея. 1 — эксперименты с магнитной жидкостью в умеренном магнитном поле, 2 — эксперименты в нулевом магнитном поле. Для наглядности дополнительно показаны результаты опытов с чистым осветительным керосином и линии тренда.

жидкости близка к насыщению ( $M \approx 0.9M_\infty$ ). Поэтому магнитное поле, создаваемое новой системой, будем назвать сильным. По результатам измерений методом конечных разностей оценивался градиент напряжённости магнитного поля. Характерное значение оказалось порядка  $10^7$  А/м<sup>2</sup>, что неудивительно, поскольку поле в зазоре в этой ситуации создавалось непосредственно постоянными магнитами типа «неодим-железо-бор» [6; 103; 104].

Наложение сильного поля на нагреваемый участок контура приводит к, на первый взгляд, неожиданному эффекту — почти полному затуханию конвекции. Соответствующие термограммы представлены на рис. 4.8. Термопары  $T_2$  и  $T_3$  (рис. 2.6) реагируют на глобальное течение, охватывающее весь контур, а термопары  $T_1$  и  $\Delta T$ , — ещё и на локальную конвекцию непосредственно над нагревателем. Время отсчитывается с момента включения нагревателя. Видно, что в нулевом магнитном поле ( $t < 162$  мин) в контуре возникает циркуляционная гравитационная конвекция, регистрируемая термопарами  $T_2$ ,  $T_3$ . Отметим, что в отсутствии конвекции распределение температуры вдоль контура должно



1 — ферритовый магнитопровод, 2 — постоянные магниты, 3 — нагреваемый участок контура

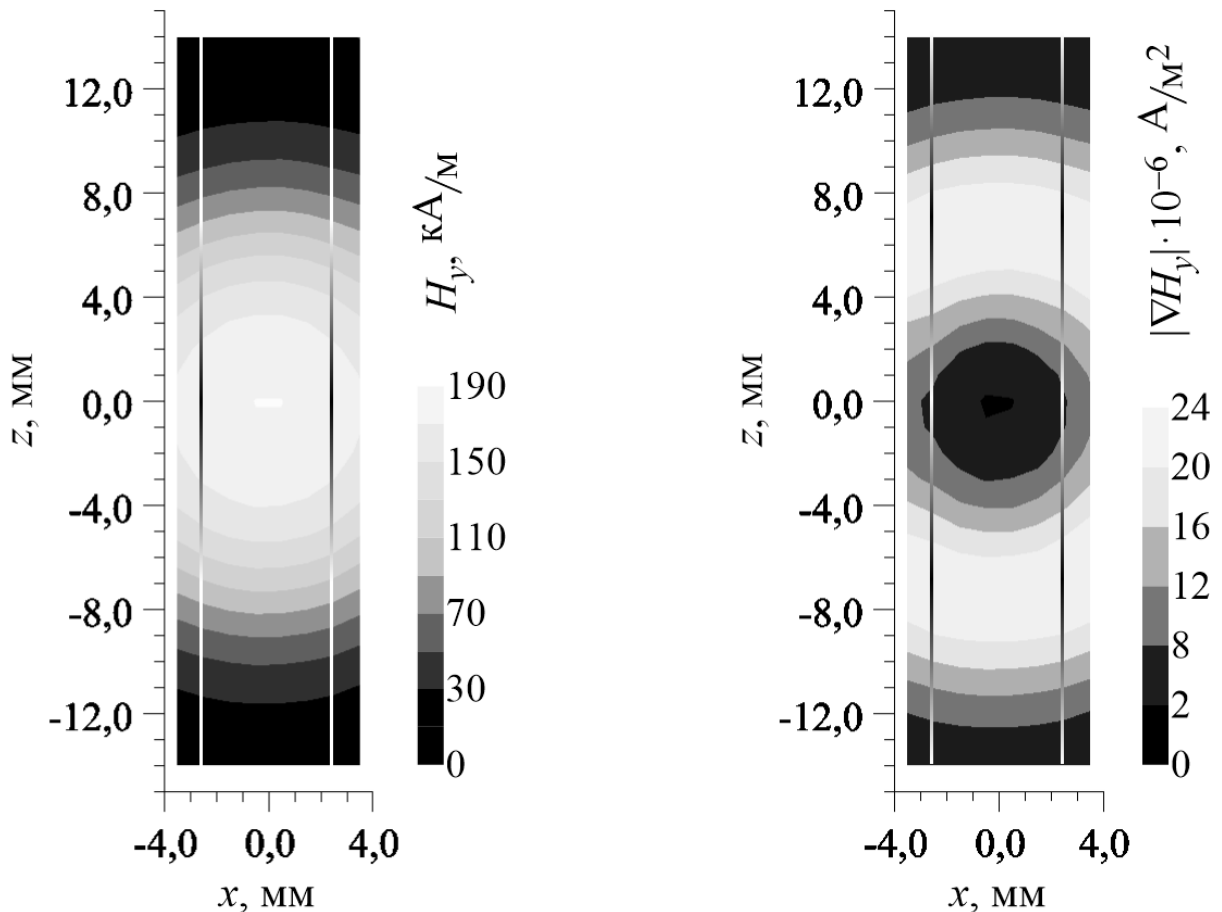
Рисунок 4.6 — Схематичное изображение намагничивающих систем, использованных в конвективных экспериментах.

быть симметричным относительно центра нагревателя, а перепад температуры на нагревателе  $\Delta T = 0$ .

Включение сильного магнитного поля при  $t = 162$  мин приводит сначала к ослаблению глобальной циркуляции, а затем к её полной блокировке (рис. 4.8а). Стационарное распределение температуры вдоль контура установилось за 50–60 мин и сохранялось неизменным как минимум в течение суток (рис. 4.8б). В стационарном режиме температуры  $T_2$  и  $T_3$  измеряемые относительно температуры воздушного термостата (см. § 2.1), оказались ниже порога чувствительности измерительного прибора. Это говорит о практическом равенстве температуры части контура, удалённой от нагревателя, и температуры охлаждающего воздуха.

Локальная конвекция, возникающая вблизи нагревателя, приводит к некоторому изменению температуры  $T_1$  и перепада  $\Delta T$ , поскольку включается дополнительный термомагнитный механизм конвекции. Независимо от структуры конвективных течений вблизи нагревателя они локализованы на небольшом участке контура и не способны существенно повлиять на интегральный теплообмен. Таким образом, увеличение амплитуды магнитного поля с 29 кА/м до 190 кА/м не только не усиливает глобальную термомагнитную конвекцию, но и блокирует сравнительно слабую гравитационную.

Причиной такого результата предполагается образование капельных агрегатов и их осаждение на стенках нагревателя вследствие магнитофореза.



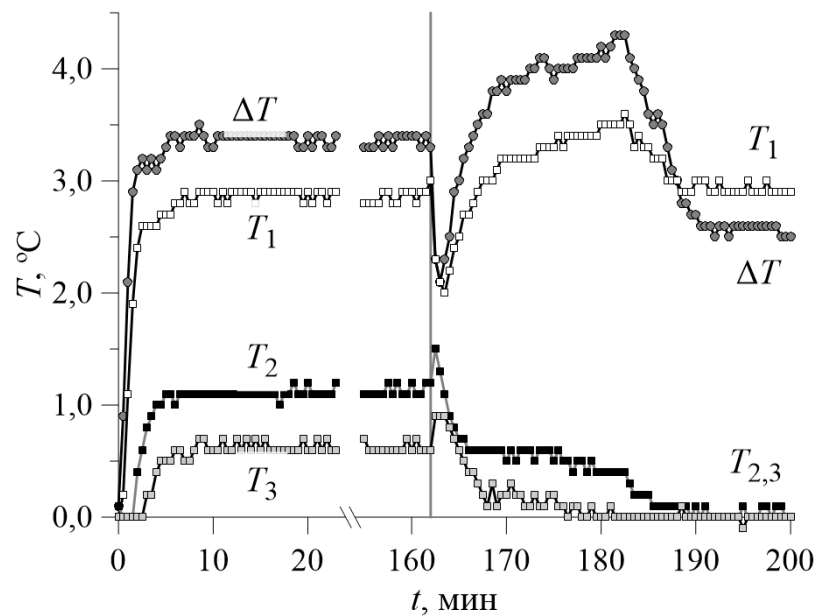
а) Горизонтальная компонента напряжённости поля.

б) Модуль градиента горизонтальной компоненты напряжённости.

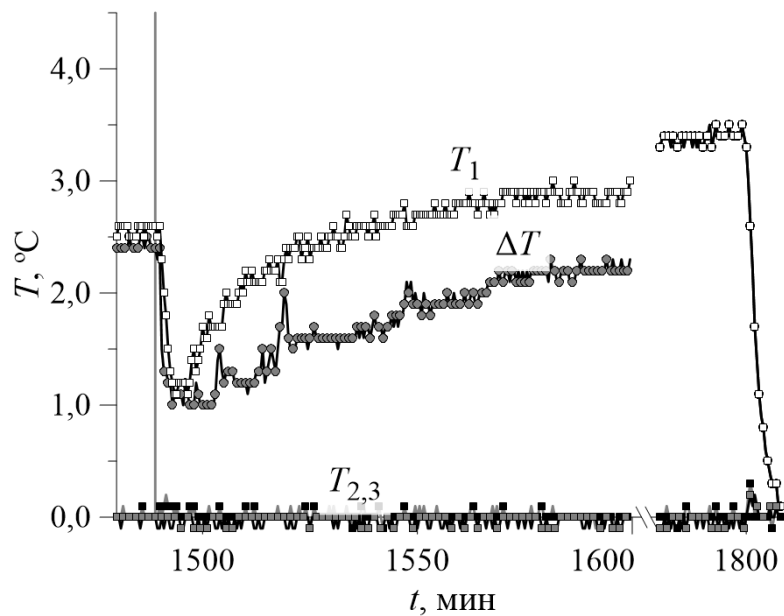
Рисунок 4.7 — Сильное магнитное поле ( $H_{\max} = 190$  кА/м) в зазоре намагничивающей системы. Контрастными вертикальными линиями показана внешняя граница жидкости в контуре.

Участок трубки, находящийся в магнитном поле, работает как магнитный фильтр, накапливая агрегаты до тех пор, пока сечение канала не перекроется полностью из-за образовавшегося «тромба». Этот процесс можно считать достаточно быстрым, поскольку он лимитируется скоростью магнитофореза капельных агрегатов (порядка  $10^{-2}$  мм/с [128]) и в условиях эксперимента завершается за 20–30 мин.

Магнитное поле было выключено через 25 часов после начала опыта, и соответствующая термограмма приведена на рис. 4.86. Температура  $T_1$  и перепад температур на нагревателе  $\Delta T$  медленно увеличиваются, что говорит о восстановлении локализованной в нагревателе конвекции, существовавшей в начале опыта, однако, глобальное циркуляционное течение отсутствует из-за образовавшегося в нагревателе тромба. Такой результат выглядит естественным, так как



а) Затухание глобальной конвекции в момент включения (вертикальная линия) магнитного поля.



б) Отсутствие глобальной конвекции после выключения (вертикальная линия) магнитного поля.

Рисунок 4.8 — Термограммы опыта, демонстрирующего ослабление тепловой конвекции магнитной жидкости в сильном магнитном поле.

растворение тромба из капельных агрегатов лимитируется очень медленными процессами диффузии коллоидных частиц. Характерное диффузионное время  $\tau = \pi^2 r_1^2 / D$ , где  $D \sim 10^{-7} \text{ см}^2/\text{с}$  — коэффициент диффузии. При радиусе канала  $r_1 = 2,6 \text{ мм}$  это время  $\tau \approx 700 \text{ ч}$  (29 суток) становится неприемлемо большим для экспериментальных наблюдений. По этой причине опыт был принудительно завершён выключением нагревателя спустя 30 часов. Попытка запуска глобальной циркуляции жидкости в контуре в режиме гравитационной конвекции (без магнитного поля), предпринятая спустя ещё приблизительно 30 ч, так же оказалась безуспешной. Как видно из рис. 4.9 при включении нагревателя вновь «прогревается» область вблизи нагревателя, а глобальное течение в контуре отсутствует. Это наблюдение служит ещё одним аргументом в пользу гипотезы о тромбировании контура капельными агрегатами.

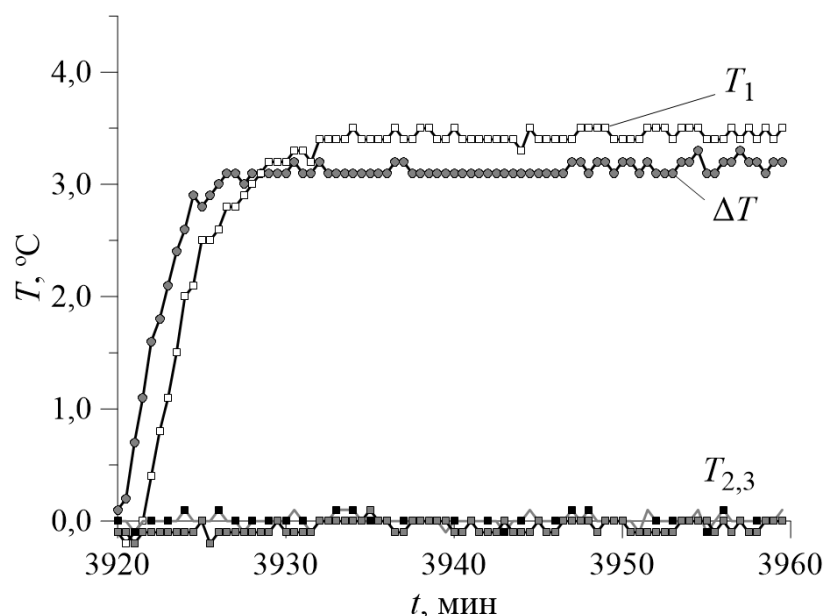


Рисунок 4.9 — Термограмма опыта, демонстрирующего отсутствие охватывающей контур гравитационной конвекции магнитной жидкости при повторном включении нагревателя спустя сутки после опытов, представленных на рис. 4.8.

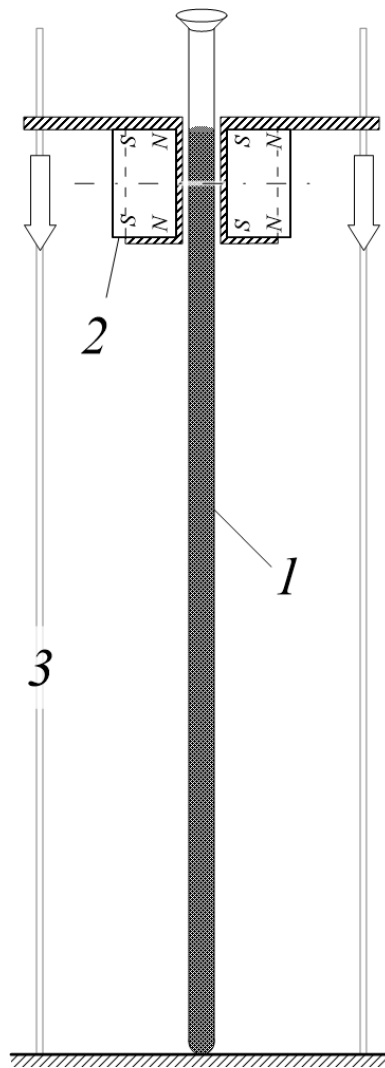
## 4.2 Подготовка и свойства термодинамически устойчивой феррожидкости

С целью предотвращения образования капельных агрегатов, препятствующих развитию термомагнитной конвекции в сильном поле, магнитная жидкость

была подвергнута магнитной сепарации. В качестве исходной была взята жидкость типа «магнетит–керосин–олеиновая кислота» умеренной концентрации (около  $\varphi_s = 4\%$  объёмной доли кристаллического магнетита). Процесс сепарации заключается в продолжительном воздействии на сосуд с феррожидкостью градиентного магнитного поля.

Для проведения процесса была использована установка, многократно применявшаяся ранее [138] в экспериментах, связанных с отбором капельных агрегатов из феррожидкостей. Длинная вертикальная пробирка (рис. 4.10), заполненная феррожидкостью, помещается вблизи постоянных магнитов, которые медленно, со скоростью около 6 см/ч, опускаются вдоль пробирки, двигаясь по жёстким вертикальным направляющим. Для проведения сепарации были использованы два аксиально-намагниченных цилиндрических магнита типа «неодим-железо-бор» диаметром 20 мм и высотой 10 мм, расположенные относительно пробирки как показано на рисунке 4.10. Такое расположение магнитов на первый взгляд неудачно, поскольку горизонтальные градиенты магнитного поля оказываются достаточно велики, чтобы образовавшиеся капельные агрегаты налипали на стенки пробирки. В процессе отбора сепарированной жидкости из пробирки некоторая часть агрегатов со стенок попадала обратно в раствор. Предпочтительнее было бы использовать кольцевой магнит, располагая пробирку с жидкостью на его оси. В этой ситуации радиальные градиенты поля малы, а магнит в процессе движения увлекает капельные агрегаты за собой, в нижнюю часть пробирки. Однако, имеющиеся в доступе кольцевые магниты не позволяли достичь требуемой для целей эксперимента напряжённости магнитного поля (свыше 190 кА/м), в результате чего выбор пал на вышеописанную схему с амплитудой напряжённости поля около 300 кА/м. После прохода магнитов вдоль всей пробирки, оставшаяся термодинамически устойчивая жидкость отбиралась для использования в экспериментах.

Плотность жидкости до и после сепарации измерялась пикнометром, вязкость — ротационным вискозиметром Brookfield. Кривые намагничивания исходного и сепарированного образцов жидкости измерялись методом дифференциальной прогонки и приведены на рис. 4.11. По кривым намагничивания методом магнитогранулометрического анализа [80] были вычислены средний магнитный момент  $\langle m \rangle$  и концентрация частиц  $n$ . Результаты измерений сведены в таблицу 7.



*1* — пробирка с жидкостью, *2* — система постоянных магнитов, *3* — жёсткие вертикальные направляющие.

Рисунок 4.10 — Схема установки для магнитной сепарации феррожидкости. Направление движения магнитной системы по направляющим указано стрелками.

Таблица 7 — Физические свойства исходного и сепарированного образцов магнитной жидкости в интервале температур 20–25 °С близких к комнатной.

	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\varphi_s$	$\eta$ , мПа · с	$n \cdot 10^{-22}$ , м <sup>-3</sup>	$M_\infty$ , кА/м	$\langle m \rangle \cdot 10^{19}$ , А · м <sup>2</sup>	$\chi_0$
Исходн.	0,963	0,0412	1,59	3,87	11,3	2,90	0,860
Сепар.	0,944	0,0369	1,57	3,76	10,1	2,63	0,656

Из таблицы 7 видно, что сепарирование магнитной жидкости привело лишь к небольшому (2–3 %) изменению плотности, вязкости и концентрации частиц. Более существенное уменьшение наблюдается в величине среднего магнитного момента частиц (9 %), начальной магнитной восприимчивости (24 %) и намагниченности насыщения жидкости (11 %). Такой результат свидетельствует

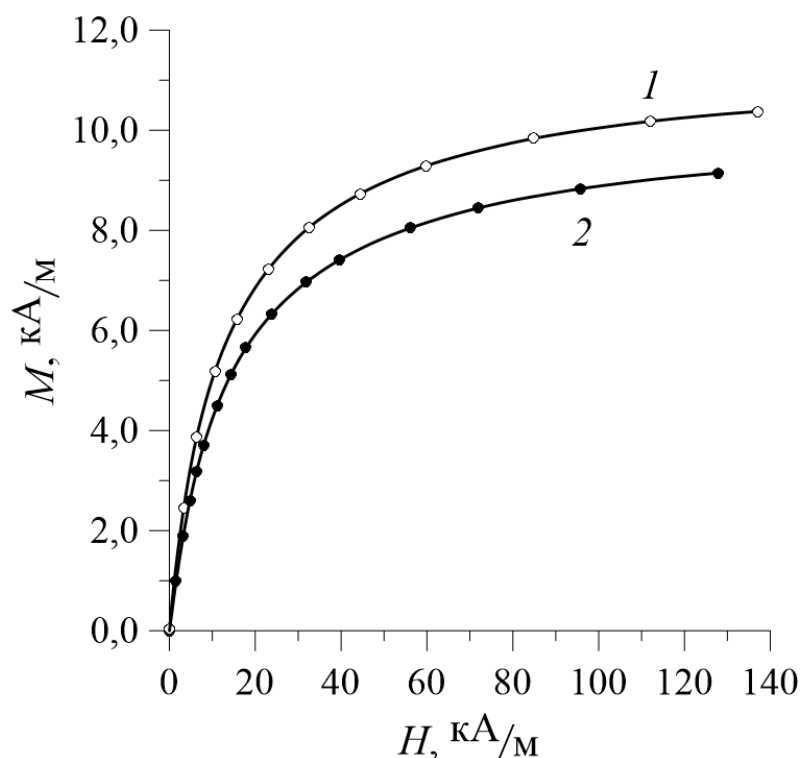


Рисунок 4.11 — Кривые намагничивания исходного 1 и сепарированного 2 образцов магнитной жидкости. Точки — эксперимент, сплошные линии — интерполяция сплайнами.

об удалении из раствора, по крайней мере некоторой части, наиболее крупных частиц с наибольшей энергией межчастичных взаимодействий, ответственных за формирование капельных агрегатов. Изменение дисперсного состава жидкости после сепарации отражено и в функции распределения частиц по диаметрам магнитных ядер (рис. 4.12). График функции распределения сместился влево, а высота максимума увеличилась, что говорит об увеличении относительной концентрации сравнительно мелких частиц. Слабое различие кривых на рис. 4.12 свидетельствует о невысоком качестве магнитной сепарации, что обусловлено, по-видимому, конструкцией магнитной системы. Впрочем, магнитный момент коллоидной частицы определяется её объёмом, то есть пропорционален кубу диаметра магнитного ядра  $x$ . Поэтому, на первый взгляд незначительное уменьшение вероятности обнаружения крупных частиц в растворе привело к значительному уменьшению среднего магнитного момента. Как будет видно далее в § 4.3 такой подготовки образца оказалось достаточно.



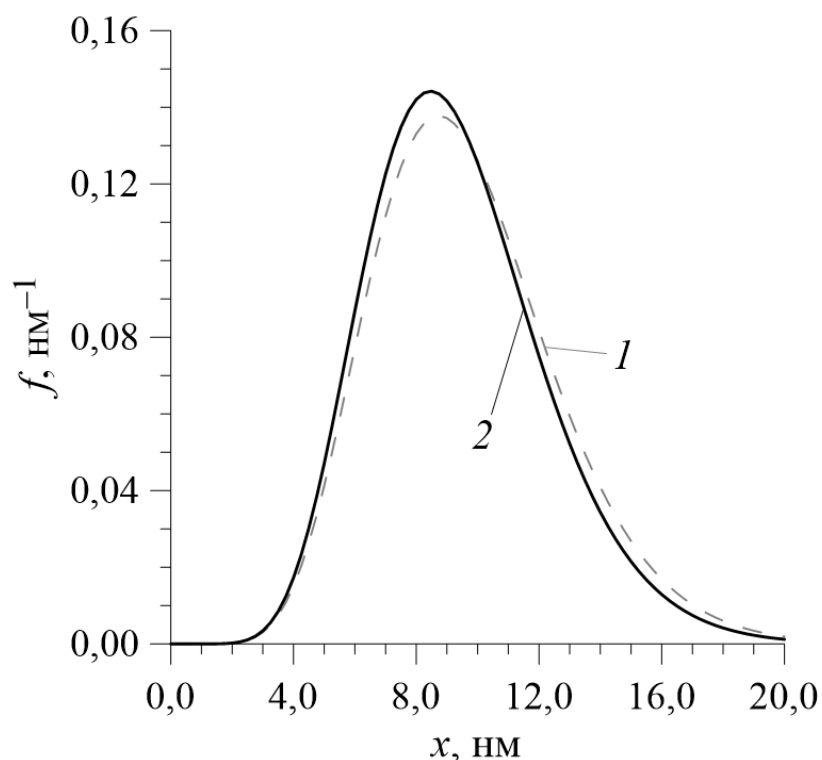


Рисунок 4.12 — Распределение частиц по диаметрам магнитных ядер в исходном (штриховая линия 1) и сепарированном (сплошная линия 2) образцах магнитной жидкости.

### 4.3 Эксперименты с сепарированной феррожидкостью в сильном поле

Эксперименты с сепарированной феррожидкостью были направлены на проверку её качества с точки зрения агрегативной устойчивости и получение информации о конвективном тепловом потоке (числе Нуссельта) в сильном магнитном поле.

Термограмма, демонстрирующая динамику температуры вдоль контура при включении магнитного поля, представлена на рис. 4.13. Время отсчитывается с момента включения нагревателя. Стационарная гравитационная конвекция, как и ранее в § 4.1, развивается за  $\Delta t \approx 20$  мин. Магнитное поле включается при  $t = 55$  мин, и после непродолжительного, около 5 мин, переходного процесса в контуре устанавливается новое стационарное распределение температуры.

Уменьшение перепада температуры на нагревателе  $\Delta T$  и увеличение температуры  $T_3$  на противоположном вертикальном участке петли (см. рис. 2.6) говорит об интенсификации конвективного переноса тепла.

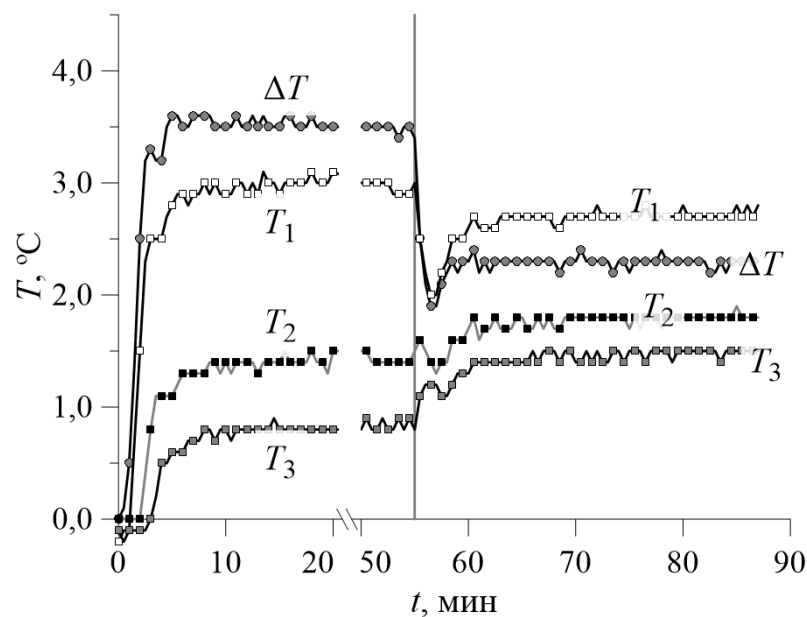


Рисунок 4.13 — Термограмма опыта, демонстрирующего усиление конвективного теплопереноса феррожидкостью в сильном магнитном поле. Момент включения поля обозначен вертикальной чертой.

Дальнейшие эксперименты проходили точно так, как описано в § 2.5. Проводилось две серии опытов: в нулевом магнитном поле и в сильном неоднородном магнитном поле. Примеры стационарных профилей температуры вдоль охлаждаемой части контура приведены на рисунке 4.14 для различных перепадов температуры в нагревателе. Заметно (рис. 4.14), что в опытах с магнитной жидкостью в градиентном поле распределение температуры описывается экспонентой несколько хуже, чем в случае нулевого магнитного поля. Завышенной выглядит температура  $T_1$  вблизи выходного сечения нагревателя, которой соответствуют крайние левые точки на кривых 3 и 4. Возможно, это является следствием цилиндрической асимметрии магнитного поля на нагретом участке, которая незаметна в опытах по гравитационной конвекции. Впрочем, такое систематическое отклонение не является значимым в сравнении с наблюдаемым эффектом: наклон кривых (пространственный декремент затухания температуры  $k$ ), соответствующий опытам в магнитном поле примерно в 2,5 раза меньше наклона кривых 1 и 2, соответствующих гравитационной конвекции. Согласно формуле (2.20) это означает примерно шестикратное усиление конвективного теплообмена за счёт пондеромоторных сил.

Зависимость числа Нуссельта от теплового числа Рэлея для экспериментов с образцом жидкости, подвергнутом магнитной сепарации показана на рисунке 4.15. Для сравнения, на рисунке приведены результаты опытов в умеренном

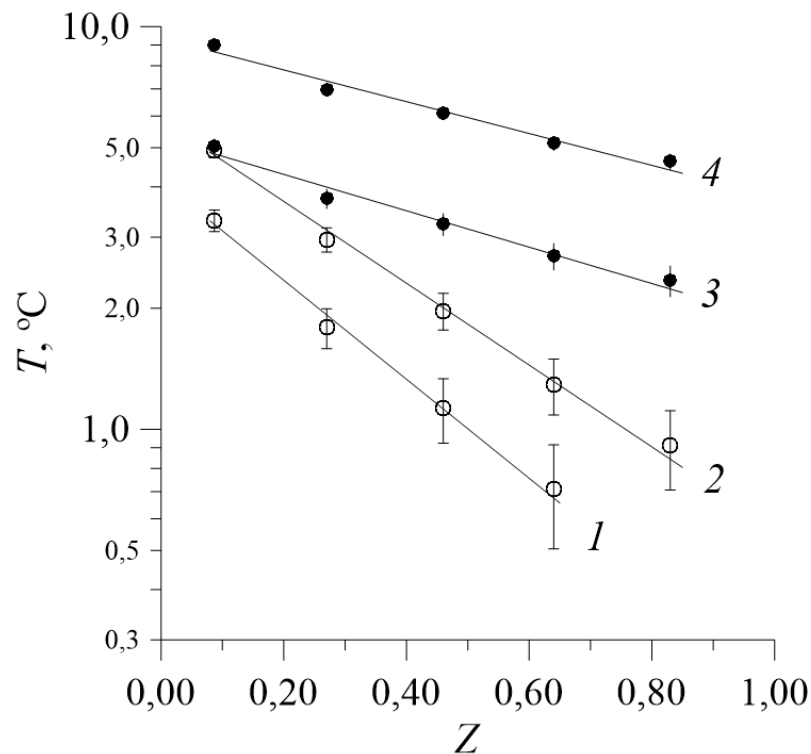


Рисунок 4.14 — Установившийся профиль температуры вдоль поверхности контура с сепарированной магнитной жидкостью при различных перепадах температур  $\Delta T$  на нагревателе. Опыты в нулевом магнитном поле: 1 — 3,6 °C, 2 — 5,2 °C. Опыты в сильном магнитном поле: 3 — 3,3 °C, 4 — 5,0 °C. Символы соответствуют эксперименту, сплошные линии — аппроксимации экспонентами.

поле (29 кА/м) с образцом жидкости № 4 (табл. 3) близким по теплофизическим параметрам к сепарированному образцу. Дополнительно, представлены результаты опытов по гравитационной конвекции керосина. Как видно из рисунка в области тепловых чисел Рэлея  $3 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3$  безразмерный осевой тепловой поток в магнитной жидкости при наложении сильного поля на участок контура вблизи нагревателя в 6–7 раз превосходит теплоток при гравитационной конвекции и более чем в 2 раза превосходит тепловой поток в близкой по свойствам жидкости, на которую воздействует поле умеренной напряжённости. Этот результат с одной стороны показывает возможность интенсификации теплообмена в замкнутом контуре за счёт термомагнитной конвекции в сильном поле и, с другой стороны, демонстрирует необходимость извлечения из феррожидкости крупных частиц, ответственных за её концентрационное расслоение.

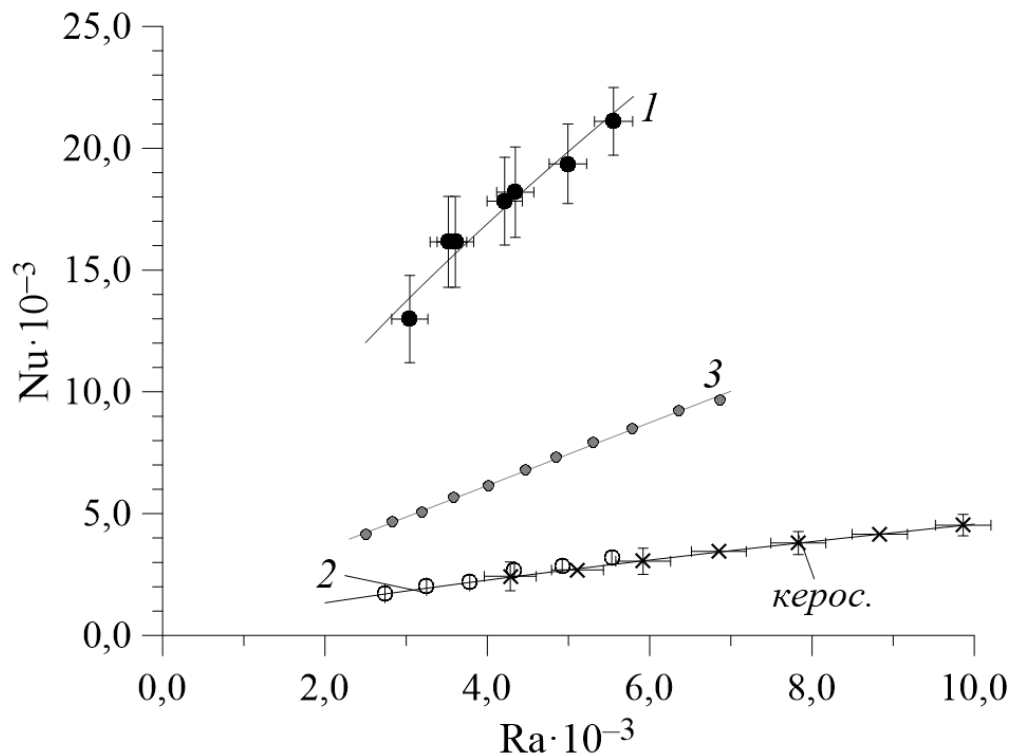


Рисунок 4.15 — Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэлея. Точки 1 соответствуют экспериментам с феррожидкостью в сильном поле, 2 — экспериментам в нулевом магнитном поле. Точки 3 соответствуют опытам с феррожидкостью из § 3.2 в умеренном поле. Линии тренда служат повышению наглядности результатов.

## Заключение

Основные **результаты работы** заключаются в следующем:

1. Спроектирована, изготовлена и протестирована оригинальная экспериментальная установка для исследования теплового конвективного течения магнитной жидкости в локально нагреваемом сбоку замкнутом вертикальном протяжённом контуре, коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности которого поддерживается постоянным.
2. Экспериментально показано, что в условиях стационарной конвекции вдоль охлаждаемой части контура устанавливается экспоненциальное распределение температуры.
3. Впервые построена двумерная модель теплообмена в контуре, позволяющая рассчитать скорость потока жидкости, объёмный расход и безразмерный интегральный тепловой поток (число Нуссельта) через определяемые в эксперименте показатель экспоненты и число Био.
4. Впервые установлено, что наибольшее усиление теплопереноса за счёт термомагнитной конвекции достигается при использовании в контуре магнитной жидкости с объёмной долей кристаллического магнетита 6–8 %.
5. По результатам температурных измерений определена характерная скорость комбинированной (гравитационной и термомагнитной) конвекции в замкнутом контуре. В магнитном поле напряжённостью 29 кА/м амплитуда скорости варьировалась от 3 до 6 мм/с, нелинейно увеличиваясь с мощностью нагревателя.
6. Впервые установлено, что наложение области с наибольшим градиентом магнитного поля на выходное сечение нагревателя обеспечивает максимальный конвективный теплоперенос при прочих равных условиях. При этом в магнитном поле с амплитудой 29 кА/м интенсивность конвективного теплопереноса увеличивается в два–четыре раза по сравнению с конвекцией в нулевом поле.
7. Предложена гипотеза, объясняющая сильное влияние дисперсного состава частиц на интенсивность конвекции формированием в магнитной жидкости капельных агрегатов. Впервые показано, что использование феррожидкости, очищенной от частиц, ответственных за формирование

капельных агрегатов, позволяет использовать магнитное поле с амплитудой до 190 кА/м и получить усиление безразмерного интегрального теплопотока в шесть и более раз.

### **Перспективы дальнейшей разработки темы**

Представленная диссертационная работа демонстрирует перспективность использования магнитной жидкости в качестве теплоносителя в теплообменных аппаратах, не оборудованных механическим насосом. Однако, проведённое исследование не исчерпывает вопрос об интенсификации теплообмена за счёт термомагнитной конвекции. В дальнейших опытах необходимо исследовать течение в контуре бóльшего размера и с бóльшим объёмом жидкости. Основное внимание требуется сосредоточить на повышении отводимой от нагревателя тепловой мощности вплоть до  $10^2$  Вт по порядку величины. Числа Рэлея в экспериментах должны превышать  $10^5$ . Стабильная работа контура в таких условиях позволит приблизить начало работ по непосредственному проектированию безнасосных магнитожидкостных охлаждающих устройств для технических нужд: охлаждения электронных чипов, поддержания стабильной температуры солнечных панелей и прочих.

Фундаментальный и прикладной интерес представляет изучение теплообмена при термомагнитной конвекции феррожидкости, наночастицы которой имеют низкую температуру Кюри. В таком растворе магнитное число Рэлея при прочих равных условиях ожидается бóльшим чем в феррожидкостях на основе магнетита из-за большого температурного коэффициента намагничённости. Теоретические изыскания в этом направлении были начаты ещё в XX веке, однако, доступная информация об экспериментальных исследованиях фрагментарна.

**Список литературы**

1. *Koskov, M.* Technical framework for studying thermomagnetic convection in an extended closed loop [Текст] / М. Koskov // *Magnetohydrodynamics*. — 2022. — Vol. 58, no. 3. — P. 267–274.
2. *Pshenichnikov, A. F.* Thermomagnetic pump and thermomagnetic convection in a closed hydrodynamic loop [Текст] / А. F. Pshenichnikov, М. А. Koskov // *Physics of Fluids*. — 2024. — Vol. 36, no. 092023.
3. *Косков, М. А.* Термомагнитная конвекция феррожидкости в вертикальном гидродинамическом контуре: интенсификация теплообмена в магнитном поле [Текст] / М. А. Косков, А. Ф. Пшеничников // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2022. — Т. 162, 6(12). — С. 926–940.
4. *Косков, М. А.* Конвекция феррожидкости в замкнутом контуре: анализ температурного поля [Текст] / М. А. Косков // *Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии*. — 2022. — Т. 12, № 2. — С. 166–182.
5. *Косков, М. А.* Конвекция магнитной жидкости в замкнутом гидродинамическом контуре [Текст] / М. А. Косков, А. Ф. Пшеничников // *Вестник Пермского университета. Физика*. — 2021. — № 2. — С. 14–22.
6. *Косков, М. А.* Термомагнитная конвекция в гидродинамическом контуре: роль капельных агрегатов [Текст] / М. А. Косков, А. Ф. Пшеничников // *Вестник Пермского университета. Физика*. — 2023. — № 4. — С. 45–54.
7. *Косков, М. А.* Влияние расположения источника неоднородного магнитного поля на интенсивность термомагнитной конвекции в замкнутом контуре [Текст] / М. А. Косков // *Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии*. — 2024. — Т. 14, № 3. — С. 52–64.
8. *Filed Ser. No. 315,096 C06B23/00.* Low viscosity magnetic fluid obtained by the colloidal suspension of magnetic particles [Текст] / S. S. Papell (USA). — No. 3215572 ; 10/09/1963. — 4 p.

9. *Заявка 1801123 СССР, МПК G01G 49/08. Способ получения феррожидкости [Текст] / Е. Е. Бибик, И. С. Лавров (СССР) ; Ленинградский Ордена трудового красного знамени технологический институт им. Ленсовета. — № 457666 ; заявл. 22.06.1972. — 2 с.*
10. *Шлиомис, М. И. Магнитные жидкости [Текст] / М. И. Шлиомис // Успехи физических наук. — 1974. — Т. 112, № 3.*
11. *Розенцвейг, Р. Феррогидродинамика [Текст] : пер. с англ. / Р. Розенцвейг. — М. : Мир, 1989. — 356 с.*
12. *Берковский, Б. М. Магнитные жидкости [Текст] / Б. М. Берковский, В. Ф. Медведев, М. С. Краков. — М. : Химия, 1989.*
13. *Блум, Э. Я. Магнитные жидкости [Текст] / Э. Я. Блум, М. М. Майоров, А. О. Цеберс. — Рига : Зинатне, 1989. — 386 с.*
14. *Mamiya, H. Phase Transitions of Iron-Nitride Magnetic Fluids [Текст] / H. Mamiya, I. Nakatani, T. Furubayashi // Physical Review Letters. — 2000. — Vol. 84, no. 6106.*
15. *Pshenichnikov, A. F. Low-temperature susceptibility of concentrated magnetic fluids [Текст] / A. F. Pshenichnikov, A. V. Lebedev // Journal of Chemical Physics. — 2004. — Vol. 121. — P. 5455—5467.*
16. *Rosensweig, R. E. Buoyancy and Stable Levitation of a Magnetic Body immersed in Magnetizable Fluid [Текст] / R. E. Rosensweig // Nature. — 1966. — Vol. 210. — P. 613—614.*
17. *Spherical magnetizable body partially immersed in a magnetic fluid in a uniform magnetic field [Текст] / D. A. Pelevina [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2020. — Vol. 494, no. 165751.*
18. *Ivanov, A. S. Floating of solid non-magnetic bodies in magnetic fluids: Comprehensive analysis in the framework of inductive approach [Текст] / A. S. Ivanov, A. F. Pshenichnikov, C. A. Khokhryakova // Physics of Fluids. — 2020. — Vol. 32, no. 112007.*
19. *Квитанцев, А. С. Левитация магнитов и тел из магнитомягких материалов в сосудах, заполненных магнитной жидкостью [Текст] / А. С. Квитанцев, В. А. Налетова, В. А. Турков // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2002. — № 3. — С. 12—20.*



20. *Shliomis, M.* Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field [Текст] / M. Shliomis, K. I. Morozov // *Physics of Fluids*. — 1994. — Vol. 6. — P. 2855–2861.
21. *Zahn, M.* Ferrofluid flows in AC and traveling wave magnetic fields with effective positive, zero or negative dynamic viscosity [Текст] / M. Zahn, L. L. Pioch // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 1999. — Vol. 201, no. 1. — P. 144–148.
22. *Rosensweig, R. E.* Magnetic fluid motion in rotating field [Текст] / R. E. Rosensweig, J. Popplewell, R. J. Johnston // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 1990. — Vol. 85, no. 1–3. — P. 171–180.
23. *Lebedev, A. V.* Rotational effect: The influence of free or solid moving boundaries [Текст] / A. V. Lebedev, A. F. Pshenichnikov // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 1993. — Vol. 122, no. 1–3. — P. 227–230.
24. *Shliomis, M. I.* How a rotating magnetic field causes ferrofluid to rotate [Текст] / M. I. Shliomis // *Physical Review Fluids*. — 2021. — Vol. 6, no. 043701.
25. *Lord Rayleigh, O.M. F.R.S.* LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side [Текст] / O.M. F.R.S. Lord Rayleigh // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. — 1916. — Vol. 32, no. 192. — P. 529–546.
26. *Гершуни, Г. З.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости [Текст] / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. — Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972. — 392 с.
27. *Ландау, Л. Д.* Курс теоретической физики в 10 т. [Текст] : Гидродинамика. Т. 6 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 736 с.
28. *Finlayson, B. A.* Convective instability of ferromagnetic fluids [Текст] / B. A. Finlayson // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1970. — Vol. 40, no. 1. — P. 753–767.
29. *Гершуни, Г. З.* Устойчивость конвективных течений [Текст] / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. — М. : Наука, 1989. — 320 с.

30. *Остроумов, Г. А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи [Текст] / Г. А. Остроумов. — М.-Л. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952.
31. The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty [Электронный ресурс]. — Gaithersburg, USA : National Institute of Standards, Technology, 2024. — URL: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.
32. *Фертман, В. Е.* Магнитные жидкости [Текст] : Справочное пособие / В. Е. Фертман. — Мн. : Высшая школа, 1988. — 184 с.
33. *Rahman, H.* Thermomagnetic convection in a layer of ferrofluid placed in a uniform oblique external magnetic field [Текст] / H. Rahman, S. A. Suslov // Journal of Fluid Mechanics. — 2015. — Vol. 764. — P. 316—348.
34. *Сидоров, Александр Сергеевич.* Термомагнитная конвекция в вертикальном слое магнитной жидкости [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 1.2.5 / Сидоров Александр Сергеевич. — Пермь, 2019. — 138 с.
35. *Богатырёв, Г. П.* Конвективная устойчивость горизонтального слоя ферромагнитной жидкости в однородном магнитном поле [Текст] / Г. П. Богатырёв, Г. Ф. Шайдуров // Магнитная гидродинамика. — 1976. — № 3. — С. 137—146.
36. *Bozhko, A. A.* Heat transfer and flow patterns in ferrofluid convection [Текст] / A. A. Bozhko, G. F. Putin // Magnetohydrodynamics. — 2003. — Vol. 39, no. 2. — P. 147—168.
37. *Matura, P.* Thermomagnetic convection in a ferrofluid layer exposed to a time-periodic magnetic field [Текст] / P. Matura, M. Lücke // Physical Review E. — 2009. — Vol. 80, no. 2 026314.
38. *Божко, А. А.* Особенности конвективного теплопереноса в магнитных наножидкостях [Текст] / А. А. Божко, Г. Ф. Путин // Вестник пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 4. — С. 25—31.
39. *Колчанов, Николай Викторович.* Гравитационная конвекция в горизонтальном слое магнитной жидкости [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 1.2.5 / Колчанов Николай Викторович. — Пермь, 2018. — 115 с.

40. *Belyaev, A. V.* The stability of ferrofluid flow in a vertical layer subject to lateral heating and horizontal magnetic field [Текст] / A. V. Belyaev, B. L. Smorodin // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2010. — Vol. 322. — P. 2596–2606.
41. *Suslov, S. A.* Thermomagnetic convective flows in a vertical layer of ferrocolloid: Perturbation energy analysis and experimental study [Текст] / S. A. Suslov, S. A. Bozhko A. A. and Sidorov, G. V. Putin // Physical Review E. — 2012. — Vol. 86, no. 016301.
42. *Krakov, M. S.* Influence of the uniform field on natural convection in cubic enclosure: experiment and numerical simulation [Текст] / M. S. Krakov, I. V. Nikiforov, A. G. Reks // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2005. — Vol. 289. — P. 272–274.
43. Experimental and numerical investigation of natural convection of magnetic fluids in a cubic cavity [Текст] / H. Yamaguchi [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2009. — Vol. 321, no. 22. — P. 3665–3670.
44. The use of ferrofluids for heat removal: Advantage or disadvantage? [Текст] / M. T. Krauzina [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2017. — Vol. 431. — P. 241–244.
45. *Краузина, Марина Тахировна.* Свободная конвекция магнитной жидкости в шаровой полости в гравитационном и магнитном полях [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 1.2.5 / Краузина Марина Тахировна. — Пермь, 2019. — 134 с.
46. *Черепанов, И. Н.* Анализ течений магнитной жидкости в вертикальном канале при нагреве сбоку [Текст] / И. Н. Черепанов, Б. Л. Смородин, А. С. Сидоров // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2019. — Т. 155, № 2. — С. 371–381.
47. *Путин, Г. Ф.* Экспериментальное исследование влияния барометрического распределения на течения ферромагнитных коллоидов [Текст] / Г. Ф. Путин // Материалы 11-го Рижского совещания по магнитной гидродинамике. Рига, 1984. Т. 3. — Академия наук Латвийской ССР, Институт физики, 1984. — С. 15–18.

48. Глухов, А. Ф. Конвекция магнитных жидкостей в связанных каналах при подогреве снизу [Текст] / А. Ф. Глухов, Г. Ф. Путин // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2010. — № 5. — С. 41—48.
49. *Shliomis, M. I.* Convective instability of magnetized ferrofluids [Текст] / M. I. Shliomis, B. L. Smorodin // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2002. — Vol. 252. — P. 197—202.
50. *Shliomis, M. I.* The onset thermomagnetic convection in stratified ferrofluids [Текст] / M. I. Shliomis, B. L. Smorodin, S. Kamiyama // Philosophical Magazine. — 2003. — Vol. 83, no. 17/18. — P. 2139—2153.
51. *Shliomis, M. I.* Onset of convection in colloids stratified by gravity [Текст] / M. I. Shliomis, B. L. Smorodin // Physical Review E. — 2005. — Vol. 71, no. 036312.
52. Глухов, А. Ф. О периодических конвективных процессах в магнитной жидкости в вертикальных каналах [Текст] / А. Ф. Глухов, А. С. Сидоров // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2019. — № 4. — С. 13—18.
53. Глухов, А. Ф. Влияние термофореза частиц на конвекцию магнитных жидкостей в узких каналах при подогреве снизу [Текст] / А. Ф. Глухов, А. С. Сидоров // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2023. — № 1. — С. 69—80.
54. *Sprenger, L.* Thermodiffusion in concentrated ferrofluids: A review and current experimental and numerical results on non-magnetic thermodiffusion [Текст] / L. Sprenger, A. Lange, S. Odenbach // Physics of Fluids. — 2013. — Vol. 25, no. 122002.
55. *Matsuki, H.* Experimental considerations on a new automatic cooling device using temperature-sensitive magnetic fluid [Текст] / H. Matsuki, K. Yamasawa, K. Murakami // IEEE Transactions on Magnetics. — 1977. — Vol. 13, no. 5. — P. 1143—1145.
56. *Blums, E.* Magnetoconvective heat transfer from a cylinder under the influence of a nonuniform magnetic field [Текст] / E. Blums, A. Mezulis, G. Kronkalns // Journal of Physics: Condensed Matter. — 2008. — Vol. 20, no. 20204128.

57. *Zablockis, D.* Investigation of heat transfer efficiency of thermomagnetic convection in ferrofluids [Текст] / D. Zablockis, V. Frishfelds, E. Blums // *Magneto hydrodynamics*. — 2009. — Vol. 45, no. 3. — P. 371–375.
58. Influence of thermomagnetic convection and ferrofluid thermophysical properties on heat transfers in a cylindrical container heated by a solenoid [Текст] / R. Zanella [et al.] // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 2019. — Vol. 469. — P. 52–63.
59. *Krakov, M. S.* Influence of the shape of the inner boundary on thermomagnetic convection in the annulus between horizontal cylinders: Heat transfer enhancement [Текст] / M. S. Krakov, I. V. Nikiforov // *International Journal of Thermal Sciences*. — 2020. — Vol. 153, no. 106374.
60. *Fujita, T.* Basic study of heat convection pipe using the developed temperature sensitive magnetic fluid [Текст] / T. Fujita, M. Mamiya, B. Jeyadevan // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 1990. — Vol. 85. — P. 203–206.
61. *Fumoto, K.* A mini heat transport device based on thermosensitive magnetic fluid [Текст] / K. Fumoto, H. Yamagishi, M. Ikegawa // *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering*. — 2007. — Vol. 11. — P. 201–210.
62. Investigation on operational characteristics of a miniature automatic cooling device [Текст] / Q. Li [et al.] // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2008. — Vol. 52. — P. 5033–5039.
63. *Lian, W.* Design method of automatic energy transport devices based on the thermomagnetic effect of magnetic fluids [Текст] / W. Lian, Y. Xuan, Q. Li // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2009. — Vol. 52. — P. 5451–5458.
64. *Lian, W.* Characterization of miniature automatic energy transport device based on the thermomagnetic effect [Текст] / W. Lian, Q. Li // *Energy Conversion and Management*. — 2009. — Vol. 50. — P. 35–42.
65. *Xuan, Y.* Electronic cooling using an automatic energy transport device based on thermomagnetic effect [Текст] / Y. Xuan, W. Lian // *Applied Thermal Engineering*. — 2011. — Vol. 31. — P. 1487–1494.
66. Potential of enhancing a natural convection loop with a thermomagnetically pumped ferrofluid [Текст] / E. Aursand [et al.] // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 2016. — Vol. 417. — P. 148–159.

67. *Bahirael, M.* Automatic cooling by means of thermomagnetic phenomenon of magnetic nanofluid in toroidal loop [Текст] / M. Bahirael, M. Hangi // *Applied Thermal Engineering*. — 2016. — Vol. 107. — P. 700–708.
68. Optimal ferrofluids for magnetic cooling devices [Текст] / M. S. Pattanaik [et al.] // *Scientific reports*. — 2021. — Vol. 11, no. 24167.
69. A novel magnetic cooling device for long distance heat transfer [Текст] / M. S. Pattanaik [et al.] // *Applied Thermal Engineering*. — 2022. — Vol. 201, no. 117777.
70. A magnetic nanofluid device for excellent passive cooling of light emitting diodes [Текст] / V. B. Varma [et al.] // *Energy Reports*. — 2022. — Vol. 8. — P. 7401–7419.
71. *Buschmann, M. H.* Critical review of heat transfer experiments in ferrohydrodynamic pipe flow utilising ferronanofluids [Текст] / M. H. Buschmann // *International Journal of Thermal Sciences*. — 2020. — Vol. 157, no. 106426.
72. Stability characteristics of a single-phase free convection loop [Текст] / H. F. Creveling [et al.] // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1975. — Vol. 67, no. 1. — P. 65–84.
73. *Damerell, P. S.* Flow in a Toroidal Thermosyphon with Angular Displacement of Heated and Cooled Sections [Текст] / P. S. Damerell, R. J. Schoenhals // *ASME Journal of Heat and Mass Transfer*. — 1979. — Vol. 104, no. 4. — P. 672–676.
74. *Ehrhard, P.* Dynamical behaviour of natural convection in a single-phase loop [Текст] / P. Ehrhard, U. Müller // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1990. — Vol. 217. — P. 487–518.
75. *Дроздов, С. М.* Ламинарная конвекция вязкой и теплопроводной жидкости в замкнутом канале [Текст] / С. М. Дроздов // *Учёные записки ЦАГИ*. — 1992. — Т. 23, № 3. — С. 40–53.
76. *Lokhmanets I. Baliga, B. R.* Experimental investigation of steady and transient operations of a single-phase closed-loop vertical thermosyphon [Текст] / B. R. Lokhmanets I. Baliga // *International Journal of Thermal Sciences*. — 2019. — Vol. 145, no. 105988.

77. *Basu, D. N.* Dynamic frequency response of a single-phase natural circulation loop under an imposed sinusoidal excitation [Текст] / D. N. Basu // *Annals of Nuclear Energy*. — 2019. — Vol. 132. — P. 603–614.
78. *Pshenichnikov, A. F.* Equilibrium magnetization of concentrated ferrocolloids [Текст] / A. F. Pshenichnikov // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 1995. — Vol. 145. — P. 319–326.
79. *Пшеничников, А. Ф.* Магнитная восприимчивость концентрированных ферроколлоидов [Текст] / А. Ф. Пшеничников, А. В. Лебедев // *Коллоидный журнал*. — 2005. — Т. 67, № 2. — С. 1–13.
80. *Pshenichnikov, A. F.* Magneto-granulometric analysis of concentrated ferrocolloids [Текст] / A. F. Pshenichnikov, V. V. Mekhonoshin, A. V. Lebedev // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. — 1996. — Vol. 161. — P. 94–102.
81. *Косков, М. А.* О методе дифференциальной прогонки для получения кривых намагничивания ферроколлоидов [Текст] / М. А. Косков, А. В. Лебедев, А. С. Иванов // *Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии*. — 2023. — Т. 13, № 3. — С. 89–104.
82. *Пшеничников, А. Ф.* Жидкие ферроколлоиды с высокой магнитной восприимчивостью [Текст] / А. Ф. Пшеничников, И. Ю. Шурубор // *Письма в ЖТФ*. — 1988. — Т. 14, № 20.
83. *Ivanov, A. O.* Magnetic properties of dense ferrofluids: An influence of interparticle correlations [Текст] / A. O. Ivanov, O. B. Kuznetsova // *Physical Review E*. — 2001. — Vol. 64, no. 011405.
84. *Справочник по специальным функциям [Текст] : с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган ; пер. с англ. В. А. Диткиной, Л. Н. Кармазиной. — М. : Наука, 1979. — 932 с.*
85. *Механика нано— и микродисперсных магнитных сред [Текст] / В. М. Полуин [и др.]. — М. : Физматлит, 2015. — 192 с.*
86. *Иванов, А. О.* Магнитогранулометрический анализ ферроколлоидов: модифицированная модель среднего поля второго порядка [Текст] / А. О. Иванов, О. Б. Кузнецова // *Коллоидный журнал*. — 2006. — Т. 68, № 2. — С. 472–484.

87. *Бозорт, Р.* Ферромагнетизм [Текст] : пер. с англ. / Р. Бозорт. — М. : Издательство иностранной литературы, 1956. — 785 с.
88. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика) [Текст] : Справочник геофизика / под ред. Н. Б. Дортман. — М. : Недра, 1984. — 455 с.
89. *Варгафтик, Н. Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей [Текст] / Н. Б. Варгафтик. — М. : Наука, 1972. — 720 с.
90. Таблицы физических величин. Справочник [Текст] / под ред. И. К. Кикоина. — М. : Атомиздат, 1976. — 1008 с.
91. *Ландау, Л. Д.* Курс теоретической физики в 10 Т. [Текст] : Электродинамика сплошных сред. Т. 8 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2005. — 656 с.
92. *Тареев, Б. М.* Теплопроводность коллоидных систем [Текст] / Б. М. Тареев // Коллоидный журнал. — 1940. — Т. 6, № 6. — С. 545—550.
93. *Hamilton, R. L.* Thermal Conductivity of Heterogeneous Two-Component Systems [Текст] / R. L. Hamilton, O. K. Crosser // Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals. — 1962. — Vol. 1, no. 3. — P. 187—191.
94. *Хуе, Q.* A model of thermal conductivity of nanofluids with interfacial shells [Текст] / Q. Хуе, W.-М. Ху // Materials Chemistry and Physics. — 2005. — Vol. 90. — P. 298—301.
95. A benchmark study on the thermal conductivity of nanofluids [Текст] / J. Buongiorno [et al.] // Journal of Applied Physics. — 2009. — Vol. 106, no. 9 094312.
96. *Philip, J.* Thermal properties of nanofluids [Текст] / J. Philip, P. D. Shima // Advances in Colloidal and Interface Science. — 2012. — Vol. 183/184. — P. 30—45.
97. Mathematical modelling of thermal conductivity for nanofluid considering interfacial nano-layer [Текст] / I. Н. Rizvi [et al.] // Journal of Heat and Mass Transfer. — 2013. — Vol. 49, no. 4. — P. 595—600.
98. О конвективных свойствах магнитной жидкости на основе ундекана [Текст] / А. Ф. Глухов [и др.] // Вестник пермского университета. Физика. — 2018. — Т. 42, № 4. — С. 19—24.



99. *Hancock, Y.* Thermal expansion of magnetite (4,2–300 K) [Текст] / *Y. Hancock, T. R. Finlayson* // *Philosophical Magazine*. — 2009. — Vol. 89, no. 22–24. — P. 1913–1921.
100. *Иванов, А. С.* Об эффективной длине молекул эруковой и олеиновой кислот в составе защитной оболочки магнетитовых коллоидных частиц [Текст] / *А. С. Иванов* // *Известия Юго-западного государственного университета. Серия: техника и технологии*. — 2024. — Т. 14, № 4. — С. 81–91.
101. *Chow, T. S.* Viscoelasticity of concentrated dispersions [Текст] / *T. S. Chow* // *Physical Review E*. — 1994. — Vol. 50, no. 1274.
102. *Chong, J. S.* Rheology of concentrated suspensions [Текст] / *J. S. Chong, E. B. Chriatiansen, A. D. Baer* // *Journal of Applied Polymer Science*. — 1971. — Vol. 15, no. 8. — P. 2007–2021.
103. Permanent Magnet Selection and Design Handbook [Электронный ресурс] / *Magcraft Magnets*. — Vienna, USA. — 15 p. — URL: <https://cdn2.magcraft.com/pdf/Permanent-Magnet-Selection-and-Design-Handbook.pdf>.
104. Постоянные магниты: [Текст] : Справочник / под ред. Ю. М. Пятина. — М. : Энергия, 1980. — 488 с.
105. Thermodat-25М6. Руководство пользователя [Электронный ресурс] / «Системы контроля». — Пермь, Россия. — 25 с. — URL: <https://www.termodat.ru/catalog/termodat-25m6/>.
106. *Кравченко, Н. С.* Методы обработки результатов измерений и оценки погрешностей в учебном лабораторном практикуме [Текст] : учебное пособие / *Н. С. Кравченко, О. Г. Ревинская*. — Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2011. — 86 с.
107. *Сквайрс, Дж.* Практическая физика [Текст] : пер. с англ. / *Дж. Сквайрс*. — М. : Мир, 1971. — 248 с.
108. *Исаченко, В. П.* Теплопередача [Текст] / *В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел*. — М. : Энергия, 1975. — 487 с.
109. *Lienhard, J. H.* Heat Transfer Textbook [Текст] / *J. H. Lienhard*. — Cambridge MA, USA : Phlogiston Press, 2019.

110. *Косков, М. А.* Аппаратурное оформление экспериментального исследования термомагнитной конвекции в замкнутом гидродинамическом контуре [Текст] / М. А. Косков, А. Ф. Пшеничников // VII Международная ставропольская конференция по магнитным коллоидам. Ставрополь, 05–09 сентября 2021 года. — Северо-Кавказский федеральный университет, 2021. — С. 107–110.
111. *Косков, М. А.* Конвекция магнитной жидкости в замкнутом контуре [Текст] / М. А. Косков, А. Ф. Пшеничников // 19-я Международная плесская конференция по нанодисперсным магнитным жидкостям. Иваново, 08–11 сентября 2020 года. — Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина, 2020. — С. 198–203.
112. *Косков, М. А.* Стационарная термомагнитная конвекция в замкнутом контуре [Текст] / М. А. Косков, А. Ф. Пшеничников // XXII Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 22–26 марта 2021 года. — 2021.
113. *Koskov, M. A.* Stationary Thermomagnetic Convection of Ferrofluid in an Enclosed Loop [Текст] / M. A. Koskov, A. F. Pshenichnikov // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1945, no. 012022.
114. *Bejan, A.* Convection Heat Transfer [Текст] / A. Bejan. — Hoboken, USA : John Willey & Sons, Inc., 2013.
115. *Глухов, А. Ф.* Тепловая конвекция магнитной наносuspension в узких каналах [Текст] / А. Ф. Глухов, В. А. Дёмин, Е. А. Попов // Механика жидкости и газа. — 2013. — № 1. — С. 41–51.
116. *Араманович, И. Г.* Уравнения математической физики [Текст] / И. Г. Араманович, В. И. Левин. — М. : Наука, 1969. — 288 с.
117. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 5-е изд. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 736 с.
118. Математическая Энциклопедия [Текст]. Т. 1 / под ред. И. М. Виноградов. — М. : Советская энциклопедия, 1977.
119. *Канторович, Л. В.* Приближённые методы высшего анализа [Текст] / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — М.-Л. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.

120. *Лойцянский, Л. Г.* Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. — 5-е изд. — М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. — 736 с.
121. *Косков, М. А.* Термомагнитная конвекция в замкнутом контуре. Влияние концентрации магнитной фазы [Текст] / М. А. Косков, А. Ф. Пшеничников // XX Юбилейная Всероссийская с международным участием плесская научная конференция по нанодисперсным магнитным жидкостям. Плес 01–30 сентября 2022 года. — Ивановский Государственный энергетический университет им. В.И. Ленина, 2022.
122. *Косков, М. А.* Конвекция магнитной жидкости в контуре. Влияние параметров задачи [Текст] / М. А. Косков, А. Ф. Пшеничников // Пермские гидродинамические научные чтения. Пермь, 05–07 октября 2022 года. — Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2022. — С. 262–267.
123. *Френкель, Я. И.* Кинетическая теория жидкостей [Текст] / Я. И. Френкель. — Л. : Наука, 1975. — 592 с.
124. *Косков, М. А.* Некоторые аспекты движения феррожидкости через термомагнитный насос [Текст] / М. А. Косков, А. Ф. Пшеничников // XXI Всероссийская с международным участием плесская научная конференция по нанодисперсным магнитным жидкостям. Плес, 10–13 сентября 2024 года. — Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина, 2024. — С. 114–117.
125. *Косков, М. А.* Конвекция феррожидкости в гидродинамическом контуре, оснащённом термомагнитным насосом [Текст] / М. А. Косков // XXIV Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 24–28 февраля 2025 года. — 2025.
126. *Szabo, P. S. B.* The transition from natural convection to thermomagnetic convection of magnetic fluid in a non-uniform magnetic field [Текст] / P. S. B. Szabo, W.-G. Früh // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2017. — Vol. 447. — P. 116–123.

127. *Косков, М. А.* Термомангнитная конвекция в гидродинамическом контуре: случай сильных градиентных полей [Текст] / М. А. Косков // Сборник научных трудов VIII ставропольской международной конференции по магнитным коллоидам ISCMC2023. Ставрополь, 10–14 сентября 2023 года. — Северо-Кавказский федеральный университет, 2023. — С. 73–74.
128. *Ivanov, A. O.* Phase separation in magnetic colloids [Текст] / A. O. Ivanov // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 1999. — Vol. 201, no. 1–3. — P. 234–237.
129. *Hayes, C. F.* Observation of association in a ferromagnetic colloid [Текст] / C. F. Hayes // Journal of Colloid and Interface Science. — 1975. — Vol. 52, no. 2. — P. 239–243.
130. *Peterson, E. A.* Reversible, field induced agglomeration in magnetic colloids [Текст] / E. A. Peterson, D. A. Krueger // Journal of Colloid and Interface Science. — 1977. — Vol. 62, no. 1. — P. 24–34.
131. *Пшеничников, А. Ф.* Расслоение магнитных жидкостей: условия образования и магнитные свойства капельных агрегатов [Текст] / А. Ф. Пшеничников, И. Ю. Шурубор // Известия Академии наук СССР, серия физическая. — 1987. — Т. 51, № 6. — С. 1081–1087.
132. Magnetic properties of ferrocolloids: the effect of interparticle interactions [Текст] / К. I. Morozov [et al.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 1987. — Vol. 65, no. 2/3. — P. 269–272.
133. *Zubarev, A. Yu.* Kinetics of a magnetic fluid phase separation induced by an external magnetic field [Текст] / A. Yu. Zubarev, A. O. Ivanov // Physical Review E. — 1997. — Vol. 55, no. 6. — P. 7192–7202.
134. *Iskakova, L. Yu.* Condensation phase transitions in ferrofluids [Текст] / L. Yu. Iskakova, G. A. Smelchakova, A. Yu. Zubarev // Physical Review E. — 2009. — Vol. 79, no. 1. — P. 399–407.
135. *Ivanov, A. S.* Temperature dependence of the magneto-controllable first-order phase transition in dilute magnetic fluids [Текст] / A. S. Ivanov // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2017. — Vol. 441, no. 10. — P. 620–627.

136. *Иванов, Алексей Сергеевич*. Гидродинамика капельных агрегатов и немагнитных тел, погруженных в магнитную жидкость [Текст] : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 1.1.9 / Иванов Алексей Сергеевич. — Пермь, 2023. — 282 с.
137. *Ivanov, A. S.* Vortex flows induced by drop-like aggregate drift in magnetic fluids [Текст] / A. S. Ivanov, A. F. Pshenichnikov // *Physics of Fluids*. — 2014. — Vol. 26, no. 012002.
138. *Ivanov, A. S.* Plateau-Rayleigh Instability of Ferrofluid Drop-Like Aggregates in Zero Magnetic Field [Текст] / A. S. Ivanov // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, XXI Winter School on Continuous Media Mechanics 18–22 February 2019, Perm, Russian Federation*. — 2019. — Vol. 581, no. 012019.

## Список рисунков

2.1	Схема экспериментального гидродинамического контура. Размеры указаны в мм. . . . .	24
2.2	Схема нагревателя в осевом сечении. Размеры указаны в мм. . . . .	25
2.3	Схема экспериментальной установки. . . . .	26
2.4	Намагничивающая система в локальной системе координат, вид сверху. Размеры указаны в мм. . . . .	27
2.5	Магнитное поле в рабочем зазоре намагничивающей системы. Контрастными вертикальными линиями показана внешняя граница жидкости в контуре. . . . .	28
2.6	Схема размещения спаев термопар на поверхности контура и система координат с началом в центре нагревателя. . . . .	29
2.7	Результаты измерения температуры поверенным ртутным термометром $T$ в зависимости от показаний прибора Termodat 25M6 $T^{(0)}$ . Символы соответствуют эксперименту. Сплошная толстая линия — прямая пропорциональность ( $T = T^{(0)}$ ). . . . .	30
2.8	Центрированные результаты измерений температуры поверенным термометром $T$ в зависимости от центрированных показаний прибора Termodat 25M6 $T^{(0)}$ . Точки — эксперимент, аппроксимирующая прямая построена по методу наименьших квадратов. . . . .	31
2.9	Разница показаний термометра ТЛ–4 и прибора Thermodat 25M6 в зависимости от температуры. Светлые символы показывают ошибку до калибровки, тёмные — после. . . . .	32
2.10	Схема стержневого нагревателя в осевом разрезе. Размеры указаны в мм. . . . .	33
2.11	Коэффициент теплоотдачи в зависимости от мощности стержневого нагревателя. Точки соответствуют эксперименту, сплошная линия — среднее значение. . . . .	34
2.12	Элемент трубки в локальной системе координат с указанием направления тепловых потоков. . . . .	36
2.13	Поперечное сечение трубки контура и локальная система координат. . . . .	38

- 2.14 Безразмерная температура в поперечном сечении трубки при  $U_0 = 2$ .  
Сплошная линия (1) соответствует  $Z = 0,2$ , штриховая (2) —  $Z = 0,5$ . Расчёт проведён при значении числа Био  $Bi = 0,5$  близком к экспериментальному. Вертикальными линиями показаны внутренняя и внешняя поверхности трубки. . . . . 41
- 2.15 Установление стационарного температурного режима в опытах с н-ундеканом.  $T_1, T_3, T_5$  — показания термопар (рис. 2.6), удалённых от середины нагревателя на  $z = 30; 160; 290$  мм соответственно в зависимости от времени работы нагревателя. . . . . 46
- 2.16 Установившаяся температура вдоль охлаждаемого участка контура с н-ундеканом при различных перепадах температуры  $\Delta T$  на контуре 1 —  $3,8^\circ\text{C}$ , 2 —  $5,5^\circ\text{C}$ , 3 —  $7,4^\circ\text{C}$ . Точки соответствуют эксперименту, сплошные линии — аппроксимации экспонентами. . . . . 47
- 2.17 Величина  $k^{-2}$  в зависимости от разности температур  $\Delta T$  на концах нагреваемого участка контура с н-ундеканом. Точки соответствуют эксперименту, линия тренда — линейная функция, служит повышению наглядности результатов. . . . . 48
- 2.18 Температура вдоль охлаждаемого участка контура с магнитной жидкостью при различных перепадах температуры  $\Delta T$  на нагревателе. В неоднородном магнитном поле 1 —  $4,0^\circ\text{C}$ , 2 —  $5,4^\circ\text{C}$ . В нулевом поле 3 —  $3,3^\circ\text{C}$ , 4 —  $5,8^\circ\text{C}$ . Точки соответствуют эксперименту, сплошные линии — аппроксимации экспонентами. . . . 49
- 2.19 Величина  $k^{-2}$  в зависимости от перепада температуры  $\Delta T$  на контуре с магнитной жидкостью. Точки 1 соответствуют опытам в неоднородном магнитном поле, 2 — опытам в нулевом поле. . . . . 50
- 2.20 Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэлея.  
1 — опыты с ундеканом, 2 — опыты с магнитной жидкостью в нулевом магнитном поле, 3 — опыты с магнитной жидкостью в градиентном внешнем поле. Линии тренда служат повышению наглядности результатов. . . . . 51
- 3.1 Динамическая вязкость образцов магнитной жидкости в зависимости от температуры. Символы соответствуют измеренным значениям, сплошные кривые — аппроксимации по Аррениусу.  
Нумерация кривых соответствует нумерации образцов в табл. 3. . . . 53

- 3.2 Реологические кривые (сдвиговое напряжение в зависимости от скорости сдвига) образцов магнитной жидкости при 27 °С. Символы соответствуют измеренным значениям, сплошные линии — аппроксимация прямой пропорциональностью. Нумерация кривых соответствует нумерации образцов в табл. 3. . . . . 54
- 3.3 Кривые намагничивания базового и разбавленного (№ 2 табл. 3) образцов магнитной жидкости. Точки получены методом дифференциальной прогонки, сплошные линии — интерполяция сплайнами. . . . . 55
- 3.4 Распределение коллоидных частиц по диаметрам магнитных ядер согласно формуле (1.4). Используются усреднённые параметры распределения:  $\sigma = 4,84$ ,  $x_0 = 1,28$  нм. . . . . 55
- 3.5 Установление стационарного режима в конвективных экспериментах с образцом магнитной жидкости № 2 ( $\varphi_s = 0,060$ ). Обозначения термограмм ясны из рис. 2.6. . . . . 57
- 3.6 Стационарное распределение температуры вдоль охлаждаемой части контура при различных мощностях нагревателя. Тёмными символами обозначены результаты экспериментов в градиентном магнитном поле, светлыми символами — в нулевом поле. Сплошные линии — аппроксимация экспоненциальными функциями. . . . . 58
- 3.7 Величина  $k^{-2}$  в зависимости от перепада температуры на нагревателе  $\Delta T$ . Тёмные символы соответствуют опытам в градиентном магнитном поле, светлые — в нулевом поле. Нумерация символов соответствует нумерации образцов в табл. 3. Линии тренда служат повышению наглядности результатов. . . . . 59
- 3.8 Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэлея. Тёмные символы соответствуют конвективным опытам в градиентном магнитном поле, светлые — в нулевом поле. Нумерация экспериментальных кривых соответствует нумерации образцов в табл. 3. Линии тренда служат повышению наглядности результатов. . . . . 60



- 3.9 Объёмный расход жидкости через поперечное сечение трубы контура в зависимости от перепада температуры на нагревателе. Тёмные символы соответствуют опытам в градиентном магнитном поле, светлые — в нулевом поле. Нумерация символов соответствует обозначениям в табл. 3. Линии тренда служат повышению наглядности результатов. . . . . 61
- 3.10 Повышенное магнитное поле в рабочем зазоре намагничивающей системы. Контрастными вертикальными линиями показана внутренняя поверхность нагревателя. . . . . 62
- 3.11 Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэлея. Тёмные символы соответствуют конвективным опытам в градиентном магнитном поле повышенной напряжённости ( $H_{\max} = 29$  кА/м), светлые — в нулевом поле. Для сравнения, светло-серым цветом показаны результаты опытов с рис. 3.8 ( $H_{\max} = 23$  кА/м). Нумерация экспериментальных зависимостей соответствует нумерации образцов магнитных жидкостей в табл. 3. Линии тренда служат повышению наглядности результатов. . . . . 63
- 3.12 Скорость течения на оси трубки контура в зависимости от мощности нагревателя в опытах с образцом магнитной жидкости № 2 ( $\varphi_s = 0,061$ ). 1 — данные эксперимента в режиме комбинированной термомагнитной и гравитационной конвекции, 2 — расчёт без учёта гравитации, 3 — аппроксимация степенным законом:  $v_0 \propto P^{0,523}$ . . . . 64
- 3.13 Магнитное поле в воздушном зазоре намагничивающей системы, нормированное на его амплитудное значение  $H_{\max} = 29$  кА/м. Точки соответствуют эксперименту, сплошная линия — аппроксимации (3.2). 65
- 3.14 Динамическая вязкость образца магнитной жидкости в зависимости от температуры. Точки соответствуют результатам измерений, сплошная линия — аппроксимация по Аррениусу. . . . . 68
- 3.15 Кривая намагничивания образца магнитной жидкости. . . . . 68
- 3.16 Осевое сечение нагревателя и полюсных наконечников магнитопровода в системе координат. Размеры указаны в мм. . . . . 69
- 3.17 Температура поверхности контура в зависимости от времени работы нагревателя при различных положениях полюсных наконечников магнитопровода. Обозначения  $T_1-T_5$  на термограммах соответствуют обозначениям термодатчиков на рис. 2.6. . . . . 71

- 3.18 Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэлея. В экспериментах с магнитной жидкостью при наложении неоднородного магнитного поля на 1 — центр нагревателя, 2 — на 5 мм и 3 — 10 мм ниже центра нагревателя. В эксперименте, проведённом без источника магнитного поля — 4. Для сравнения добавлены результаты опытов с чистым осветительным керосином ( $\times$ ). Символы соответствуют эксперименту, линии тренда служат повышению наглядности результатов. . . . . 72
- 3.19 Объёмный расход жидкости в зависимости от перепада температуры на нагревателе. В экспериментах с магнитной жидкостью при наложении неоднородного магнитного поля на 1 — центр нагревателя, 2 — на 5 мм и 3 — 10 мм ниже центра нагревателя. В эксперименте, проведённом без источника магнитного поля — 4. Для сравнения добавлены результаты опытов с чистым осветительным керосином ( $\times$ ). Точки соответствуют эксперименту, линии тренда служат повышению наглядности результатов. . . . . 73
- 3.20 Модуль градиента горизонтальной компоненты напряжённости магнитного поля при расположении полюсных наконечников магнитопровода в центре ( $z = 0$  мм) нагревателя. Границы обмотки нагревателя показаны контрастными линиями. . . . . 74
- 3.21 Число Нуссельта в зависимости от линейной комбинации теплового и магнитного чисел Рэлея. Светлые символы соответствуют опытам с образцами магнитных жидкостей из § 3.1 в нулевом магнитном поле, светло-серые — опытам в поле с амплитудной напряжённостью 23 кА/м, чёрные — опытам из § 3.2 в поле с напряжённостью 29 кА/м. Универсальный подгоночный коэффициент  $\zeta = 0,082$ . Нумерация символов соответствует нумерации образцов феррожидкостей из табл. 3. . . . . 75
- 4.1 Вязкость образца магнитной жидкости, использованного в демонстрационных опытах, в зависимости от температуры. Точки соответствуют результатам измерений ротационным вискозиметром, сплошная линия — аппроксимация по Аррениусу. . . . . 77

- 4.2 Кривая намагничивания магнитной жидкости, использованной в демонстрационных опытах. Точки соответствуют эксперименту, сплошная линия — интерполяция сплайнами. . . . . 78
- 4.3 Распределение частиц по диаметрам магнитных ядер в образце жидкости, использованном в демонстрационных опытах. . . . . 79
- 4.4 Установление стационарного температурного режима в экспериментах с магнитной жидкостью, свойства которой представлены в табл. 6. Нумерация термограмм соответствует нумерации горячих спаев термопар на рис. 2.6. . . . . 80
- 4.5 Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэлея. *1* — эксперименты с магнитной жидкостью в умеренном магнитном поле, *2* — эксперименты в нулевом магнитном поле. Для наглядности дополнительно показаны результаты опытов с чистым осветительным керосином и линии тренда. . . . . 81
- 4.6 Схематичное изображение намагничивающих систем, использованных в конвективных экспериментах. . . . . 82
- 4.7 Сильное магнитное поле ( $H_{\max} = 190$  кА/м) в зазоре намагничивающей системы. Контрастными вертикальными линиями показана внешняя граница жидкости в контуре. . . . . 83
- 4.8 Термограммы опыта, демонстрирующего ослабление тепловой конвекции магнитной жидкости в сильном магнитном поле. . . . . 84
- 4.9 Термограмма опыта, демонстрирующего отсутствие охватывающей контур гравитационной конвекции магнитной жидкости при повторном включении нагревателя спустя сутки после опытов, представленных на рис. 4.8. . . . . 85
- 4.10 Схема установки для магнитной сепарации феррожидкости. Направление движения магнитной системы по направляющим указано стрелками. . . . . 87
- 4.11 Кривые намагничивания исходного *1* и сепарированного *2* образцов магнитной жидкости. Точки — эксперимент, сплошные линии — интерполяция сплайнами. . . . . 88
- 4.12 Распределение частиц по диаметрам магнитных ядер в исходном (штриховая линия *1*) и сепарированном (сплошная линия *2*) образцах магнитной жидкости. . . . . 89

- 4.13 Термограмма опыта, демонстрирующего усиление конвективного теплопереноса феррожидкостью в сильном магнитном поле. Момент включения поля обозначен вертикальной чертой. . . . . 90
- 4.14 Установившийся профиль температуры вдоль поверхности контура с сепарированной магнитной жидкостью при различных перепадах температур  $\Delta T$  на нагревателе. Опыты в нулевом магнитном поле: 1 — 3,6 °С, 2 — 5,2 °С. Опыты в сильном магнитном поле: 3 — 3,3 °С, 4 — 5,0 °С. Символы соответствуют эксперименту, сплошные линии — аппроксимации экспонентами. . . . . 91
- 4.15 Число Нуссельта в зависимости от теплового числа Рэлея. Точки 1 соответствуют экспериментам с феррожидкостью в сильном поле, 2 — экспериментам в нулевом магнитном поле. Точки 3 соответствуют опытам с феррожидкостью из § 3.2 в умеренном поле. Линии тренда служат повышению наглядности результатов. . . . 92
- А.1 Левая часть уравнения (А.13) в зависимости от  $\gamma$ . . . . . 122

## Список таблиц

1	Наименьшие по модулю корни уравнения (2.14) при различных числах Био. . . . .	40
2	Некоторые свойства образца магнитной жидкости в сравнении со свойствами н-ундекана. . . . .	48
3	Теплофизические свойства образцов магнитной жидкости в сравнении со свойствами керосина при комнатной (25 °С) температуре. . . . .	53
4	Магнитные и гранулометрические свойства разбавленного образца феррожидкости в сравнении со свойствами базового образца. . . . .	54
5	Теплофизические свойства образца магнитной жидкости при комнатной (27 °С) температуре. . . . .	67
6	Теплофизические свойства образца магнитной жидкости при комнатной (27 °С) температуре. . . . .	78
7	Физические свойства исходного и сепарированного образцов магнитной жидкости в интервале температур 20–25 °С близких к комнатной. . . . .	87

## Приложение А

### Радиальное распределение температуры на охлаждаемом участке контура

Во второй части § 2.4 распределение безмерной температуры  $\Theta$  на охлаждаемом участке гидродинамического контура находилось путём решения стационарного уравнения Фурье–Кирхгофа (2.10):

$$U_0 (1 - R^2) \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right). \quad (\text{A.1})$$

Уравнение (A.1) записано в цилиндрической системе координат (рис. 2.13). Профиль безразмерной скорости потока жидкости в поперечном сечении трубки аппроксимирован квадратичной параболой:  $U(R) = U_0 (1 - R^2)$ , следовательно, поле температуры осесимметрично:  $\Theta = \Theta(R, Z)$ . Безразмерный радиус  $R$  меняется от 0 на оси трубки до 1 на её внутренней стенке. Поскольку внутренний радиус трубки контура мал в сравнении с её длиной (см. рис. 2.1), осевая компонента лапласиана  $\partial^2 \Theta / \partial Z^2$  мала в сравнении с радиальной и в (A.1) отсутствует.

Переменные в уравнении (A.1) разделяются, а ненулевое решение может быть записано в виде:

$$\Theta(R, Z) = \theta(R) \exp(-kZ), \quad (\text{A.2})$$

поскольку экспоненциальное затухание температуры вдоль охлаждаемой части контура наблюдается в экспериментах (гл. 2; 3).

В п. 2.4.2 предложена замена декремента затухания температурного возмущения:

$$k = \frac{\gamma^2}{U_0}. \quad (\text{A.3})$$

Использование вещественного положительного числа  $\gamma^2$  исключает физически необоснованную ситуацию увеличения температуры жидкости ( $k < 0$ ) при её протекании по охлаждаемому участку конвективной петли. Как будет видно далее, профиль температуры в поперечном сечении трубки  $\theta(R)$  зависит от величины  $\gamma$ , но её знак  $\text{sign}(\gamma)$  не влияет на вид распределения температуры (A.2).

Подстановка (A.3; A.2) в (A.1) приводит к уравнению второго порядка с переменными коэффициентами (2.11), для радиального распределения безразмерной температуры в трубке  $\theta(R)$ :

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dR} + \gamma^2\theta - \gamma^2 R^2\theta = 0. \quad (\text{A.4})$$

Рассмотрим один из способов решения этого уравнения, заключающийся в преобразовании (A.4) к вырожденному гипергеометрическому уравнению [118]. С этой целью выполним замену  $R$  в искомой функции  $\theta(R)$  на вещественную переменную:

$$X = \gamma R^2. \quad (\text{A.5})$$

Такая замена удовлетворяет требованию чётности решения относительно знака радиальной координаты:  $\theta(R) = \theta(-R)$ , которое соответствует осевой симметрии поля температуры. После преобразований, с учётом  $\gamma \neq 0$  получим уравнение для  $\theta(X)$ :

$$4X \frac{d^2\theta}{dX^2} + 4 \frac{d\theta}{dX} - (X - \gamma)\theta = 0. \quad (\text{A.6})$$

Ситуация  $\gamma = 0$  соответствует не представляющему интереса изотермическому течению жидкости с нулевым температурным возмущением.

Решение уравнения (A.6) будем искать в виде произведения не обращающегося в ноль экспоненциального множителя  $\exp(-X/2)$  на некоторую функцию переменной  $X$ , которую обозначим символом  $M(\dots, X)$ . Читателю, уже знакомому с § 2.4, предлагаемое обозначение не должно показаться странным:

$$\theta(X) = C M(\dots, X) \exp\left(-\frac{1}{2}X\right), \quad (\text{A.7})$$

где  $C$  — постоянная, равная температуре на оси трубки. Подстановка (A.7) в уравнение (A.6) преобразует его к виду:

$$X \frac{d^2M}{dX^2} + \underbrace{(1 - X)}_{b-X} \frac{dM}{dX} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma\right)}_a M = 0. \quad (\text{A.8})$$

Таким образом, получено известное уравнение Куммера (вырожденное гипергеометрическое уравнение) [84].

В рамках задачи о распределении температуры в поперечном сечении трубки, интерес представляет функция, удовлетворяющая уравнению (A.8) и одновременно ограниченная на оси трубки ( $X = 0$ ). Таковой является одноимённая с (A.8) специальная гладкая функция  $M(a, b, X)$ , зависящая от двух параметров  $a$  и  $b$ . В рассматриваемом здесь случае:

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, \quad b = 1. \quad (\text{A.9})$$

Обозначения параметров  $a$  и  $b$  в (A.8) являются общепринятыми, и потому применены в приложении, несмотря на их пересечение с обозначениями физических величин в основной части диссертации.

Искомое решение уравнения (A.4), с учётом (A.5; A.7; A.9) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \theta(R) &= C M(a, b, X) \exp\left(-\frac{1}{2}X\right) = \\ &= C M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 1, \gamma R^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma R^2\right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Полученная формула использована в п. 2.4.2, посвящённом радиальной неоднородности температуры на охлаждаемом участке контура.

Рассмотрим некоторые важные свойства функции  $\theta(R)$ . Как указано в [84], для  $M(a, b, X)$  справедливы следующие соотношения:

$$M(b - a, b, -X) \exp(X) = M(a, b, X), \quad (\text{A.11a})$$

$$\frac{d}{dX} [M(a, b, X)] = \frac{a}{b} M(a + 1, b + 1, X). \quad (\text{A.11б})$$

Из первого равенства (A.11a) следует чётность решения (A.10) относительно знака  $\gamma$ . Действительно, при замене  $\gamma$  на  $-\gamma$  в (A.10) получим тождество:

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\gamma, 1, -\gamma R^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}\gamma R^2\right) &= \\ = M\left(1 - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma\right], 1, -\gamma R^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}\gamma R^2\right) \cdot \exp(-\gamma R^2) \cdot \exp(\gamma R^2) &= \\ = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 1, \gamma R^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}\gamma R^2\right) \cdot \exp(-\gamma R^2) &= \\ = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 1, \gamma R^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma R^2\right). \end{aligned}$$

Постоянная  $C$  здесь опущена.



Второе соотношение (A.116) использовалось при выводе трансцендентного уравнения, определяющего  $\gamma$  в п. 2.4.2. Подставив (A.10) в граничное условие (2.13):

$$\left. \frac{d\theta}{dR} \right|_{R=1} + \text{Bi}\theta(1) = 0 \quad (\text{A.12})$$

и сократив  $C$ , имеем:

$$\begin{aligned} & \text{M}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 1, \gamma\right) \cdot \left[-\gamma \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma\right)\right] + \\ & + 2\gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4}\right) \text{M}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 2, \gamma\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma\right) + \\ & + \text{Bi} \text{M}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 1, \gamma\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma\right) = 0. \end{aligned}$$

После приведения подобных получаем уравнение (2.14) для  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} & \left[ (\gamma - \text{Bi}) \text{M}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 1, \gamma\right) - \right. \\ & \left. - \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{2}\right) \text{M}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 2, \gamma\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma\right) = 0. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Единственным параметром в этом уравнении является число Био  $\text{Bi}$ , поэтому  $\gamma$  определяется только условиями теплообмена и не зависит от скорости течения жидкости  $U_0$ . Экспоненциальный множитель в (A.13), не обращается в ноль и может быть сокращён, однако, здесь он служит более наглядному графическому представлению левой части уравнения, которая показана на рис. A.1. Как и следовало ожидать, корни уравнения (A.13) расположены симметрично относительно начала координат.

Продемонстрируем связь точного решения уравнения (A.4), предложенного в п. 2.4.2 и приближённого решения (п. 2.4.3). Из формул (2.22; 2.23) следует, что приближённое (отметим его знаком « $\tilde{\theta}$ ») распределение температуры в поперечном сечении трубки:

$$\tilde{\theta}(R) = \theta_0 \left(1 - \frac{\text{Bi}R^2}{2 + \text{Bi}}\right), \quad (\text{A.14})$$

где  $\theta_0$  — температура на оси потока. Стенки трубки, как и в (A.12), считаются тонкими ( $R_2 = 1$ ).

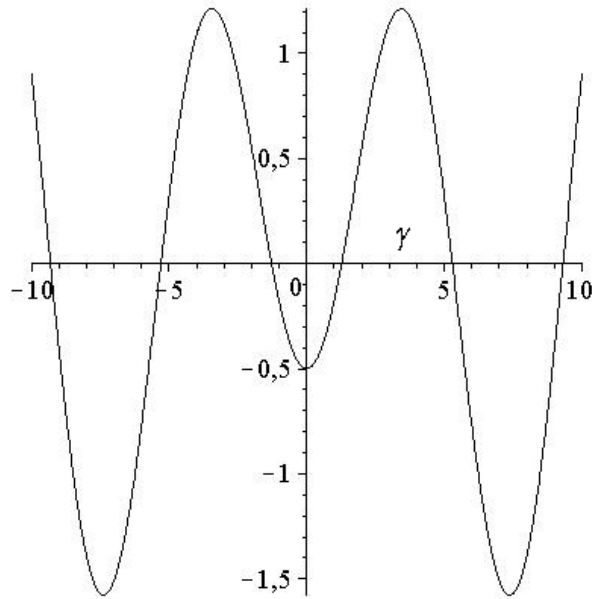


Рисунок А.1 — Левая часть уравнения (A.13) в зависимости от  $\gamma$ .

Воспользуемся представлением функции Куммера в виде ряда [84]:

$$M(a, b, X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i X^i}{(b)_i i!}, \quad (\text{A.15})$$

$$(a)_i = 1 \cdot a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \dots (a+i-1),$$

$$(b)_i = 1 \cdot b \cdot (b+1) \cdot (b+2) \dots (b+i-1)$$

и выполним разложение (A.10) отбросив слагаемые, содержащие  $R$  в степени выше второй.

$$\theta(R) \approx C \underbrace{\left(1 - \frac{\gamma R^2}{2} + \dots\right)}_{\exp(-\frac{1}{2}\gamma R^2)} \underbrace{\left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4}\right) \gamma R^2 + \dots\right]}_{M(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma, 1, \gamma R^2)} \approx C \left(1 - \frac{\gamma^2 R^2}{4}\right)$$

Использование граничного условия (A.12) приводит к выражению:

$$\theta(R) \approx C \left(1 + \frac{\text{Bi} R^2}{2 + \text{Bi}}\right). \quad (\text{A.16})$$

Постоянные  $C$  и  $\theta_0$  в (A.14) имеют одинаковый смысл, поэтому (A.16) совпадает с базисной функцией (2.22), применявшейся при выводе упрощённых формул в п. 2.4.3.