

«ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД УРО РАН» – ФИЛИАЛ  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ  
НАУКИ ПЕРМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА  
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК



На правах рукописи

**Тюлькина Ирина Валерьевна**

**КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ  
ЗА РАМКАМИ ТЕОРИИ ОТТА–АНТОНСЕНА**

Специальность 1.1.9 – «Механика жидкости, газа и плазмы»

диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., г.н.с., профессор  
Ю. Л. Райхер

---

Пермь, 2024

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
Общая характеристика работы . . . . .	4
Обзор литературы . . . . .	12
<b>Глава 1. Фазовое описание колебательной термоконцентрационной конвекции в смежных ячейках пористой среды</b>	<b>21</b>
1.1. Уравнения термоконцентрационной конвекции с учетом эффекта Соре в слое пористой среды . . . . .	22
1.2. Длинноволновое приближение . . . . .	27
1.3. Фазовые уравнения для колебательной конвекции . . . . .	30
1.3.1. Слабонелинейный анализ около границы колебательной неустойчивости . . . . .	34
1.3.2. Предельный случай $S \ll 1$ . . . . .	38
1.3.3. Предельный случай $1 \ll S < b$ . . . . .	39
1.3.4. Фазовая редукция . . . . .	40
1.4. Синхронизация колебаний в смежных ячейках . . . . .	43
1.4.1. Устойчивость синхронного режима . . . . .	44
1.5. Результаты для водных растворов этилового спирта и бинарных смесей газов . . . . .	45
1.6. Выводы по главе . . . . .	55
<b>Глава 2. Теории Отта–Антонсена и ее обобщение</b>	<b>57</b>
2.1. Теории Отта–Антонсена и ее обобщение . . . . .	58
2.2. Теория Отта–Антонсена для неидентичных осцилляторов . . . . .	63
2.3. Круговые кумулянты . . . . .	65
2.4. Двухгрупповые решения . . . . .	67

2.4.1. Расширение многообразия Отта–Антонсена . . . . .	67
2.4.2. Динамика двухгрупповых химер в иерархически связанных ансамблях Курамото–Сакагучи (система Абрамаса) . . . . .	70
2.4.3. Устойчивость одногруппового режима по отношению к возбуждению второй группы . . . . .	74
2.4.4. Динамика двухгрупповых химер . . . . .	76
2.5. Выводы по главе . . . . .	79
<b>Глава 3. Обобщение теории Отта–Антонсена на системы с внутренним шумом</b>	<b>80</b>
3.1. Обобщение кумулянтного подхода на случай внутреннего шума . . . . .	81
3.2. Иерархически связанные ансамбли Курамото–Сакагучи (система Абрамса) с внутренним шумом . . . . .	83
3.3. Устойчивость кумулянтного обрывания . . . . .	84
3.3.1. Введение искусственной диссипации . . . . .	84
3.3.2. Подавление слагаемых, ответственных за неустойчивость . . . . .	91
3.4. Влияние шума на синхронность колебаний конвективных течений . . . . .	94
3.5. Обобщение кумулянтного подхода на случай внутреннего негауссова шума . . . . .	101
3.6. Выводы по главе . . . . .	108
<b>Заключение</b>	<b>111</b>
<b>Список литературы</b>	<b>115</b>

# Введение

## Общая характеристика работы

### **Актуальность и степень разработанности темы диссертации.**

При исследовании коллективных эффектов в ансамблях связанных элементов особый интерес вызывает такое явление как синхронизация. Здесь заслуживают внимания системы, в которых собственная динамика элементов ансамбля сравнительно проста, а сложность возникает как следствие их сетевого взаимодействия. С точки зрения вопросов управления и самоорганизации актуальны ситуации, когда коллективные явления развиваются при слабой связи между элементами или несильном воздействии на них. Слабое воздействие на систему позволяет управлять динамикой фазы колебаний, добиваясь совпадения ритмов колебаний элементов. Даже если общая физическая картина, связанная с синхронизацией, сложна и многогранна, анализ синхронизации можно чрезвычайно упростить для слабых возмущений, рассматривая ее в рамках динамики фаз колебаний. В основе математической теории коллективных явлений в таких системах лежит фазовое описание, при котором главное внимание уделяется динамике фазы колебания элемента.

Фазовое описание активно используется для изучения различных систем. Даже при сильно нелинейной динамике и неоднородности движения, как в нейроноподобных системах, в системе можно ввести фазу. Более того, описывать динамику системы с помощью фазы и исследовать коллективные эффекты в рамках такого описания возможно и при работе с экспериментальными данными с высоким уровнем шума либо большой погрешностью измерений. Хотя фазовое описание применялось к многочисленным проблемам в разных областях науки, его использование в области гидродинамики было ограниченным, особенно в отношении синхронизации. Опираясь на фазовое описание, можно получить информацию необходимую для управления течениями в гидродинамической си-

стеме. В настоящей работе фазовое описание строится для связанных ячеек пористой среды; задача решается полностью аналитически, без использования численного счета.

Синхронность больших ансамблей связанных элементов можно охарактеризовать параметрами порядка — средними полями. Нередко эволюция этих коллективных переменных оказывается на удивление простой, что делает возможным описание с использованием лишь нескольких параметров порядка. Таким образом пытаются построить точные замкнутые малоразмерные математические модели динамики первых нескольких параметров порядка. Эти модели представляют собой полезные инструменты для понимания механизмов, лежащих в основе более сложных коллективных явлений: например, взаимодействующие ансамбли описываются с помощью связанных уравнений для соответствующих параметров порядка. Регулярный подход к построению замкнутых низкоразмерных математических моделей полезен и при работе с явлениями, для которых эти модели не являются применимыми; например, с помощью такого подхода можно определить ограничения на динамику кластеризации в ансамблях.

Для определенного класса ансамблей фазовых систем Отт (E. Ott) и Антонсен (T. M. Antonsen) развили аналитический подход [E. Ott, T. M. Antonsen, *Chaos* **18**, 037113 (2008)], позволяющий получить замкнутые уравнения для комплексных параметров порядка ансамблей фазовых элементов. До сих пор, однако, отсутствовало описание ситуаций в окрестности решения Отта–Антонсена. В настоящей работе такое описание строится в рамках формализма так называемых “круговых кумулянтов” [1]. Эти величины можно считать специальными комплексными параметрами порядка для ансамблей фазовых элементов. Вместе с тем демонстрируется существование инвариантного решения, расширяющего решение Отта–Антонсена. Свойства реальных систем не так далеки от тех, при которых справедлива теория Отта–Антонсена. Однако, даже для слабых нарушений этих свойств прежде не получалось построить обобщение теории на

протяжении достаточно длительного времени. Введение формализма круговых кумулянтов позволило построить эти обобщения.

В диссертационной работе показана возможность и перспективность использования формализма круговых кумулянтов для альтернативного описания динамики ансамблей фазовых элементов. Для систем типа Отта–Антонсена данный формализм позволяет получать точные уравнения для динамики параметров порядка.

**Целью** настоящей работы является изучение коллективных явлений в гидродинамических системах в рамках фазового описания; в частности, построить обобщение теории Отта–Антонсена. Для достижения цели были решены следующие задачи:

1. Показана возможность использования фазового описания для гидродинамических систем на примере термоконтрационной конвекции с эффектом Соре в связанных ячейках пористой среды.
2. Исследована синхронизация колебаний течений в ячейках. Найдено решение для устойчивого синхронного режима.
3. Описана динамика системы в окрестности решения Отта–Антонсена. Доказано, что это решение является нейтрально устойчивым для ансамблей идентичных элементов и притягивающим при неидеальной идентичности элементов.
4. Найдено более общее решение, чем решение Отта–Антонсена.
5. Построена теория возмущений для широкого круга задач, выходящих за рамки применимости оригинальной теории Отта–Антонсена.
6. Разработаны способы подавления численной неустойчивости счета с оборванными кумулянтными разложениями при минимальной потере точности.

**Научная новизна работы:**

1. Показана возможность применения фазового описания для изучения синхронизации в гидродинамических системах на примере конкретной физи-

ческой задачи: колебательной термоконцентрационной конвекции с эффектом Соре в смежных ячейках пористой среды [2, 3]. Задача была решена полностью аналитически, в противоположность работам других авторов, в которых для подобных систем используется только численное моделирование. Подобные работы начали появляться в течении последних 10 лет.

2. Введен формализм круговых кумулянтов для макроскопического описания ансамблей ориентационных и фазовых элементов [1].
3. На основе формализма построено частное обобщение теории Отта-Антонсена в терминах круговых кумулянтов [4], расширяющее оригинальную теорию.
4. Построена теория возмущений для систем связанных фазовых элементов с внутренним шумом, при котором условия применимости теории Отта-Антонсена нарушены [1]. Новое обобщение теории позволяет описать макроскопическую динамику реальных систем [5].
5. Разработаны два метода подавления численной неустойчивости при обрывании кумулянтных разложений [6].
6. На основании формализма круговых кумулянтов предложен подход, позволяющий строить приближенные модели для описание макроскопической динамики систем с аномальной диффузией, при котором не возникает разрывов и отрицательных значений поля концентрации [7, 8].

### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Применение фазового описание в гидродинамических задачах позволит расширить знания об управлении потоками, путем изучения коллективных явлений, в частности, синхронизации течений. Интерес представляют задачи, где осцилляторы обладают слабой связью, данное свойство присуще во множестве реальных систем. С теоретической точки зрения значимо, что в данной работе впервые были строго аналитически получены уравнения для фаз колебаний.

Использование формализма круговых кумулянтов позволило описать динамику систем и построить теорию возмущений для случая внутреннего шума,

когда условия применимости оригинальной теории Отта–Антонсена нарушены. Также удалось получить расширение оригинальной теории для случая отсутствия внутреннего шума. Кумулянтный подход дает простую математическую систему дифференциальных уравнений, что позволяет увеличить скорость численного моделирования макроскопической динамики ансамблей.

Исследования, представленные в диссертации, были поддержаны грантами РФФИ–DFG № 19-42-04120, РФФИ № 17-12-01534, № 23-12-00180, г/бюджетными темами № 121112200078-7, № 124021600038-9 и выполнялись в рамках крупного научного проекта при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2024-535 от 23.04.2024)

### **Методология и методы исследования.**

В ходе диссертационного исследования широко используются аналитические и численные методы. Для аналитической части диссертации применяются: метод фазовой редукции для колебательных систем с устойчивым предельным циклом, метод описания динамики систем с тепловым шумом посредством уравнения Фоккера–Планка, метод динамики характеристических функций, метод многих масштабов, слабонелинейный анализ. Для прямого численного моделирования макроскопической динамики ансамблей используется метод Рунге–Кутты–Мерсона.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Колебания течений термоконцентрационной конвекции в смежных ячейках пористой среды синхронизируются при достаточно сильной связи через поле температуры на общей стенке. Их синхронизация может быть количественно охарактеризована в рамках построенного в работе фазового описания. [2]
2. В рамках формализма круговых кумулянтов могут быть получены семейства точных решений для динамики ансамблей фазовых элементов (осцилляторов). Эти решения являются расширением теории Отта–Антонсена и соответствуют двухгрупповым состояниям ансамблей. Макроскопическая

динамика ансамбля описывается замкнутой системой уравнений для первого и второго кумулянтов. [4]

3. При нарушении условий применимости оригинальной теории Отта–Антонсена использование формализма круговых кумулянтов позволяет получить бесконечные цепочки уравнений макроскопической динамики ансамбля, которые являются обобщением теории Отта–Антонсена. Цепочка уравнений хорошо сходится для случая внутреннего шума (например, теплового); при малой интенсивности шума первые два уравнения дают достаточную точность описания коллективной динамики. [1, 5]
4. Применение формализма круговых кумулянтов позволяет строить приближенные математические модели макроскопической динамики при аномальной диффузии; при этом нет проблем с разрывами и отрицательными значениями поля концентрации. [7]

**Степень достоверности** полученных результатов подтверждается согласием между численным моделированием и строгими аналитическими результатами; совпадением результатов, полученных разными методами и в рамках разных подходов; согласием результатов диссертационных исследований в предельных случаях с известными ранее результатами; внутренней непротиворечивостью результатов.

### **Публикации.**

По теме диссертации опубликовано 8 статей, включая 5 статей в периодических изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и Web of Science [1, 4–7], 2 работы в журналах из списка ВАК [2, 8], 1 публикация в сборнике научных статей [3]. Также было опубликовано 15 тезисов докладов конференций, приведенных ниже.

### **Апробация работы.**

Результаты диссертационной работы были представлены на следующих научных конференциях:

- V, VI Всероссийская конференция Пермские гидродинамические научные

- чтения (Пермь, 2018, 2019 гг.);
- School and Workshop “Patterns of Synchrony: Chimera States and Beyond” (Trieste, Italy, 2019 г.);
  - XVIII, XIX, XX Научная школа “Нелинейные волны” (Нижний Новгород, 2018, 2020, 2022 гг.);
  - XXI, XXII, XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2019, 2021, 2023 гг.);
  - XXIX, XXX Всероссийская научная конференция “Нелинейные дни в Саратове для молодых” (Саратов, 2021, 2023 гг.);
  - Международный симпозиум “Неравновесные процессы в сплошных средах” (Пермь, 2017, 2021 гг.);
  - Международная научная конференция “Динамические системы. Теория и приложения” (Нижний Новгород, 2022 г.);
  - Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2022 (Сочи, 2022 г.);
  - Всероссийская конференция “Математические проблемы механики сплошных сред” (Новосибирск, 2024 г.).

Результаты исследований также были представлены на научных семинарах Института механики сплошных сред УрО РАН:

- Семинар № 6-2023 “Фазовое описание для колебательной термоконвекционной конвекции в пористой среде” (19 апреля 2023 г.)
- Семинар № 9-2023 “Макроскопическая намагниченность XY-макроспиновой системы в рамках обобщенной теории Отта–Антонсена” (31 мая 2023 г.)
- Семинар № 10-2023 “Кумулянтное описание синхронизации гидродинамических систем” (28 июня 2023 г.)

**Личный вклад автора.** Автором диссертации построено аналитическое описание слабонелинейных режимов конвекции и фазовое описание для таких

систем; получены и аналитически исследованы уравнения двухкумулянтного приближения. Написаны вычислительные программы для численного моделирования задач, получена основная часть численных результатов. Постановка задач, результаты исследования и их интерпретация обсуждалась с научным руководителем Ю.Л. Райхером и другими соавторами публикаций. Выбор теоретических моделей и методов решения осуществлялся совместно с Д.С. Голдобиним. Подготовка публикаций проводилась совместно с Д.С. Голдобиним.

### **Содержание и структура работы**

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы (120 наименований). Работа содержит 29 рисунков. Общий объем диссертации составляет 130 страницы.

## Обзор литературы

При исследованиях общих закономерностей сложного поведения нелинейных систем особое внимание привлекают коллективные явления в ансамблях связанных элементов, такие как синхронизация. Динамика таких систем представляет интерес для многих приложений в физике (коллективная динамика многомодовых лазеров, джозефсоновских сверхпроводящих контактов, массивов спин-трансферных осцилляторов, ячеек Хеле–Шоу и турбулентной перемежаемости) [9–15], в биологии (процессы в колониях дрожжевых клеток и синтетических сетях генной регуляции, синхронизация жгутиков в хоаноците, патологическая синхронизация активности нейронов) [16–20], в химии (динамика ансамблей электрохимических осцилляторов или фотохимических осцилляторов, динамика систем с реакцией и диффузией) [21–24], в технике (устойчивость мостов, синхронизация связанных электрогенераторов) [25, 26] и даже в описании социальных явлений [27, 28]. Здесь интересны системы, в которых собственная динамика элементов ансамбля сравнительно проста, а сложность возникает как следствие их сетевого взаимодействия. С точки зрения вопросов управления и самоорганизации важны ситуации, когда коллективные явления возникают именно при слабой связи между элементами или несильном воздействии на них.

По этим причинам в центре внимания оказываются ансамбли осцилляторов, которые в отсутствие связи находились бы в режиме устойчивых периодических колебаний. Если элементы находятся в устойчивом стационарном состоянии, то слабое воздействие лишь несущественно сдвинет положение равновесия каждого элемента, но не вызовет нетривиальных коллективных явлений. Если, напротив, собственная динамика элементов хаотична, сложность в поведении системы будет присутствовать изначально, без связи.

В системах с периодическими колебаниями собственная динамика проста, но есть одна нейтрально устойчивая степень свободы — фаза колебания. Слабое

воздействие на систему позволяет управлять динамикой этой фазы, добиваясь совпадения ритмов колебаний элементов. Оказываются возможны коллективные явления при слабых связи или воздействии. С практической точки зрения, именно примерами связанных периодических осцилляторов являются электродвигатели и роторные двигатели, смонтированные на общей платформе, массивы одинаковых электроприборов, подключенных к общей сети переменного тока, пешеходы на мосту, колонии бактерий, пористые конвективные ячейки со связью через соприкасающиеся стенки и т.д. Даже если общая физическая картина, связанная с синхронизацией, сложна и многогранна, анализ синхронизации можно чрезвычайно упростить для слабых возмущений, рассматривая ее в рамках динамики фаз колебаний [18, 29]. Такая формулировка позволяет нам сосредоточиться исключительно на скалярной фазе осциллятора вместо того, чтобы заниматься динамикой состояния в полном многомерном (или бесконечномерном) конфигурационном пространстве.

В основе математической теории коллективных явлений в таких системах лежит фазовое описание [18, 21, 29–31], при котором главное внимание уделяется динамике фазы колебания элемента. Математически, на уровне уравнений, исследуется динамика ансамблей фаз. С точки зрения теории возмущений, фазовое описание представляет собой стандартный теоретический метод анализа слабозвозмущенных осцилляторов с устойчивым предельным циклом, этот метод является частным случаем метода усреднения Крылова–Боголюбова [32, 33], при котором для каждого осциллятора остается уравнение динамики единственной “медленной” переменной [33]. Для метода Крылова–Боголюбова Боголюбовым была доказана теорема о равномерной сходимости разложений [32].

Традиционно, фазовое описание активно используется для изучения тканей мозга [20, 34–39]. Даже при сильно нелинейной динамике и неоднородности движения, как в нейроподобных системах, в системе можно ввести фазу. Более того описывать динамику системы с помощью фазы и исследовать ее коллективные эффекты возможно и для экспериментальных данных очень низкой точности

(с высоким уровнем измерительного шума). В работе [35], использование фазового описания иллюстрируется для грубых данных экспериментов с популяциями биологических (тканей мозга) и электрохимических осцилляторов; в работах [40, 41] из данных экспериментов с электрохимическими осцилляторами восстанавливается их фазовая восприимчивость.

Хотя фазовое описание применялось к многочисленным проблемам в разных областях науки, его применение в области гидродинамики до недавнего времени оставалось сравнительно ограниченным, особенно в отношении синхронизации. Это связано с тем, что большинство гидродинамических задач — это распределенные системы, для которых строгий математический вывод уравнений фазовой редукции чрезвычайно трудоемок. Традиционно для таких систем, при необходимости, фазовое описание строилось эмпирически — с опорой на экспериментальные данные (например, [42]), а не полную систему уравнений в частных производных. В работах [12, 13] теоретически построено коллективное фазовое описание колебательной конвекции в ячейках Хеле–Шоу и описана динамика колебательной конвекции в системе. В [43] была решена проблема фазового отклика для синхронизации периодических потоков; в частности, описано влияние периодического внешнего воздействия на нестационарный след за цилиндром в потоке — “вихревую дорожку Кармана”. Нестационарные течения за обтекаемым телом демонстрируют преобладающее колебательное поведение из-за периодического срыва вихрей. Возможность управлять этим срывом имеет решающее значение для улучшения аэродинамических характеристик тел в потоке [44].

В работе [11] исследуется синхронизация между двумя конвективными ячейками Хеле–Шоу, основной целью данного исследования является изучение взаимодействия неустойчивости пограничного слоя, возникающей в двух связанных ячейках. Также авторы рассматривают синхронизацию ячеек при различных условиях связи между ними.

В [42] авторы реализуют серию экспериментов с парой взаимодействующих

осцилляторов, в роли которых выступает пламя свечей. Изучаются переходы из одного состояния синхронизации в другое через промежуточные режимы по мере изменения управляющих параметров. Экспериментально наблюдается сосуществование двух сценариев перехода: при первом сценарии между режимами синфазной и противофазной синхронизации колебания исчезают (“amplitude death”) в некотором интервале параметров, при втором — происходит бифуркация скачка разности фаз, колебания при этом никогда не прекращаются.

Экспериментальные исследования синхронизации конвективных течений проводились в паре термически связанных вращающихся бароклинных кольцевых систем [45] как в периодическом, так и в хаотическом режимах. Эта система — простой и контролируемый экспериментальный аналог атмосферной циркуляции, который может послужить простой моделью для изучения изменчивости климата. Численные исследования синхронизации пространственно-временного хаоса проводились для квазидвумерной модели пары каналов [46], выступавшей прообразом атлантического и тихоокеанского секторов глобальной климатической системы Земли. “Настольные” экспериментальные и упрощенные численные модели являются важными инструментами для понимания механизмов реальных атмосферных явлений и процессов [47, 48].

В настоящей диссертационной работе исследуется синхронизация во времени, но в некоторых системах можно рассматривать такие явления, как аналог пространственной синхронизации. В работах [49, 50] рассматривалась двухслойная система, где растворы реагируют на границе контакта. Если рассматривать пространственную координату вдоль слоя как “время”, пространственно периодические структуры формально можно интерпретировать как два связанных нелинейных осциллятора. Причем здесь “связь” является слабой, поскольку области генерации конвективных вихрей разделены диффузионным слоем с устойчивой стратификацией плотности — в таком слое возмущения подавляются. В этой системе в пространстве состояний появляется тор. Для таких пространственных структур можно ввести “фазу колебаний” и описывать

“синхронизацию” структур в верхнем и нижнем слое. Для квазипериодической структуры можно говорить об отсутствии фазовой синхронизации, тогда как при кратном соотношении  $n : m$  пространственных периодов верхней и нижней вихревых структур можно говорить об  $n : m$ -фазовой синхронизации [51].

В 1 главе данной работы, демонстрируется использование фазового описания для колебательной термоконцентрационной конвекции в смежных ячейках пористой среды с учетом эффекта Соре. Все результаты получены аналитически (в работах [12, 13, 43, 44] фазовое описание строится с опорой на прямое численное моделирование).

Рассматриваемая в настоящей работе система была выбрана как достаточно изученная гидродинамическая система [52], удобная для аналитического построения фазового описания. Ранее другими авторами была исследована термоконцентрационная конвекция в горизонтальном слое пористой среды [52–60]. В данных работах подробно исследована термоконцентрационная конвекция в горизонтальном слое пористой среды с учетом вертикальных градиентов температуры и концентрации. В [55] изучали термоконцентрационную конвекцию в пористом слое, насыщенном бинарной жидкостью и нагреваемом снизу или сверху. Авторы упомянули, что в присутствии эффекта Соре колебательная конвекция может возникнуть, даже если раствор нагревается сверху. Эффект Соре известен уже более полутора веков. Этим эффектом нельзя пренебречь во многих физических процессах. В бинарных жидкостях, из-за наложенного градиента температуры, эффект Соре способствует появлению вертикального градиента концентрации, который резко изменяет градиент плотности и, следовательно, условия для начала конвекции. Авторами были получены результаты, касающиеся возбуждения конвективных движений и нелинейных режимов конвекции. Продемонстрировано, что числа Рэлея и числа плавучести достаточно для определения поведения системы. Установлено, что величина знака числа плавучести влияет на состояние потери устойчивости в сторону монотонной или колебательной неустойчивости. В работах [52] авторы изучали кон-

вективные течения в тонком слое пористой среды, вызванные локализованным источником тепла или примеси, также были изучены режимы поведения системы. В случае локального источника тепла возможны режимы двух типов: в теплопередаче от источника может преобладать либо конвекция, либо диффузия. В некоторых случаях возможна мультистабильность между этими режимами, в которых преобладают разные механизмы теплопередачи. В [58] продемонстрировано, что линейная неустойчивость механического равновесия связана с длинноволновыми возмущениями, и аналитически найдена интенсивность конечно-амплитудной конвекции в рамках приближения плоско параллельных течений. В работе [59] численно и аналитически исследуется термоконцентрационная конвекция с учетом эффекта Соре внутри мелкопористого или жидкого слоя, подверженного вертикальному градиенту температуры. Исследование посвящено влиянию термодиффузии на интенсивность потока, скорости тепло- и массопереноса. В [60] исследовалась двойная диффузионная конвекция с учетом эффекта Соре и без него. Также авторы проводили анализ линейной устойчивости состояния механического равновесия при эффекте Соре, незавершенный в работе [58]. В [61] проводилось исследование влияния эффекта Соре на течения и процессы тепло- и массопереноса при различных граничных условиях для течений: свободных и непроницаемых границах. В литературе также исследовалась термоконцентрационная конвекция в бинарной жидкости с эффектом Соре при периодической модуляции параметров системы (например, [62, 63]).

Синхронность больших ансамблей связанных элементов можно охарактеризовать параметрами порядка — средними полями. Довольно часто эволюция этих коллективных переменных оказывается на удивление простой, что делает возможным описание с использованием лишь нескольких параметров порядка. Таким образом, пытаются построить точные замкнутые малоразмерные математические модели динамики нескольких ведущих параметров порядка.

В течение последних 30 лет то, с какой частотой коллективная динамика различных систем оказывается простой и малоразмерной, получило строгое, но

прозрачное математическое объяснение. Ватанабэ и Строгац (ВС) [64] обнаружили, что при наличии некоторого свойства фазового ансамбля его коллективная динамика приобретает очень специфический вид. В ансамбле  $N$  элементов независимыми являются только три переменные, две из которых — это глобальные переменные, связанные с параметром порядка (мерой синхронности элементов ансамбля), и имеется  $(N - 3)$  интеграла движения (констант движения). Математики, следует говорить о частичной интегрируемости динамики системы. Это справедливо при любом значении  $N$ , для сколь угодно больших ансамблей. Глобальные переменные имеют простую форму, если плотность распределения констант однородна, — в этом случае получается замкнутая динамическая система для параметров порядка системы.

Случай равномерного распределения констант Ватанабэ–Строгаца заслуживает особого внимания и лег в основу теории Отта и Антонсена (ОА) [65], которая строится для термодинамического предела большого ансамбля. В теории ОА получено частное решение для распределения состояний элементов ансамбля. Для этого решения форма распределения определяется единственной комплекснозначной переменной — параметром порядка Курамото, а динамика самого этого параметра порядка подчиняется сравнительно простому обыкновенному дифференциальному уравнению. Как следует из сказанного выше, решение ОА, ввиду частичной ВС-интегрируемости, может быть только нейтрально устойчивым для ансамблей идентичных элементов. В то же время, решение ОА, по-видимому, становится устойчиво при введении неидентичности. До сих пор, однако, отсутствовало описание ситуаций в окрестности решения ОА, которое позволяло бы проследить указанные свойства. В настоящей диссертационной работе такое описание строится на базе “круговых кумулянтов”. Эти величины можно считать специальными комплексными параметрами порядка для фазовых ансамблей. Вместе с тем демонстрируется существование инвариантного решения, расширяющего решение Отта–Антонсена.

Авторы работы [66] разрабатывали подход к построению теории возмущений

для слабонеидентичных ансамблей. Аналитически вычисляя поправки к динамике Ватанабэ–Строгаца [64] для двух типов возмущений: неидентичности собственных частот и вынуждающих факторов, вызванных малым белым шумом. Показано, что в обоих случаях комплексное среднее поле, для которого записаны динамические уравнения, близко к параметру порядка Курамото, вплоть до главного порядка по возмущению. Это подтверждает обоснованность динамической редукции, предложенной Оттом и Антонсеном [65] для слабонеоднородных ансамблей. Следует отметить два недостатка теории возмущений [66]: Во-первых, ее расходимость для случая почти идеальной синхронности, а с точки зрения приложений — это самый важный предел, когда нет расстройки между состояниями осцилляторов. Во-вторых, уравнения получаются именно для динамики вспомогательной комплексной глобальной переменной, а не параметра порядка Курамото, как в теории ОА. Параметр порядка вычисляется из вспомогательной переменной довольно сложным образом, хоть и близок к ней по значению.

Свойства реальных систем не так далеки от тех, при которых справедливы теории Ватанабэ–Строгаца [64] и Отта–Антонсена [65]. Однако даже для слабых нарушений этих свойств не получалось построить обобщение теории на протяжении десяти лет. Введение формализма круговых кумулянтов позволило построить эти обобщения [1, 67]. На основе этих работ рядом исследователей были получены новые теоретические результаты. В [68] используется подход круговых кумулянтов для получения низкоразмерной макроскопической модели ансамбля квадратичных нейронов-пороговых интеграторов (QIF) с шумом, взаимодействующих посредством синаптических импульсов. В [69] авторы исследовали различные эффекты гетерогенности и шума в популяции модифицированных тета-нейронов, с сетью случайных связей через ГАМКергические синапсы. Для сбалансированных сетей QIF-нейронов с разреженной системой синаптических связей, удается получить систему двух кумулянтных уравнений, которая позволяет теоретически описать возникновение гамма-осцилляций в се-

тях с эндогенным шумом [70]. В работе [71] также используются круговые кумулянты для теоретического описания синхронизационных переходов гибридного типа в ансамблях возбудимых элементов с глобальной связью и шумом. В [72, 73] формализм круговых кумулянтов использовался для маломодового описания динамики системы с мультипликативным шумом.

# Глава 1. Фазовое описание колебательной термоконцентрационной конвекции в смежных ячейках пористой среды

Данная глава посвящена исследованию термоконцентрационной конвекции двухкомпонентной смеси в подогреваемых снизу смежных горизонтальных ячейках пористой среды в поле тяжести. В каждой ячейке возможна длинноволновая колебательная неустойчивость, которая возникает вследствие конкуренции двух процессов. При фиксированном потоке тепла через границы в системе возможна монотонная длинноволновая тепловая конвективная неустойчивость, а при фиксированном диффузионном потоке примеси — монотонная длинноволновая концентрационная конвективная неустойчивость. При колебательной неустойчивости, синхронизация течений жидкости в смежных ячейках пористой среды может быть изучена в рамках фазового описания.

Между тем получить фиксированный ненулевой градиент концентрации примеси около границы при реальных граничных условиях возможно только в случае, когда эффект Соре является значимым, а границы — непроницаемыми для вещества, то есть поток вещества равен нулю. Это определяет выбор граничных условий в настоящей главе: для каждого слоя полагается фиксированность теплового потока и отсутствие потока примеси через горизонтальные границы. Движения жидкости описываются в приближении Дарси–Буссинеска с учетом эффекта Соре [74, 75]. Дополнительно, для описания теплообмена между ячейками в рассматриваемой системе вводится слагаемое распределенного источника/стока тепла для каждой ячейки. Таким образом, в уравнениях для конвекции Соре в ячейках появляется связь через поле температуры.

Для описанной конфигурации системы выводятся уравнения, описывающие нелинейную динамику длинноволновых структур. Уравнения выводятся с использованием метода многих масштабов [76]. Аналитическое описание системы,

в рамках слабонелинейного анализа, можно построить только вблизи границы конвективной неустойчивости системы. Поскольку вопрос о коллективных эффектах актуален для колебательных режимов, ограничиваемся случаем колебательной неустойчивости. Строится карта режимов для понимания актуального диапазона параметров. После получения уравнений для амплитуды колебательных мод со связью, выводятся уравнения для фаз колебаний, которые являются ключевыми уравнениями фазового описания [18, 30]. На их основе определяются значения параметров, при которых в системе существует режим синхронизации течений, также находятся решения для устойчивого синхронного режима. Рассматриваются конкретные физические системы: водный раствор этилового спирта, бинарная смесь углекислого газа и азота в кварцевом песке.

### 1.1. Уравнения термоконцентрационной конвекции с учетом эффекта Соре в слое пористой среды

Рассматривается термоконцентрационная конвекция двухкомпонентной жидкости в подогреваемых снизу смежных прямоугольных ячейках пористой среды (рис. 1). Границы ячеек полагаются непроницаемыми (в том числе для примеси), тепловой поток через горизонтальные границы — фиксированным, вертикальные границы обладают очень низкой теплопроводностью. Тепловая конвекция рассматривается с учетом эффекта Соре (эффект термодиффузии), в данном случае имеется поток концентрации примеси, который выглядит так:

$$\vec{j} = -D \left( \nabla C + \alpha_T \frac{C}{T} \nabla T \right),$$

где  $D$  — коэффициенты диффузии и  $\alpha_T$  — константа термодиффузии.

Предполагается, что выравнивание температуры между жидкостью и твердым скелетом происходит достаточно быстро, и отдельных температур для них не вводится. При малых перепадах температуры и концентрации можно полагать, что плотность жидкости зависит от них линейно:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0) + \beta_C(C - C_0)),$$

где  $C$  — концентрация тяжелой компоненты (массовая доля),  $\rho_0$  — плотность смеси при температуре  $T_0$  и концентрации  $C_0$ ,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения жидкости, коэффициент  $\beta_C = \rho_0^{-1}(\partial\rho/\partial C)_{T,P}$  определяет зависимость плотности от концентрации. Для потока концентрации изменения концентрации и температуры учитываются лишь в градиентах. Система координат выбирается так, что плоскость  $(x, y)$  горизонтальна,  $z = 0$  и  $z = h$  — нижняя и верхняя границы слоя (рис. 1,2).

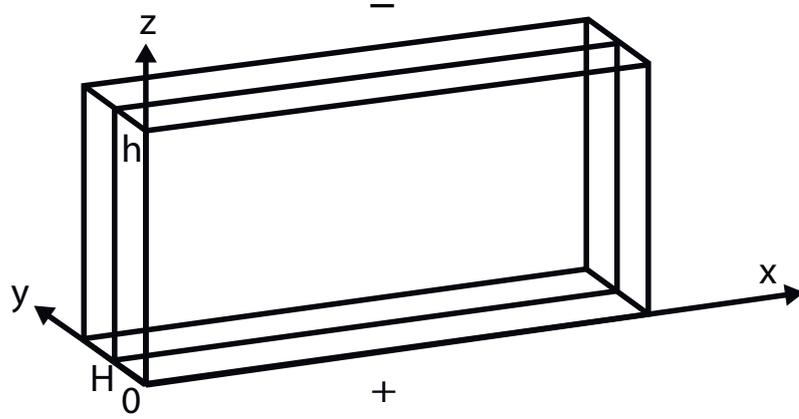


Рис. 1: Пара смежных ячеек с пористой средой — геометрия системы.

Фильтрация жидкости описывается моделью Дарси–Буссинеска [77]:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \frac{\nu m}{K} \vec{v}_1 + g(\beta T_1 - \beta_C C_1) \vec{e}_z, \\
 \frac{\partial C_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) C_1 &= D \Delta C_1 + \frac{\alpha_T C_0 D}{T_0} \Delta T_1, \\
 \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{1}{b} (\vec{v}_1 \cdot \nabla) T_1 &= \chi \Delta T_1 + Q_1, \\
 \nabla \cdot \vec{v}_1 &= 0, \\
 z = 0, h : \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} &= -A, \quad v_{1z} = 0, \quad j_{1z} = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\vec{v}_1$  — средняя скорость (осредненная по масштабам пор) жидкости в порах,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $m$  — пористость среды (отношение объема пор в элементе пористой среды к объему этого элемента),  $K$  — коэффициент проницаемости,  $h$  — высота ячейки,  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$  — вектор ускорения свободного падения,  $b$  — отношение теплоемкости пористой среды, насыщенной жидкостью, к части

этой теплоемкости, приходящейся на жидкость в порах ( $b > 1$ ),  $\chi$  — температуропроводность пористой среды, насыщенной жидкостью,  $Q$  — распределенный источник тепла. Индекс 1 означает, что поля относятся к первой ячейке. Аналогичная система уравнений получится для второй ячейки.

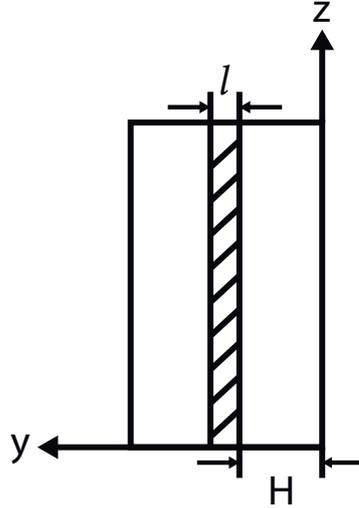


Рис. 2: Геометрия системы, вид сбоку.

Предполагаем, что взаимное проникновение тепловых возмущений между ячейками происходит мгновенно (см. рис. 3), тогда теплоемкость стенок в данной задаче можно не учитывать. Математически “мгновенность” выражается следующим образом: расстояние между ячейками много меньше характерного пространственного масштаба затухания температурных возмущений,

$$l \ll \sigma_1 \sim \sqrt{\chi\tau_1}, \quad l \ll \sigma_2 \sim \sqrt{\chi\tau_2},$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — характерные пространственные масштабы затухания возмущений температуры, приходящих в материал стенки из первой и второй ячеек жидкости соответственно,  $\tau_1, \tau_2$  — характерные периоды колебаний температуры в ячейках жидкости,  $l$  — толщина общей стенки.

Для обезразмеривания системы выберем за единицу измерения длины толщину слоя  $h$ , времени —  $h^2/\chi$ , скорости —  $b\chi/h$ , температуры —  $Ah$ , концентрации —  $(-\alpha_T)AhC_0/T_0$ , давления —  $b\rho_0\nu\chi m/K$ .

Поведение системы будет определяться безразмерными параметрами

$$N_* = \frac{(-\alpha_T)\beta_C C_0}{\beta T_0}, \quad Ra_* = \frac{\beta Ah^2 g K}{mb\nu\chi}, \quad S \equiv \frac{D}{\chi}, \quad b, \quad (2)$$

где  $N_*$  — параметр плавучести,  $Ra_*$  — число Рэлея–Дарси (концентрационное число Рэлея–Дарси  $Ra_C \equiv Ra_* N_*$ ),  $S$  — обратное число Льюиса; при определении параметра плавучести из соображений удобства явно учтено, что для многих типичных растворов [78, 79] константа термодиффузии  $\alpha_T < 0$ .

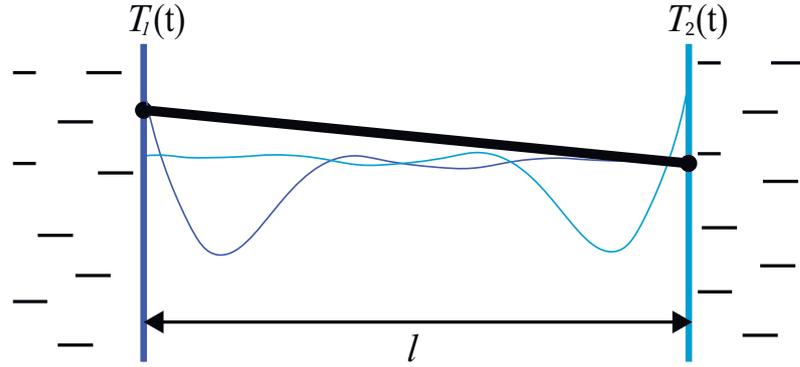


Рис. 3: Стенка между ячейками. Тонкие линии представляют профиль температуры в объеме стенки в случае высокочастотного периодического колебания температуры поверхности  $T_1$  (или  $T_2$ ); при актуальных параметрах задачи масштаб пространственных осцилляций профиля температуры оказывается много больше толщины стенки  $l$  и профиль температуры будет почти линейным (жирная линия).

Получаем безразмерные уравнения:

$$\begin{aligned} -\nabla p_1 - \vec{v}_1 + Ra_*(T_1 - N_* C_1)\vec{e}_z &= 0, \\ \frac{\partial C_1}{\partial t} + b(\vec{v}_1 \cdot \nabla)C_1 &= S(\Delta C_1 - \Delta T_1), \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla)T_1 &= \Delta T_1 + Q_1, \\ \nabla \cdot \vec{v}_1 &= 0, \\ z = 0, 1 : \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} &= -1, \quad w_1 = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial z} = -1, \end{aligned}$$

где  $w$  — вертикальная компонента поля скорости. Система безразмерных уравнений, описывающая поведение конечных возмущений состояния механическо-

го равновесия:

$$T_1 = -z, \quad C_1 = -z,$$

— имеет вид:

$$\begin{aligned} -\nabla p_1 - \vec{v}_1 + Ra_*((1 - N_*b)\theta_1 + N_*c_{*1})\vec{e}_z &= 0, \\ \frac{\partial c_{*1}}{\partial t} + (b\vec{v}_1 \cdot \nabla)(c_{*1} - (b-1)\theta_1) &= b \Delta \theta_1 + S \Delta (c_{*1} - (b-1)\theta_1) + bQ_1, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla)\theta_1 &= \Delta \theta_1 + w_1 + Q_1, \\ \nabla \cdot \vec{v}_1 &= 0, \\ z = 0, 1: \quad w_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \frac{\partial c_{*1}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\theta$  — возмущение поля температуры,  $c_*$  — возмущение поля  $C_* \equiv bT - C$ .

В случае двух смежных тонких ячеек поля скорости и температуры будут зависеть только от координат  $(x, z)$ , а теплообмен между ячейками может быть описан посредством источникового слагаемого

$$Q_1 = a(\theta_2 - \theta_1). \quad (4)$$

Здесь коэффициент связи между пористыми ячейками  $a$  определяется как

$$a = \frac{\kappa_b h^2}{\kappa Hl}, \quad (5)$$

где  $\kappa$  — теплопроводность ячейки,  $\kappa_b$  — теплопроводность боковых стенок ячеек (если  $\kappa_b \ll \kappa$ , то между ячейками теплоизолирующая прослойка),  $H$  — толщина ячейки,  $l$  — толщина общей стенки (см. рис. 2б).

Проектируя уравнения движения из системы (3) на плоскость  $(x, y)$ , можно получить горизонтальную компоненту скорости. Тогда можно явно написать для полной скорости:

$$\vec{v}_1 = -\nabla_2 p_1 + w_1 \vec{e}_z.$$

Здесь индекс “2” означает дифференцирование лишь по горизонтальным координатам. Уравнение непрерывности принимает вид:

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} - \Delta_2 p_1 = 0. \quad (6)$$

Выражение для вертикальной компоненты поля скорости получается при проецировании уравнения движения из системы (3) на ось  $z$ , то есть

$$-\frac{\partial p_1}{\partial z} - w_1 + Ra_*((1 - N_*b)\theta_1 + N_*c_{*1}) = 0,$$

применим оператор  $\Delta_2$  к полученному выражению:

$$\Delta_2 w_1 + \frac{\partial}{\partial z} \Delta_2 p_1 = Ra_* \Delta_2 ((1 - N_*b)\theta_1 + N_*c_{*1}).$$

Используя (6), получаем полный лапласиан для  $w_1$ , тогда полная система уравнений (3) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \Delta w_1 &= Ra \Delta_2 ((1 - N)\theta_1 + Nc_1), \\ \frac{\partial c_1}{\partial t} + b\widehat{\Gamma}_1(c_1 - \tilde{b}\theta_1) &= S \Delta c_1 + \Delta\theta_1 + \frac{bQ_1}{b - S(b - 1)}, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \widehat{\Gamma}_1\theta_1 &= \Delta\theta_1 + w_1 + Q_1, \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} &= \Delta_2 p_1, \\ z = 0, 1 : \quad w_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \frac{\partial c_1}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\widehat{\Gamma}_1 = w_1 \frac{\partial}{\partial z} - \nabla_2 p_1 \cdot \nabla_2$  — оператор конвективной производной и введены новые обозначения для переменных и параметров:

$$\begin{aligned} c &= \frac{c_*}{b - S(b - 1)}, \\ Ra &= (1 - N_*S(b - 1))Ra_*, \\ N &= \frac{N_*b - N_*S(b - 1)}{1 - N_*S(b - 1)}, \\ \tilde{b} &= \frac{b - 1}{b - S(b - 1)}. \end{aligned} \tag{8}$$

## 1.2. Длинноволновое приближение

При фиксированном тепловом потоке через границы горизонтального слоя возможна длинноволновая конвективная неустойчивость состояния механического равновесия как в случае однородной жидкости, так и в случае пористой среды [53, 54, 77]. Иными словами, поставленные граничные условия в данной

системе допускают существование длинноволновой неустойчивости. Из уравнений поведения длинноволновых возмущений в дальнейшем можно получить амплитудные уравнения, к которым применяется фазовое описание. В рамках длинноволнового приближения следует предполагать малость горизонтальных производных поля скорости по сравнению с вертикальной. Для учета нелинейности уравнений, связанной с конвективной производной, вертикальную компоненту поля скорости нужно полагать малой:  $w \sim L^{-1} \sim \varepsilon^1$ , где  $L$  — характерный горизонтальный масштаб течений. Скалярные поля в свою очередь предполагаются большими  $P, c, \theta \sim L \sim \varepsilon^{-1}$ ; источниковое слагаемое  $Q_{1,2} \sim L^{-1} \sim \varepsilon^1$ . В пределах данного раздела индексы, указывающие номер ячейки, опущены для краткости обозначений. Применим метод многих масштабов [76] для системы (7) с граничными условиями  $z = 0, 1 : w = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial z} = 0$ . Для первого и четвертого уравнений системы (7) ведущий порядок  $\varepsilon^1$ , для второго и третьего уравнений ведущий порядок  $\varepsilon^{-1}$ .

$$\begin{aligned} w &= \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots, \\ p &= \varepsilon^{-1} p^{(-1)} + \varepsilon^0 p^{(0)} + \varepsilon^1 p^{(1)} + \dots, \\ \theta &= \varepsilon^{-1} \theta^{(-1)} + \varepsilon^0 \theta^{(0)} + \varepsilon^1 \theta^{(1)} + \dots, \\ c &= \varepsilon^{-1} c^{(-1)} + \varepsilon^0 c^{(0)} + \varepsilon^1 c^{(1)} + \dots, \\ x &= \varepsilon^{-1} x^{(-1)}, \\ \nabla_2 &= \varepsilon^1 \nabla_2^{(1)} = \varepsilon^1 \tilde{\nabla}_2. \end{aligned}$$

В порядке  $\varepsilon^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \theta^{(-1)} &= \vartheta(x, y), \\ c^{(-1)} &= \zeta(x, y). \end{aligned}$$

В порядке  $\varepsilon^0$ :

$$\begin{aligned} \theta^{(0)} &= \Theta(x, y) \left( 3z^2 - 2z^3 - \frac{1}{2} \right), & \Theta(x, y) &= \tilde{\nabla}_2 P \cdot \tilde{\nabla}_2 \vartheta, \\ c^{(0)} &= \mathcal{C}(x, y) \left( 3z^2 - 2z^3 - \frac{1}{2} \right), & \mathcal{C}(x, y) &= \frac{1}{S} \tilde{\nabla}_2 P \cdot \tilde{\nabla}_2 \left( b\zeta - (1 + b\tilde{b})\vartheta \right). \end{aligned}$$

В порядке  $\varepsilon^1$ :

$$w^{(1)} = -\frac{Ra}{12}\tilde{\Delta}_2((1-N)\vartheta + N\zeta)(6z - 6z^2),$$

$$p^{(-1)} = -P(x, y)(6 - 12z), \quad P(x, y) = \frac{Ra}{12}((1-N)\vartheta + N\zeta).$$

В уравнениях для  $\theta$  и  $s$  возникает слагаемое вида  $\hat{\Gamma}^{(1)}f^{(0)} + \hat{\Gamma}^{(2)}f^{(-1)}$ , которое в свою очередь можно расписать как:

$$\hat{\Gamma}^{(1)}f^{(0)} + \hat{\Gamma}^{(2)}f^{(-1)} = w^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial z} + \tilde{\nabla}_2 p^{(-1)} \cdot \tilde{\nabla}_2 f^{(0)} + w^{(2)}\frac{\partial f^{(-1)}}{\partial z} + \tilde{\nabla}_2 p^{(0)} \cdot \tilde{\nabla}_2 f^{(-1)}. \quad (9)$$

Также нужно учитывать, что

$$\frac{\partial f^{(-1)}}{\partial z} = 0, \quad p^{(0)} = (\tilde{\Delta}_2)^{-1}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial z}.$$

Возьмем интеграл от уравнения (9) и распишем каждый интеграл отдельно

$$\begin{aligned} \int_0^1 w^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial z} dz &= \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial z}(w^{(1)}f^{(0)}) - \tilde{\Delta}_2 p^{(-1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial z} \right) dz = \\ &= (w^{(1)}f^{(0)}) \Big|_0^1 + \int_0^1 \tilde{\Delta}_2 P(x, y)(6 - 12z)F(x, y) \left( 3z^2 - 2z^3 - \frac{1}{2} \right) dz = \\ &= -\frac{6}{5}F(x, y)\tilde{\Delta}_2 P(x, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{\nabla}_2 p^{(-1)} \cdot \tilde{\nabla}_2 f^{(0)} dz &= \\ &= -\int_0^1 \tilde{\nabla}_2 P(x, y)(6 - 12z)\tilde{\nabla}_2 F(x, y) \left( 3z^2 - 2z^3 - \frac{1}{2} \right) dz = \\ &= -\frac{6}{5}\tilde{\nabla}_2 P \cdot \tilde{\nabla}_2 F, \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \tilde{\nabla}_2 p^{(0)} \cdot \tilde{\nabla}_2 f^{(-1)} dz = \tilde{\nabla}_2 f^{(-1)}\tilde{\nabla}_2 \frac{1}{\tilde{\Delta}_2} \int_0^1 \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} dz = \tilde{\nabla}_2 f^{(-1)}\tilde{\nabla}_2 \frac{1}{\tilde{\Delta}_2} (w^{(2)}) \Big|_0^1 = 0.$$

Получаем

$$\int_0^1 \hat{\Gamma}^{(1)}f^{(0)} + \hat{\Gamma}^{(2)}f^{(-1)} dz = -\frac{6}{5}(F\tilde{\Delta}_2 P + \tilde{\nabla}_2 F \cdot \tilde{\nabla}_2 P) = -\frac{6}{5}\tilde{\nabla}_2 \cdot (F\tilde{\nabla}_2 P).$$

Здесь вместо функций  $f$  и  $F$  нужно подставлять соответствующие функции  $s$ ,  $\theta$  и  $\mathcal{C}$ ,  $\Theta$ . Конечная система уравнений для некоторого аналога “химического

потенциала”  $\zeta_1$  и температуры  $\vartheta_1$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} - \frac{6b^2}{5S} \nabla_i \left( \nabla_j \left( \zeta_1 - \frac{(b-1)\vartheta_1}{b-S(b-1)} \right) \nabla_i P_1 \nabla_j P_1 \right) &= \frac{b\bar{Q}_1}{b-S(b-1)} + \\ &+ S \Delta \zeta_1 + \Delta \vartheta_1, \quad (10) \\ \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} - \frac{6}{5} \nabla_i (\nabla_j \vartheta_1 \nabla_i P_1 \nabla_j P_1) &= \bar{Q}_1 + \Delta \vartheta_1 - \Delta P_1, \end{aligned}$$

где используется правило Эйнштейна суммирования по повторяющимся индексам, значок “тильда” опущен,  $\bar{Q}_1 = \int_0^1 Q_1 dz$  — среднее значение источникового слагаемого по высоте; амплитуда поля давления

$$P_1 = \frac{Ra}{12} ((1-N)\vartheta_1 + N\zeta_1).$$

Аналогичный вывод можно проделать для второй ячейки.

### 1.3. Фазовые уравнения для колебательной конвекции

В предыдущих разделах задача была записана в трехмерной системе координат; начиная с этого раздела, считаем, что имеем тонкие ячейки: убираем зависимость от координаты  $y$ . Также конкретизируем вид слагаемого, описывающего теплообмен между смежными ячейками:  $Q_{1,2} = a(\theta_{2,1} - \theta_{1,2})$  (4). Аналитическое описание системы, в рамках слабонелинейного анализа, можно построить только вблизи границы конвективной неустойчивости системы (10) [52], для этого разберем возникающие режимы неустойчивости (монотонная, колебательная) в системе.

Для получения границ монотонной неустойчивости пренебрежем нелинейными слагаемыми в системе (10) и положим производную по времени равной нулю:

$$\begin{aligned} 0 &= S \Delta \zeta_1 + \Delta \vartheta_1, \\ 0 &= \Delta \vartheta_1 - \Delta P_1. \end{aligned}$$

Учитывая выражение для давления  $P_1 = \frac{Ra}{12} ((1-N)\vartheta_1 + N\zeta_1)$ , получаем уравнение для критического значения числа Рэлея—Дарси  $Ra_0$ . Порог монотонной

неустойчивости:

$$Ra_0 = \frac{12S}{S(1-N) - N};$$

при  $Ra_0 > 0$  система неустойчива выше порога  $Ra > Ra_0$ , при  $Ra_0 < 0$  система неустойчива для  $Ra < Ra_0$ . Иными словами, монотонная неустойчивость может возникать как при подогреве снизу ( $Ra_0 > 0$ ), так и при подогреве сверху ( $Ra_0 < 0$ ); в обоих случаях область неустойчивости соответствует более интенсивному нагреву, чем критический (рис. 4).

Для колебательной неустойчивости, пренебрегая нелинейными слагаемыми в (10) и делая замену  $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega_0$ , где  $\omega_0$  — частота колебаний на границе устойчивости, получим:

$$\begin{aligned} i\omega_0\zeta_1 &= S \Delta \zeta_1 + \Delta\vartheta_1, \\ i\omega_0\vartheta_1 &= \Delta\vartheta_1 - \Delta P_1. \end{aligned}$$

Для нормальных возмущений  $\{\zeta_1, \vartheta_1\} \sim e^{\pm ikx}$  с волновым числом  $k$  имеем  $\Delta = -k^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{i\omega_0}{k^2}\zeta_1 &= -S \Delta \zeta_1 - \Delta\vartheta_1, \\ \frac{i\omega_0}{k^2}\vartheta_1 &= -\vartheta_1 + P_1. \end{aligned}$$

Подставим  $P_1$ , составим определитель и приравняем его нулю — получим уравнение:

$$\left(S + \frac{i\omega_0}{k^2}\right) \left(1 - \frac{Ra}{12}(1-N) + \frac{i\omega_0}{k^2}\right) + \frac{Ra}{12}N = 0.$$

Разделив уравнение на действительную и мнимую части, можно получить выражения для  $Ra$  и  $\omega_0$ :

$$\frac{\omega_0^2}{k^4} = \frac{NRa_0}{12} - S^2 = \frac{(1+S)N}{1-N} - S^2; \quad (11)$$

колебательная неустойчивость существует выше порогового значения числа Рэлея–Дарси:

$$Ra_0 = \frac{12 + 12S}{1 - N}. \quad (12)$$

Поскольку вопрос о коллективных эффектах актуален для колебательных режимов, далее мы ограничиваемся случаем колебательной неустойчивости (см.

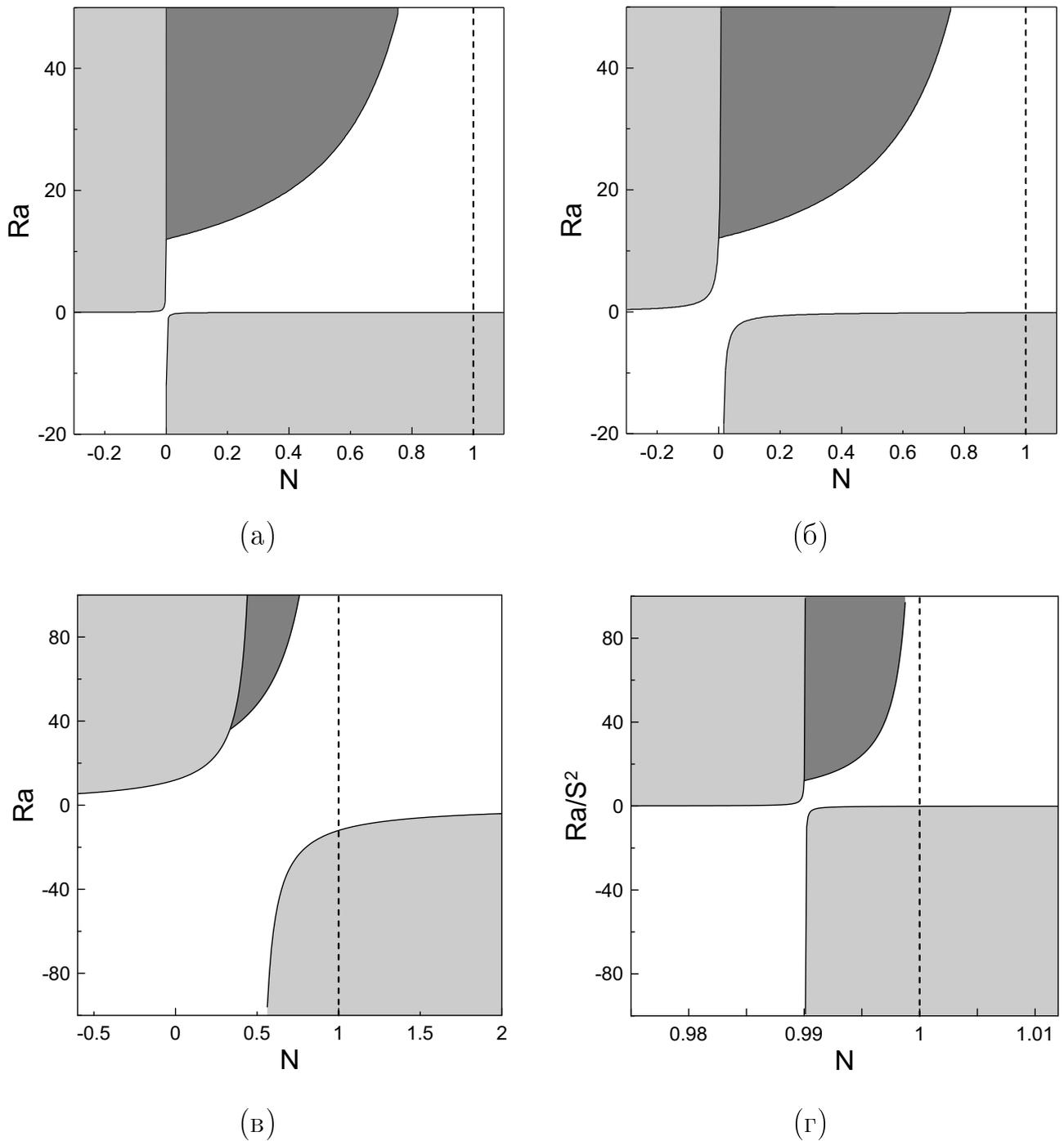


Рис. 4: Карта режимов линейной неустойчивости системы (10). Темно-серая область — колебательная неустойчивость, светло-серая область — монотонная неустойчивость, белая область — течение отсутствует. Параметр: (а)  $S = 0.0005$ , (б)  $S = 0.01$ , (в)  $S = 1$ , (г)  $S = 100$ .

карту режимов линейной неустойчивости системы на рис. 4), наблюдаемой при  $N_{01} < N < N_{02}$ , где  $N_{01} = S^2/(S^2 + S + 1)$ ,  $N_{02} = 1$  [52].

Нужно отметить, что в отсутствии пористого скелета физически содержа-

тельными являются значения обратного числа Льюиса  $S$  в диапазоне от  $\sim 0.01$  (жидкости) до  $\sim 1$  (газы). В пористой среде подобной кварцевому песку, насыщенной жидкостью (например, водным раствором спирта), температуропроводность среды на порядок превышает таковую для чистой жидкости, что расширяет нижнюю границу диапазона физически реалистичных значений  $S$  до  $10^{-3}$ ; при этом характерные значения  $(b - 1) \sim 1$ , а параметр плавучести  $N_* \sim 1$ .

Для смеси  $\text{CO}_2\text{-N}_2$  с массовой концентрацией  $\text{CO}_2$   $C = 0.11$  в кварцевом песке пористостью  $m = 0.4$  при нормальных условиях, используя приведенные ниже формулы (57) и (60) и значения материальных параметров из [80, 81], можно вычислить  $\alpha_T = -0.045$ ,  $S = 68$ ,  $b = 3040$  и  $N_* = 0.00187$ . При таком порядке величин параметров из (8) следует  $N = 1 + \frac{N_*b-1}{1-N_*S(b-1)} \approx 1 - \frac{N_*b-1}{N_*Sb}$ , то есть  $N$  оказывается меньше 1 на величину  $\sim 1/S \sim 10^{-2}$ ; подстановка значений параметров в точную формулу дает  $N = 0.986$ . Для различных бинарных смесей газов при нормальных условиях величина и знак  $\alpha_T$  и значения остальных безразмерных параметров оказываются того же порядка. Если одной из компонент газа (или обеими) оказывается водород или гелий, то значения ряда параметров существенно изменяются (значительно увеличиваются значения коэффициентов молекулярной диффузии и температуропроводности газа), но порядок величины ключевых безразмерных параметров задачи остается прежним. Изменение параметров в противоположную сторону — газов с тяжелыми молекулами — ограничено тем, что вещества со слишком тяжелыми молекулами при нормальных условиях являются жидкостями. Таким образом, при нормальных условиях для газов в типичных пористых средах характерные значения  $S \sim 10^2$ ,  $b \sim 10^3$ ,  $N \approx 1 - [1 - (N_*b)^{-1}]/S$ . При рассмотрении предельных случаев также следует иметь в виду, что  $b$  и  $S$  не одного порядка: их величины отличаются более чем в 10 раз.

При  $S \gg 1$  для области существования колебательной неустойчивости  $N_{01} < N < 1$  имеем  $N_{01} = 1 - 1/S + 1/S^3 + \dots$  (рис. 4г). При конечных  $N_*b > 1$ , что типично для многих газовых смесей, полученное выше  $N \approx 1 - [1 - (N_*b)^{-1}]/S$

оказывается в области существования колебательной неустойчивости. При этом из (8) следует  $Ra/S^2 \approx -(N_*b/S)Ra_*$ , то есть колебательная неустойчивость возникает при достаточно сильном подогреве сверху,  $Ra_* < 0$  (см. рис. 4г).

### 1.3.1. Слабонелинейный анализ около границы колебательной неустойчивости

Используя метод многих масштабов [76], можно получить амплитудные уравнения для системы (10) для случая смежных вертикальных ячеек с малой протяженностью вдоль направления  $y$ , когда можно полагать все поля в (10) однородными вдоль  $y$  и описывать теплообмен между ячейками посредством источникового слагаемого (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} &= \frac{6b^2}{5S} \nabla_i \left( \nabla_j \left( \zeta_1 - \frac{(b-1)\vartheta_1}{b-S(b-1)} \right) \nabla_i P_1 \nabla_j P_1 \right) + \frac{ba}{b-S(b-1)} (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \\ &\quad + S \Delta \zeta_1 + \Delta \vartheta_1, \\ \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} &= \frac{6}{5} \nabla_i (\nabla_j \vartheta_1 \nabla_i P_1 \nabla_j P_1) + a(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \Delta \vartheta_1 - \Delta P_1. \end{aligned}$$

Перепишем эту систему уравнений как

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} = \widehat{L} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} + a\widehat{Q} \begin{Bmatrix} \zeta_2 - \zeta_1 \\ \vartheta_2 - \vartheta_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_\zeta(\zeta_1, \vartheta_1) \\ T_\vartheta(\zeta_1, \vartheta_1) \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Вводя обозначение для вектора-состояния системы

$$|\Psi_1\rangle = \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix},$$

уравнение (13) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi_1\rangle = \widehat{L} |\Psi_1\rangle + a\widehat{Q} (|\Psi_2\rangle - |\Psi_1\rangle) + \widehat{T} |\Psi_1\rangle |\Psi_1\rangle |\Psi_1\rangle, \quad (14)$$

где

$$\widehat{L} \equiv \begin{pmatrix} S \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{RaN}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \left( 1 - \frac{Ra}{12} (1-N) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\widehat{Q} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{b - S(b-1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\widehat{T} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ g_1 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} f_2 \\ g_2 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} f_3 \\ g_3 \end{Bmatrix} \\ \equiv \begin{Bmatrix} \frac{6b^2}{5S} \nabla_i \left( \nabla_j \left( f_1 - \frac{(b-1)g_1}{b - S(b-1)} \right) \nabla_i P_2 \nabla_j P_3 \right) \\ \frac{6}{5} \nabla_i (\nabla_j g_1 \nabla_i P_2 \nabla_j P_3) \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

$$P_n \equiv \frac{Ra}{12} ((1-N)g_n + Nf_n).$$

На границе колебательной неустойчивости линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \widehat{L}_0 |\Psi\rangle$$

допускают единственное нейтрально устойчивое решение  $|\Psi_\omega\rangle$ :

$$\widehat{L}_0 |\Psi_\omega\rangle = i\omega_0 |\Psi_\omega\rangle. \quad (18)$$

Соответствующая эрмитово сопряженная задача:

$$\langle \Psi_\omega^+ | \widehat{L}_0 = i\omega_0 \langle \Psi_\omega^+ |, \quad \text{или} \quad \widehat{L}_0^+ |\Psi_\omega^+\rangle = -i\omega_0 |\Psi_\omega^+\rangle. \quad (19)$$

Для решений вида

$$|\Psi_\omega\rangle = \begin{Bmatrix} \zeta_\omega \cos kx \\ \vartheta_\omega \cos kx \end{Bmatrix}, \quad |\Psi_\omega^+\rangle = \begin{Bmatrix} \zeta_\omega^+ \cos kx \\ \vartheta_\omega^+ \cos kx \end{Bmatrix} \quad (20)$$

получаем

$$\widehat{L}_0 = \begin{pmatrix} -Sk^2 & -k^2 \\ \frac{Ra_0 N k^2}{12} & \left( \frac{Ra_0}{12} (1-N) - 1 \right) k^2 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\widehat{L}_0^+ = \begin{pmatrix} -Sk^2 & \frac{Ra_0 N k^2}{12} \\ -k^2 & \left( \frac{Ra_0}{12} (1-N) - 1 \right) k^2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Допуская отклонения от границы линейной неустойчивости, явно перепишем (14):

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi_1\rangle = \widehat{L}_0 |\Psi_1\rangle + \delta \widehat{L} |\Psi_1\rangle + a \widehat{Q} (|\Psi_2\rangle - |\Psi_1\rangle) + \widehat{T} |\Psi_1\rangle |\Psi_1\rangle |\Psi_1\rangle, \quad (23)$$

где

$$\delta\widehat{L} = \delta Ra \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{Nk^2}{12} & \frac{(1-N)k^2}{12} \end{pmatrix}.$$

Вид уравнений (23) диктует следующую иерархию малости параметров и переменных для метода многих масштабов:

$$\delta Ra = \epsilon^2 \delta Ra^{(2)},$$

$$a = \epsilon^2 a^{(2)},$$

$$\begin{aligned} |\Psi_{1,2}\rangle &= \epsilon |\Psi_{1,2}^{(1)}\rangle + \epsilon^2 |\Psi_{1,2}^{(2)}\rangle + \epsilon^3 |\Psi_{1,2}^{(3)}\rangle + \dots, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots, \end{aligned}$$

где  $\epsilon$  — формальный малый параметр.

В порядке  $\epsilon^1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} |\Psi_1^{(1)}\rangle &= \widehat{L}_0 |\Psi_1^{(1)}\rangle; \\ |\Psi_1^{(1)}\rangle &= A_1^{(1)}(t_1, t_2, \dots) |\Psi_\omega\rangle e^{i\omega_0 t_0} + c.c.. \end{aligned}$$

В порядке  $\epsilon^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} |\Psi_1^{(2)}\rangle + \frac{\partial}{\partial t_1} |\Psi_1^{(1)}\rangle &= \widehat{L}_0 |\Psi_1^{(2)}\rangle; \\ A_1^{(1)} &= A_1^{(1)}(t_2, \dots), \quad |\Psi_1^{(2)}\rangle = 0. \end{aligned}$$

В порядке  $\epsilon^3$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t_0} - \widehat{L} \right) |\Psi_1^{(3)}\rangle + \frac{\partial}{\partial t_2} |\Psi_1^{(1)}\rangle &= \delta\widehat{L}^{(2)} |\Psi_1^{(1)}\rangle + a^{(2)} \widehat{Q} \left( |\Psi_2^{(1)}\rangle - |\Psi_1^{(1)}\rangle \right) + \\ &+ \widehat{T} |\Psi_1^{(1)}\rangle |\Psi_1^{(1)}\rangle |\Psi_1^{(1)}\rangle. \end{aligned}$$

Вычисляя скалярное произведение последнего операторного уравнения с решением эрмитово сопряженной задачи (19), получаем уравнение медленной динамики для амплитуды возмущения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial t_2} \langle \Psi_\omega^+ | \Psi_\omega \rangle &= A_1^{(1)} \langle \Psi_\omega^+ | \delta\widehat{L}^{(2)} | \Psi_\omega \rangle + a^{(2)} \left( A_2^{(1)} - A_1^{(1)} \right) \langle \Psi_\omega^+ | \widehat{Q} | \Psi_\omega \rangle + \\ &+ A_1^{(1)} |A_1^{(1)}|^2 \langle \Psi_\omega^+ | \left( \widehat{T} | \Psi_\omega \rangle | \Psi_\omega \rangle | \Psi_{-\omega} \rangle + \widehat{T} | \Psi_\omega \rangle | \Psi_{-\omega} \rangle | \Psi_\omega \rangle + \widehat{T} | \Psi_{-\omega} \rangle | \Psi_\omega \rangle | \Psi_\omega \rangle \right). \end{aligned} \tag{24}$$

Подставим значения векторов и проинтегрируем уравнение (24) по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial t_2} \left( (\zeta_\omega^+)^* \zeta_\omega + (\vartheta_\omega^+)^* \vartheta_\omega \right) &= A_1^{(1)} \delta Ra^{(2)} \frac{k^2 (\vartheta_\omega^+)^*}{12} \left( N \zeta_\omega + (1 - N) \vartheta_\omega \right) + \\ &+ a^{(2)} (A_2^{(1)} - A_1^{(1)}) \left( \frac{b \vartheta_\omega (\zeta_\omega^+)^*}{b - S(b - 1)} + \vartheta_\omega (\vartheta_\omega^+)^* \right) - \\ &- A_1^{(1)} |A_1^{(1)}|^2 \left\{ (\zeta_\omega^+)^* \frac{9b^2 k^4}{10S} \left[ 2 \left( \zeta_\omega - \frac{(b - 1) \vartheta_\omega}{b - S(b - 1)} \right) P_\omega P_{-\omega} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left( \zeta_{-\omega} - \frac{(b - 1) \vartheta_{-\omega}}{b - S(b - 1)} \right) P_\omega^2 \right] + (\vartheta_\omega^+)^* \frac{9k^4}{10} \left( 2 \vartheta_\omega P_\omega P_{-\omega} + \vartheta_{-\omega} P_\omega^2 \right) \right\}, \end{aligned}$$

здесь решение линейных задач (18) и (19) с матрицами (21) и (22) дает для векторов-состояний (20):

$$\begin{Bmatrix} \zeta_\omega \\ \vartheta_\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -S - \frac{i\omega_0}{k^2} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \zeta_\omega^+ \\ \vartheta_\omega^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Ra_0 N}{12} \\ S - \frac{i\omega_0}{k^2} \end{Bmatrix}. \quad (25)$$

$$P_\omega = \frac{Ra_0}{12} \left( (1 - N) \left( -S - \frac{i\omega_0}{k^2} \right) + N \right).$$

Подставив все выражения, приходим к амплитудному уравнению:

$$\frac{dA_1}{dt} = C_R \delta Ra A_1 + C_A a (A_2 - A_1) + C_T A_1 |A_1|^2, \quad (26)$$

где

$$C_R = \frac{1 - N}{24} k^2 + i \frac{k^4}{24\omega_0} (N - S(1 - N)), \quad (27)$$

$$C_A = \frac{1}{2} - i \frac{k^2}{2\omega_0} \frac{b(N + S) - S^2(1 - N)(b - 1)}{(1 - N)(b - S(b - 1))}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} C_T &= -i \frac{Ra_0^2 k^6 N}{320\omega_0} \left( N - (1 - N) \left( S + \frac{i\omega_0}{k^2} \right) \right) \left( 3 - \frac{i\omega_0}{k^2} + \right. \\ &\left. + \frac{Ra_0 b^2}{12S} \frac{3N + [b - N - S(b - 1)(1 - N)](-3S + \frac{i\omega_0}{k^2})}{[b - S(b - 1)](S + \frac{i\omega_0}{k^2})} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

### 1.3.2. Предельный случай $S \ll 1$

Выше было отмечено, что для жидкостей в пористых средах типичны малые значения  $S \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$ . Полученные в данной главе математические результаты имеют простое асимптотическое поведения для предельного случая  $S \rightarrow 0$ , которое заслуживает обсуждения и помогает интерпретировать результаты.

Во-первых, переход к удобным безразмерным переменным и параметрам (8) приобретает вид:

$$Ra = Ra_*, \quad N = bN_*. \quad (30)$$

Полученные выше математические результаты имеют более простой вид и представляются в терминах  $N$ , отличающегося от параметра плавучести для свободной жидкости  $N_*$ . С соотношением (30) параметр плавучести  $N$  приобретает прозрачную интерпретацию: при механическом перемещении элемента жидкости он переносит дефект плотности, связанный с неоднородностью концентрации  $\sim \beta_C \delta C$ . Однако для дефекта плотности, связанного с температурой, важно, что переносимый дефект температуры, оказавшись на новом месте, не будет оставаться относящимся к жидкости в порах, а разделится с твердым скелетом. Параметр  $b$  как раз описывает понижение эффективности переноса температурного возмущения: при распределении механически перенесенного тепла между жидкостью и скелетом возмущение температуры делится на  $b$ . Результирующий дефект плотности, влияющий на плавучесть, оказывается в  $b$  раз меньше. Соответственно, управляющим параметром для конвективной неустойчивости системы будет отношение эффектов концентрационной и температурной плавучести:  $\beta_C \delta C / (\beta \delta T / b)$ , то есть не  $N_*$ , а  $bN_* = N$ .

Во-вторых, колебательная неустойчивость, определяемая (12) и (11), в этом предельном случае характеризуется порогом неустойчивости и частотой пороговых колебаний

$$Ra_0 = \frac{12}{1 - N}, \quad \frac{\omega_0^2}{k^4} = \frac{N}{1 - N}, \quad (31)$$

возникающих при  $0 < N < 1$ .

В-третьих, коэффициенты (27)–(29) амплитудного уравнения (26) приобретают более прозрачный вид:

$$\frac{C_R}{k^2} = \frac{1-N}{24} \left( 1 + i \sqrt{\frac{N}{1-N}} \right), \quad (32)$$

$$C_A = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{N}{1-N}}, \quad (33)$$

$$\frac{C_T}{k^4} = -\frac{9bN(b+2N)}{20S(1-N)^2} \left[ 1 + i \left( 1 - \frac{3}{b+2N} \right) \sqrt{\frac{N}{1-N}} \right], \quad (34)$$

где, напомним,  $b > 1$  и  $0 < N < 1$ .

Из (31) можно видеть, что колебательная неустойчивость возникает при конечном  $Ra > 0$  (подогрев снизу) и сколь угодно малом положительном  $N$ , то есть слабом эффекте концентрационной плавучести, навязанном термодиффузионным перераспределением концентрации в основном состоянии,  $N \sim -\alpha_T \beta_C C_0$ . При слабом эффекте концентрационной плавучести колебания медленные:  $\omega_0 \sim \sqrt{N} \sim \sqrt{-\alpha_T \beta_C C_0}$ ; при этом малы сдвиги частот колебаний течения и фазовый сдвиг связи:  $\{\text{Im } C_R, \text{Im } C_T, \text{Im } C_A\} \sim \sqrt{N}$ . Колебательная потеря устойчивости всегда происходит мягким образом:  $\text{Re } C_T < 0$ ,  $\text{Re } C_R > 0$ ; коэффициент связи между ячейками может иметь сдвиг фазы, но связь всегда остается притягивающей:  $\text{Re } C_A > 0$ . Амплитуда возбуждаемых течений при этом уменьшается по мере стремления  $S$  к нулю:  $|A_{1,2}| = \sqrt{\frac{\text{Re } C_R}{-\text{Re } C_T}} = \sqrt{\frac{5(1-N)^3}{54bN(b+2N)}} \frac{\sqrt{S}}{k}$ .

При конечном  $S$  качественное поведение системы при различных физически реалистичных значениях параметров оказывается таким же, однако громоздкость выражений не позволяет видеть это так же явно, как при  $S \rightarrow 0$ .

### 1.3.3. Предельный случай $1 \ll S < b$

Оценки для газовых смесей обнаруживают, что для таких систем  $S \sim 10^2$ ,  $b \sim 10^3$ ,  $N_* b \sim 1$ . Этот предельный случай также заслуживает детального

разбора. Переход к удобным безразмерным переменным и параметрам (8) приобретает вид:

$$\frac{Ra}{S^2} \approx -\frac{N_*b}{S} Ra_*, \quad N \approx 1 - \frac{bN_* - 1}{N_*bS}. \quad (35)$$

Колебательная неустойчивость, определяемая (12) и (11), в этом случае характеризуется порогом неустойчивости и частотой пороговых колебаний

$$\frac{Ra_0}{S^2} \approx \frac{12N_*b}{N_*b - 1}, \quad \frac{\omega_0^2}{k^4} \approx \frac{S^2}{N_*b - 1}, \quad (36)$$

возникающих при  $1 - S^{-1} + S^{-3} + \dots < N < 1$ .

Коэффициенты (27)–(29) амплитудного уравнения (26) приобретают более прозрачный вид:

$$\frac{C_R}{k^2} \approx \frac{N_*b - 1}{24N_*bS} \left( 1 + \frac{i}{\sqrt{N_*b - 1}} \right), \quad (37)$$

$$C_A \approx \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{N_*b - 1}}, \quad (38)$$

$$\frac{C_T}{k^4} \approx \frac{9b^2}{20S} \frac{N_*b}{(N_*b - 1)^2} \left( -3 + \frac{i}{\sqrt{N_*b - 1}} \right), \quad (39)$$

где, напомним,  $S \gg 1$  и  $N_*b \sim 1$ , при этом результат справедлив и для  $b \sim S$ , и для  $b \gg S$ .

Согласно (37)–(39), колебательная потеря устойчивости всегда происходит мягким образом:  $\text{Re } C_T < 0$ ,  $\text{Re } C_R > 0$ ; коэффициент связи между ячейками имеет сдвиг фазы, но связь всегда остается притягивающей:  $\text{Re } C_A > 0$ . Амплитуда возбуждаемых течений при этом уменьшается по мере роста  $b$  и в ведущем порядке не чувствительна к изменению  $S$ :  $|A_{1,2}| = \sqrt{\frac{\text{Re } C_R}{-\text{Re } C_T}} = \sqrt{\frac{5(N_*b - 1)^3}{162(N_*b)^2} \frac{1}{bk}}$ .

### 1.3.4. Фазовая редукция

Для полученных амплитудных уравнений:

$$\frac{dA_1}{dt} = C_R \delta Ra A_1 + C_A a (A_2 - A_1) + C_T A_1 |A_1|^2,$$

поля выглядят как

$$\begin{cases} \zeta_1 \\ \vartheta_1 \end{cases} = \begin{cases} (A_1 e^{i\omega_0 t} + c.c.) \cos kx \\ (-A_1 (S + \frac{i\omega_0}{k^2}) e^{i\omega_0 t} + c.c.) \cos kx \end{cases},$$

где частота колебаний течений на границе термоконцентрационной неустойчивости определяется выражением (11).

Введем фазовое описание [30] для динамики амплитуд конвективных течений в смежных ячейках. Перепишем амплитудные уравнения в следующем виде:

$$\frac{dA_1}{dt} = (\lambda_r + i\delta\omega_0)A_1 + K(A_2 - A_1) + C_T A_1 |A_1|^2,$$

где  $\lambda_r = \text{Re } C_R \delta Ra$ ,  $\delta\omega_0 = \text{Im } C_R \delta Ra$ , комплексный параметр  $K = |K|e^{i\beta} = C_{Aa}$  — комплексный коэффициент связи. Далее дифференцирование по времени будем обозначать точкой.

Из уравнения для  $A_1 = R_1 e^{i\xi_1}$  можно получить уравнения для динамики амплитуды  $R_1$  и фазы колебаний  $\varphi_1 = \xi_1 + \omega_0 t$ :

$$\dot{R}_1 e^{i\xi_1} + i\dot{\xi}_1 R_1 e^{i\xi_1} = (\lambda_r + i\delta\omega_0)R_1 e^{i\xi_1} + K(R_2 e^{i\xi_2} - R_1 e^{i\xi_1}) + C_T R_1^3 e^{3i\xi_1}, \quad (40)$$

где  $\xi$  — аргумент комплексной амплитуды, то есть отклонение фазы колебаний от фазы критической моды.

Умножая уравнение (40) на  $e^{-i\xi_1}$ ,

$$\dot{R}_1 + i\dot{\xi}_1 R_1 = (\lambda_r + i\delta\omega_0)R_1 + K(R_2 e^{i(\xi_2 - \xi_1)} - R_1) + C_T R_1^3,$$

и разделяя вещественную и мнимую части, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= (\lambda_r - |K| \cos \beta + \text{Re} C_T R_1^2) R_1 + |K| R_2 \cos(\xi_2 - \xi_1 + \beta), \\ i R_1 \dot{\xi}_1 &= i(\delta\omega_0 - |K| \sin \beta + \text{Im} C_T R_1^2) R_1 + i|K| R_2 \sin(\xi_2 - \xi_1 + \beta). \end{aligned}$$

Предполагается, что  $|K| \ll \lambda_r$ , то есть связь слабая. Тогда

$$R_1 \approx \sqrt{\frac{\lambda_r}{-\text{Re} C_T}} = R_2$$

и

$$\dot{\xi}_1 = \delta\omega_0 - \text{Im} C_T \frac{\lambda_r}{\text{Re} C_T} + |K| (\sin(\xi_2 - \xi_1 + \beta) - \sin \beta).$$

Используя выражение для фазы колебания  $\varphi_1 = \xi_1 + \omega_0 t$ , получаем

$$\dot{\varphi}_1 = \Omega_0 + |K|(\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) - \sin \beta), \quad (41)$$

$$\Omega_0 = \omega_0 + \left( \operatorname{Im} C_R - \operatorname{Re} C_R \frac{\operatorname{Im} C_T}{\operatorname{Re} C_T} \right) \delta Ra, \quad (42)$$

$$|K|e^{i\beta} = C_A a, \quad (43)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} K}{\operatorname{Re} K} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} C_A}{\operatorname{Re} C_A}, \quad (44)$$

где  $\Omega_0$  — частота колебательного течения при  $Ra = Ra_0 + \delta Ra$ , с учетом слабонелинейной поправки,  $\beta$  — фазовый сдвиг связи,  $K$  — комплексный коэффициент связи.

В итоге получаем систему связанных уравнений для фаз колебаний конвективных течений в двух ячейках:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) - \sin \beta), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) - \sin \beta). \end{aligned} \quad (45)$$

Это система типа Курамото–Сакагучи [82] — одна из классических моделей для изучения коллективных колебаний в нелинейной динамике. Для описания коллективной динамики большого числа взаимодействующих “фазовых” элементов [83, 84] могут быть также применены теория Отта–Антонсена [65] и формализм круговых кумулянтов [1, 67], развиваемый в следующих главах настоящей диссертации. При введении шума, учете старших нелинейных поправок или иных осложняющих факторах теория ОА перестает быть справедливой, однако формализм круговых кумулянтов остается применим, что и обуславливает интерес к его развитию. Более того, в случае шума статистическое описание имеет смысл не только для больших ансамблей, но может строиться и для малого числа осцилляторов, вплоть до двух или одного, когда ставится задача об управлении колебаниями этого осциллятора внешним сигналом [29].

## 1.4. Синхронизация колебаний в смежных ячейках

Допустим возможность несовпадения (расстройки) частот собственного колебательного течения в ячейках в связи с их неидеальной идентичностью:  $\Omega_{01} \neq \Omega_{02}$ . Тогда уравнения (45) принимают вид:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \Omega_{01} + |K|(\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) - \sin \beta), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Omega_{02} + |K|(\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) - \sin \beta).\end{aligned}\quad (46)$$

В синхронном режиме  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \equiv \Omega_{00}$  — частота синхронного колебания течений в ячейках. Обозначая разность фаз колебаний  $\varphi_1 - \varphi_2 = \delta\varphi$  и записывая уравнения (46) через  $\Omega_{00}$ , получаем

$$\begin{aligned}\Omega_{00} &= \Omega_{01} + |K|(\sin(-\delta\varphi + \beta) - \sin \beta), \\ \Omega_{00} &= \Omega_{02} + |K|(\sin(\delta\varphi + \beta) - \sin \beta).\end{aligned}\quad (47)$$

Из этих уравнений можно найти  $\Omega_{00}$  и  $\delta\varphi$ .

Если взять разность первого и второго уравнения в системе (47), получим

$$\sin \delta\varphi = \frac{\Omega_{01} - \Omega_{02}}{2|K| \cos \beta}.\quad (48)$$

Для суммы уравнений получим

$$\Omega_{00} = \frac{\Omega_{01} + \Omega_{02}}{2} - |K| \sin \beta (1 - \cos \delta\varphi),\quad (49)$$

для которого (48) дает пару решений с различными знаками  $\cos \delta\varphi$ :

$$\cos \delta\varphi_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \delta\varphi} = \pm \sqrt{1 - \frac{(\Omega_{01} - \Omega_{02})^2}{4|K|^2 \cos^2 \beta}}.\quad (50)$$

Традиционной количественной мерой упорядочения для задач о синхронизации является комплексный параметр порядка Курамото  $Z = N_{\varphi}^{-1} \sum_{j=1}^{N_{\varphi}} e^{i\varphi_j}$  (в нашем случае двух осцилляторов  $N_{\varphi} = 2$ ) [21, 29]. Среднее по времени от его абсолютного значения — “индекс синхронизации”  $r = \langle |Z| \rangle$  меняется в пределах от 0, максимальная асинхронность, до 1, полная синхронизация. Следует

иметь в виду, что данная мера недостаточна в случае синхронизации в противофазе (“антиферромагнитном” упорядочении); тогда описание должно дополняться следующим параметром порядка  $Z_2 = N_\varphi^{-1} \sum_{j=1}^{N_\varphi} e^{i2\varphi_j}$ . В состоянии с постоянной по времени разностью фаз  $\varphi_1 - \varphi_2 = \delta\varphi$ , параметр Курамото  $Z = e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} \frac{e^{i\delta\varphi/2} + e^{-i\delta\varphi/2}}{2}$  и индекс синхронизации  $r = \cos \frac{\delta\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos \delta\varphi}{2}}$ . Для решений (50) имеем:

$$r_\pm = \cos \frac{\delta\varphi_\pm}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\Omega_{01} - \Omega_{02})^2}{16|K|^2 \cos^2 \beta}}}. \quad (51)$$

#### 1.4.1. Устойчивость синхронного режима

Для анализа устойчивости синхронного режима, рассмотрим его возмущения:

$$\varphi_j = \varphi_{0j} + \tilde{\varphi}_{0j},$$

где  $\varphi_{01,02} = \Omega_{00}t \pm \frac{\delta\varphi}{2}$  — фазы колебаний в синхронном режиме,  $\tilde{\varphi}_{0j}$  — возмущения.

Подставляем  $\varphi_1$  в систему (45):

$$\Omega_{00} + \dot{\tilde{\varphi}}_1 = \Omega_{01} + |K| [\sin(\varphi_{02} - \varphi_{01} + \beta + \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1) - \sin \beta]. \quad (52)$$

В слагаемом с  $|K|$  учитываем только линейные по возмущениям вклады:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_{02} - \varphi_{01} + \beta + \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1) - \sin \beta &\approx \\ &\approx \sin(-\delta\varphi + \beta) + \cos(-\delta\varphi + \beta)(\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1) - \sin \beta, \end{aligned} \quad (53)$$

где подставлено  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = -\delta\varphi$ .

Воспользуемся первым уравнением из системы (47), чтобы сократить слагаемые в (52), и учтем полученное в (53), тогда

$$\dot{\tilde{\varphi}}_1 = |K| \cos(-\delta\varphi + \beta)(\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1).$$

Аналогичным образом получается уравнение для  $\tilde{\varphi}_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\varphi}}_1 &= |K| \cos(-\delta\varphi + \beta)(\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1), \\ \dot{\tilde{\varphi}}_2 &= |K| \cos(\delta\varphi + \beta)(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2). \end{aligned}$$

Решим задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned}\lambda\tilde{\varphi}_1 &= |K| \cos(-\delta\varphi + \beta)(\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1), \\ \lambda\tilde{\varphi}_2 &= |K| \cos(\delta\varphi + \beta)(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2).\end{aligned}$$

Построим матрицу и найдем характеристическое уравнение из определителя:

$$\lambda^2 + 2\lambda|K| \cos \delta\varphi \cos \beta = 0,$$

отсюда мы получаем два корня для  $\lambda$ :  $\lambda = 0$  и  $\lambda = -2|K| \cos \delta\varphi \cos \beta$ . Найденные собственные значения  $\lambda$  показывают, что в паре решений (48)–(50) устойчивое решение соответствует  $\cos \delta\varphi \cos \beta > 0$ , а неустойчивое —  $\cos \delta\varphi \cos \beta < 0$ . Отсюда следует, что режимы синхронных колебаний существуют при  $|\sin \delta\varphi| < 1$  (48), когда расстройка частот

$$|\Omega_{01} - \Omega_{02}| < 2|K| |\cos \beta|,$$

и для устойчивого синхронного режима

$$\cos \delta\varphi = \frac{\sqrt{4|K|^2 \cos^2 \beta - (\Omega_{01} - \Omega_{02})^2}}{2|K| |\cos \beta|}, \quad (54)$$

и индекс синхронизации:

$$r = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\Omega_{01} - \Omega_{02})^2}{16|K|^2 \cos^2 \beta}}}. \quad (55)$$

Таким образом, решение, описывающее устойчивый синхронный режим, задается выражениями (48), (49), (54), (55).

## 1.5. Результаты для водных растворов этилового спирта и бинарных смесей газов

Рассмотрим конкретную физическую систему: пористый скелет — кварцевый песок, жидкость — растворы этилового спирта в воде с массовой концентрацией в диапазоне  $C_e = 0.05 \div 0.22$  (в принятых обозначениях концентрация тяжелой компоненты  $C = 1 - C_e$ ), температура окружающей среды —  $25^\circ\text{C}$ .

Параметры синхронного режима  $r$  (55) или  $\delta\varphi$  (54) связаны с безразмерными комплексными коэффициентами  $C_A$ ,  $C_R$ ,  $C_T$  (27)–(29), которые в свою очередь зависят от управляющих параметров системы  $(Ra, N, S, b)$ :

$$\cos \delta\varphi = \sqrt{1 - \frac{\left(\omega_{01} - \omega_{02} + \left(\operatorname{Im}C_R - \operatorname{Re}C_R \frac{\operatorname{Im}C_T}{\operatorname{Re}C_T}\right) (\delta Ra_{01} - \delta Ra_{02})\right)^2}{4a^2(\operatorname{Re}C_A)^2}}. \quad (56)$$

Напомним связь безразмерных и размерных параметров:

$$N = \frac{(-\alpha_T)\beta_C C_0}{\beta T_0}, \quad Ra = \frac{\beta A h^2 g K}{m b \nu \chi}, \quad S \equiv \frac{D}{\chi}.$$

Обратное число Льюиса равно

$$S = \frac{D}{\chi} = \frac{0.75 D_f (m \rho_f c_{pf} + (1 - m) \rho_s c_{ps})}{\varkappa}, \quad (57)$$

здесь и ниже все материальные параметры с индексом  $f$  относятся к веществу жидкости, а с индексом  $s$  — к веществу скелета пористой среды; для эффективного коэффициента диффузии  $D$  влияние геометрии пор учтено через фактор “извилистости” пор  $\gamma$  (tortuosity factor),  $D = \gamma D_f$ , типичное значение которого для природных пористых сред составляет 0.75 [85].

Параметр  $b$  (отношение теплоемкости пористой среды, насыщенной жидкостью, к части этой теплоемкости, приходящейся на жидкость в порах):

$$b = \frac{m \rho_f c_{pf} + (1 - m) \rho_s c_{ps}}{m \rho_f c_{pf}}, \quad (58)$$

где  $m$  — пористость, теплоемкость вещества пористого скелета (средние параметры кварцита при нормальных условиях)  $\rho_s c_{ps} = 2.63 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К) [86].

Далее в данном разделе все свойства жидкости приводятся для растворов этилового спирта в воде при атмосферном давлении.

Плотность жидкости:  $\rho_f = \rho_0(1 - \beta(T - T_0) + \beta_C(C - C_0))$ ; эмпирическая формула  $\rho_f \approx (998.83 + 0.0147 \text{ К}^{-1}(T - 273 \text{ К}) - 0.00512 \text{ К}^{-2}(T - 273 \text{ К})^2 - [147.13 + 0.4979 \text{ К}^{-1}(T - 273 \text{ К}) - 0.002858 \text{ К}^{-2}(T - 273 \text{ К})^2]C_e + [146.7 - 4.734 \text{ К}^{-1}(T - 273 \text{ К}) + 0.0201 \text{ К}^{-2}(T - 273 \text{ К})^2]C_e^2)$  кг/м<sup>3</sup> удовлетворительно соответствует табличным данным [87] в диапазоне температур  $10 \div 50^\circ\text{C}$  и массовой концентрации

$C_e = 0.05 \div 0.25$  и согласуется с результатами экспериментальной работы [88]. Коэффициент теплового расширения  $\beta = -\frac{1}{\rho_f(T_0, C_0)} \frac{\partial \rho_f(T, C)}{\partial T} \Big|_{T_0, C_0}$  и коэффициент  $\beta_C = \frac{1}{\rho_f(T_0, C_0)} \frac{\partial \rho_f(T, C)}{\partial C} \Big|_{T_0, C_0}$  вычисляются из данной эмпирической формулы.

Теплоемкость, теплопроводность и кинематическая вязкость: эмпирические формулы  $c_{pf} \approx (4262 - 15 \text{ K}^{-1}(T_0 - 273 \text{ K}) + 0.31 \text{ K}^{-2}(T_0 - 273 \text{ K})^2 + [1843 + 61.5 \text{ K}^{-1}(T_0 - 273 \text{ K}) - 1.6 \text{ K}^{-2}(T_0 - 273 \text{ K})^2]C_{e0} - [7120 + 16 \text{ K}^{-1}(T_0 - 273 \text{ K}) - 1.85 \text{ K}^{-2}(T_0 - 273 \text{ K})^2]C_{e0}^2)$  Дж/(кг·К),  $\kappa_f \approx (0.61 - 7 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}(T_0 - 273 \text{ K}) + 3.5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-2}(T_0 - 273 \text{ K})^2 - [0.97 - 0.026 \text{ K}^{-1}(T_0 - 273 \text{ K}) + 4 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-2}(T_0 - 273 \text{ K})^2]C_{e0} + 0.3 C_{e0}^2)$  Вт/(м·К) и  $\nu \approx (14.9 - 0.29 \text{ K}^{-1}(T_0 - 273 \text{ K}) + 0.002 \text{ K}^{-2}(T_0 - 273 \text{ K})^2 + [135.3 - 4.62 \text{ K}^{-1}(T_0 - 273 \text{ K}) + 0.048 \text{ K}^{-2}(T_0 - 273 \text{ K})^2]C_{e0} - 5 C_{e0}^2) 10^7 \text{ м}^2/\text{с}$  соответствуют данным [89] в диапазоне температур  $10 \div 40^\circ\text{C}$  и  $C_{e0} = 0.05 \div 0.30$ .

Коэффициент диффузии: в силу “активационной” природы процесса молекулярной диффузии в жидкостях, удовлетворительное соотношение вычислительной простоты и точности удается достигать, вводя эмпирическую формулу вида:  $D_f(T_0, C_{e0}) = D_{f*}(C_{e0}) \exp \left[ -W(C_{e0}) \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_*} \right) \right]$ , где можно положить  $T_* = 273.15 \text{ K}$ . Фитинг данных экспериментальной работы [90] в диапазоне температур  $18 \div 65^\circ\text{C}$  и массовых концентраций  $C_{e0} = 0 \div 0.31$  при атмосферном давлении дает  $D_{f*} = (0.661 - 1.791 C_{e0} + 1.165 C_{e0}^2) 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$  и “энергию активации”, выраженную в температурных единицах,  $W = (2081 - 116 C_{e0} + 5134 C_{e0}^2) \text{ K}$ .

Для проверки согласованности эмпирических формул для  $D_f$  и  $\nu$  можно обратиться к Флуктуационно–диссипативной теореме, а именно проанализировать комбинацию  $D_f \rho_f \nu / (k_B T) = (G_D \pi R_m)^{-1}$ , где  $R_m$  — эффективный радиус диффундирующей молекулы,  $G_D$  — геометрический фактор в силе Стокса для движения молекулы через раствор, значения фактора могут варьироваться в интервале от 4 (предельный случай силы Стокса для “пузырька” — свободное проскальзывание окружающих молекул вдоль поверхности диффундирующей молекулы) до 6 (предельный случай “твердого шара” — условие непроскальзывания окружающих молекул на поверхности диффундирующей) [75]. В диапазоне температур  $10 \div 60^\circ\text{C}$  и массовых концентраций  $C_e = 0 \div 0.3$  отношение

максимального значения этого выражения к минимальному составляет 1.5, тогда как для  $D_f$  и  $\nu$  это отношение достигает значений 8 и 9 соответственно. Вариацию в 1.5 раза для комбинации  $G_D R_m$  в таком широком диапазоне температур и составов раствора можно считать реалистичной (достаточно малой) и, соответственно, выражения для  $D_f$  и  $\nu$  согласованными.

Константа термодиффузии удовлетворительно описывается линейным законом  $\alpha_T = (-10.3 + 40 C_{e0}) \cdot 10^{-12} \frac{\text{М}^2}{\text{с} \cdot \text{К}} \cdot C_{e0} T_0 / D_f$  при  $T_0 = 298 \text{ К}$  в диапазоне массовых концентраций  $C_{e0} = 0 \div 0.22$  [91].

Для вычисления теплопроводности пористой среды можно воспользоваться корреляционным соотношением

$$\kappa = \kappa_f^m \kappa_s^{1-m}, \quad (59)$$

которое дает приемлемую точность, если теплопроводности  $\kappa_f$  и  $\kappa_s$  не отличаются больше чем на порядок [77, 92]. Теплопроводность вещества пористого скелета (кварцита [93]):  $\kappa_s = 4.27 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ; формула для теплопроводности жидкости  $\kappa_f$  приведена выше. Если теплопроводность флюида на два и более порядка ниже теплопроводности вещества твердого скелета, что характерно для газов, корреляционное соотношение (59) становится неприменимым даже для грубых оценок, однако для природных пористых сред с таким соотношением теплопроводностей получена эмпирическая формула [94]:

$$\kappa(m) = \kappa_s \left( \frac{\kappa_f}{\kappa_s} \right)^{(1-n)} \frac{[m(1-m)]^n}{m + (1-m) \frac{\kappa_f}{\kappa_s}}. \quad (60)$$

где  $n = 0.5(1 - \log_{10} m) / \log_{10}[m(1-m)\kappa_s/\kappa_f]$ ; для воздуха  $\kappa_f = 0.024 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ . Формула (60) обеспечивает удовлетворительную точность для широкого спектра пористых материалов осадочного типа.

Для коэффициента связи между пористыми ячейками

$$a = \frac{\kappa_b h^2}{\kappa H l},$$

где  $\kappa$  — теплопроводность ячейки, вычисляется по формуле (59) для жидкостей или (60) для газов;  $\kappa_b = 0.015 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$  — теплопроводность боковых сте-

нок ячеек (промышленный аэрогель, “aspen aerogel”);  $H = 0.005$  м — толщина ячейки,  $h = 0.02$  м — высота ячейки,  $l = 0.005$  м — толщина общей стенки (см. рис. 2б). Для растворов спирта в воде при пористости  $m \sim 0.4$  при принятых геометрических параметрах характерные значения коэффициента тепловой связи  $a \sim 0.1$ .

Пористость ячеек полагается неодинаковой:  $m = m_0 \pm \delta m/2 = 0.4 \pm 0.01$ . Полагаем, что материал ячеек сходный, а отличие пористости связано с флуктуацией плотности упаковки; тогда относительную вариацию проницаемости для данной вариации пористости можно вычислить через производную формулы Кармана–Козени (Carman–Kozeny [77])

$$K = \frac{l_p^2 m^3}{180(1 - m)^2} \quad (61)$$

по пористости:

$$\delta K = K_0 \frac{3 - m_0}{m_0(1 - m_0)} \delta m,$$

где, согласно (61),  $K_0 \approx 10^{-8}$  м<sup>2</sup> при характерном диаметре зерен монодисперсного крупнозернистого песка  $l_p \sim 3$  мм.

Используя приведенные данные, можно вычислить значения безразмерных управляющих параметров для водных растворов этилового спирта с массовой концентрацией  $C_{e0} = 0.05 \div 0.22$  при  $T_0 = 298$  К. На рис. 5а можно видеть графики зависимости модифицированного числа плавучести  $N$  и параметра  $b$  от  $C_{e0}$ : значение  $b$  близко к 2, а  $N$  варьируется в окрестности 0.5, всегда оставаясь в диапазоне существования колебательной неустойчивости (при  $S \ll 1$ :  $0 \lesssim N \lesssim 1$ ), развивающейся при достаточно сильном подогреве снизу,  $Ra_* > Ra_{*0} = Ra_0 + \mathcal{O}(1/S)$ . На рис. 5б представлены характеристики состояния механического равновесия на границе колебательной неустойчивости:  $J_Q$  — плотность потока тепла, соответствующая критическому значению числа Рэлея–Дарси,  $\Delta C$  — разность концентраций между верхней и нижней стенкой, формирующаяся в состоянии механического равновесия за счет эффекта Соре.

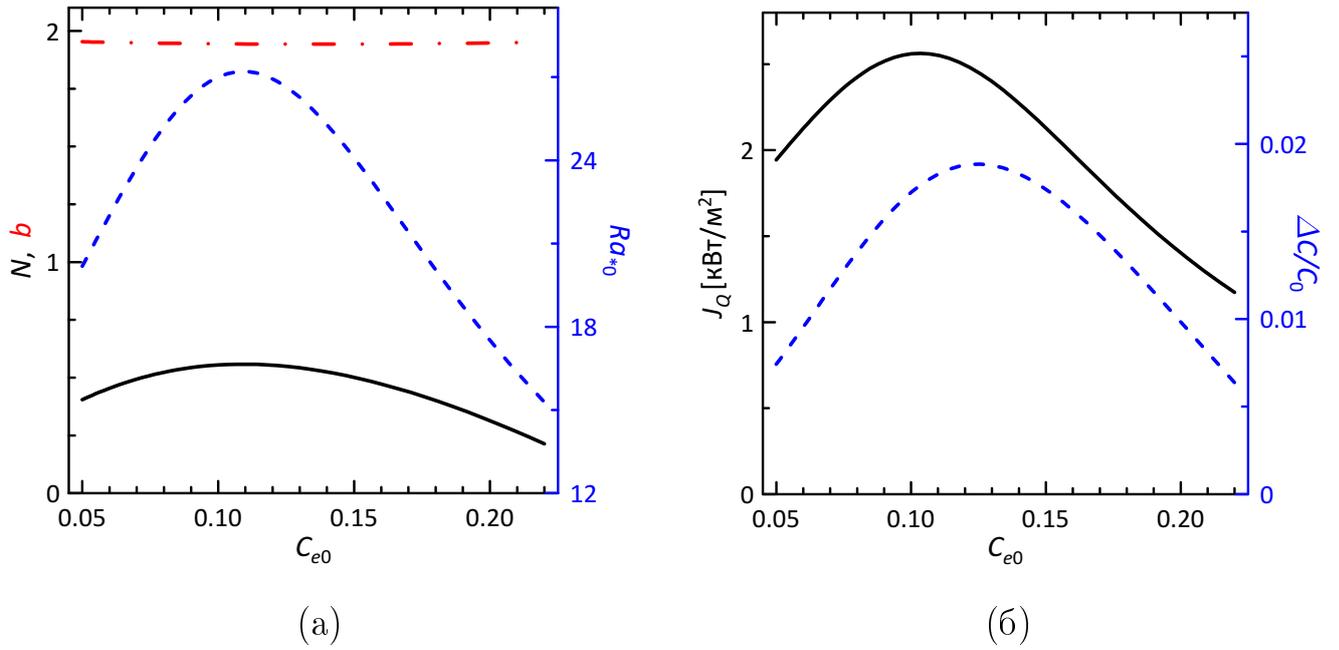


Рис. 5: Водные растворы спирта в кварцевом песке (см. параметры в тексте). (а) Безразмерные параметры  $N$  (сплошная черная кривая) и  $b$  (красная штрихпунктирная) и критическое значения числа Рэля–Дарси  $Ra_{*0}$  (синяя штриховая) для колебательной моды неустойчивости в зависимости от массовой доли спирта  $C_{e0} = 1 - C_0$  в исходном растворе. (б) Значения размерных параметров на пороге колебательной неустойчивости:  $J_Q$  — плотность потока тепла (черная сплошная),  $\Delta C$  — разность концентраций между стенками, возникающая при таком потоке тепла за счет эффекта термодиффузии (синяя штриховая).

Характерные значения  $J_Q$  сопоставимы с плотностью потока энергии солнечного излучения на Земле  $J_{\odot} = 1.36 \text{ кВт/м}^2$ , то есть легко реализуемы.

На рис. 5а можно видеть, что зависимость  $N$  от  $C_{e0}$  оказывается немонотонной: для многих значений  $N$  имеется два возможных значения  $C_{e0}$ . Если строить графики зависимости характеристик синхронных режимов от  $Ra_*$  и  $N$  (или  $N_*$ ) для диапазона  $C_{e0} = 0.05 \div 0.22$ , они формируют сложенную поверхность, два листа которой достаточно близки друг к другу, что осложняет анализ и визуальное восприятие. Поэтому, с точки зрения представления результатов для конкретной физической системы, целесообразно стоит зависимости от  $Ra_*$  (безразмерная плотность потока тепла за счет нагрева) и  $C_{e0}$ .

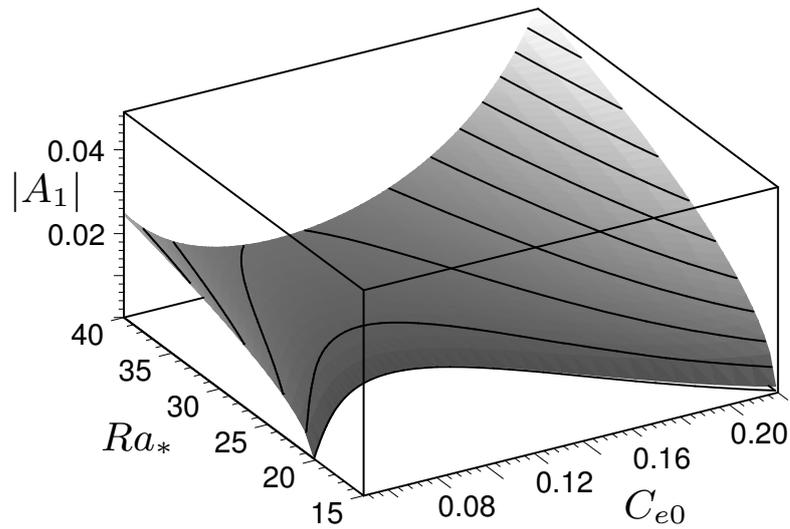


Рис. 6: Водные растворы спирта (параметры, как на рис. 5). Зависимость амплитуды  $|A_1|$  колебаний длинноволнового течения от числа Рэля—Дарси  $Ra_*$  и массовой концентрации спирта  $C_{e0}$ .

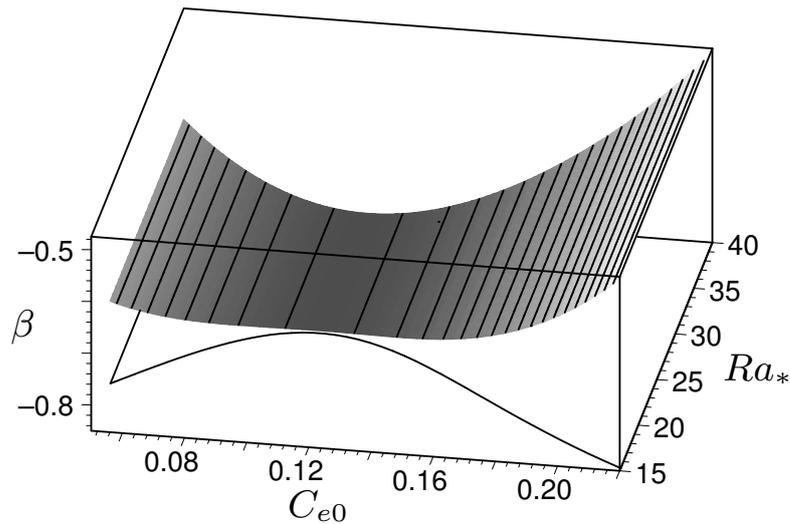


Рис. 7: Водные растворы спирта (параметры, как на рис. 5). Зависимость фазового сдвига коэффициента тепловой связи  $\beta$  от  $Ra_*$  и  $C_{e0}$ . Контур на плоскости  $(C_{e0}, Ra_*)$  показывает область возбуждения колебательной конвекции.

Для  $k = \pi/5$ , что соответствует отношению длины волны конвективной структуры к высоте ячейки 10:1, результаты аналитической теории представлены на рис. 6–9. На рис. 6 представлена амплитуда слабонелинейного течения  $|A_1|$ ; вблизи границы колебательной неустойчивости можно полагаться на то, что поправки старшего порядка несущественно изменяют течение и результаты,

полученные в рамках слабонелинейного анализа.

Сдвиг фазы коэффициента тепловой связи между ячейками  $\beta$  представлен на рис. 7. На рис. 8 и 9 представлены типовые количественные характеристики степени синхронности колебаний связанных осцилляторов: фазовый сдвиг (“phase lag”)  $\delta\varphi$  и индекс синхронизации  $r$  соответственно.

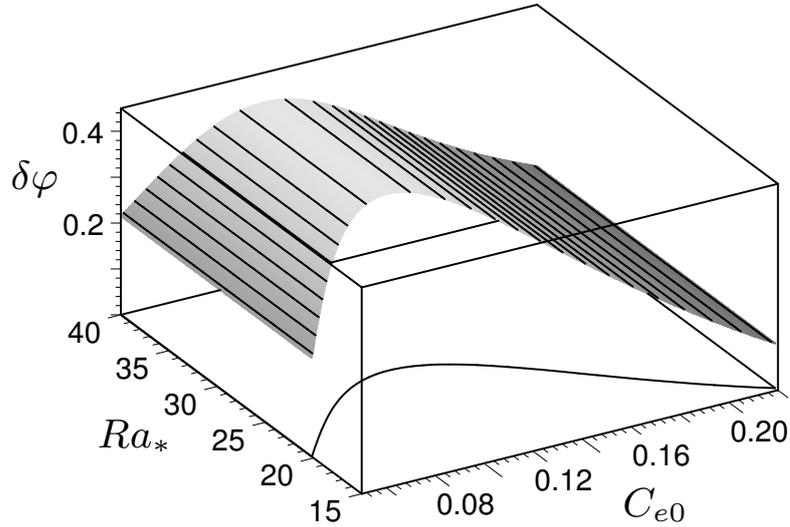


Рис. 8: Водные растворы спирта (параметры, как на рис. 5, и разность пористостей ячеек  $\delta m = 0.02$ ). Зависимость разности фаз колебаний конвективного течения в ячейках  $\delta\varphi$  от  $Ra_*$  и  $C_{e0}$ .

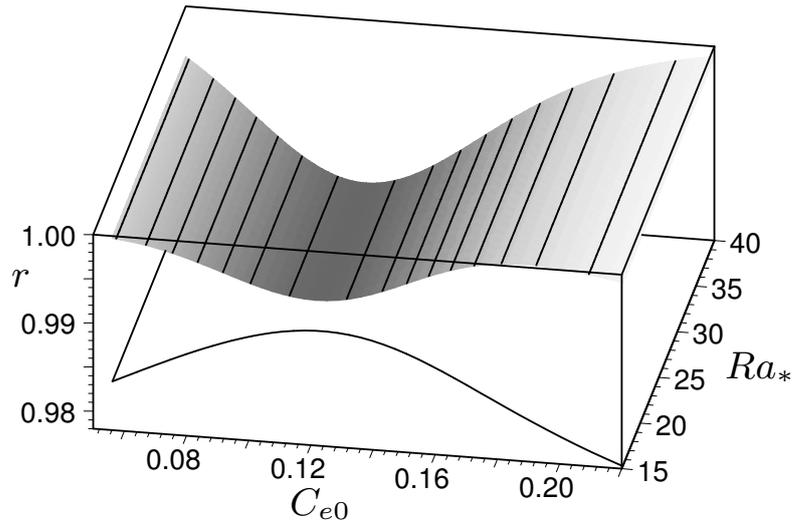


Рис. 9: Водные растворы спирта (параметры, как на рис. 8). Зависимость индекса синхронизации колебаний  $r = \cos(\delta\varphi/2)$  от  $Ra_*$  и  $C_{e0}$ .

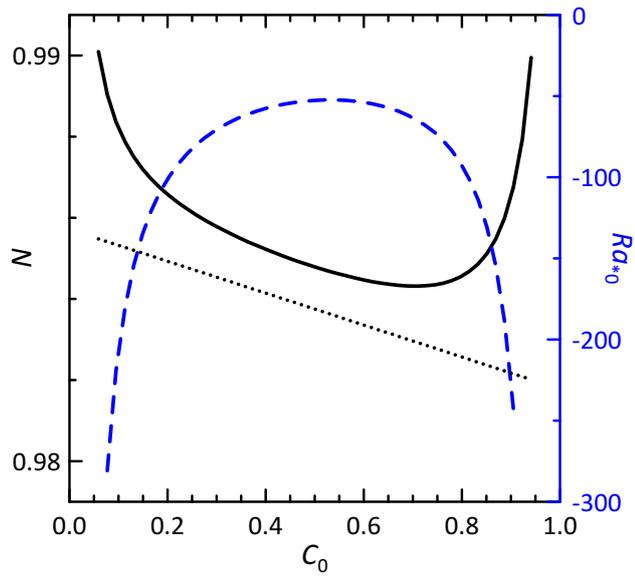


Рис. 10: Газовая смесь  $\text{CO}_2\text{-N}_2$  в кварцевом песке (см. параметры в тексте) при нормальных условиях. Безразмерные параметры  $N$  (сплошная черная кривая), нижняя граница области существования колебательной неустойчивости  $N_{01}$  (пунктирная черная) и критические значения числа Рэлея–Дарси  $Ra_{*0}$  (синяя штриховая) для колебательной моды неустойчивости в зависимости от массовой концентрации  $\text{CO}_2$ .

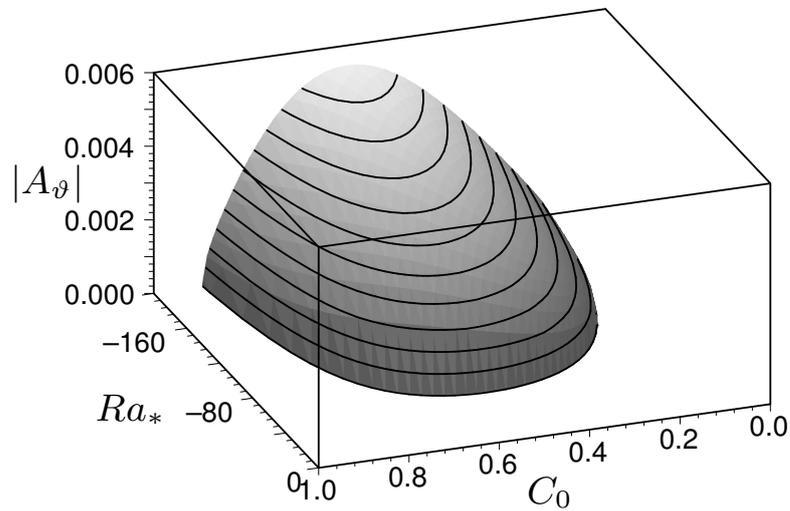


Рис. 11: Газовая смесь  $\text{CO}_2\text{-N}_2$  (параметры, как на рис. 10). Зависимость амплитуды колебаний максимума возмущения температуры  $|A_\vartheta| = 2|A_1\vartheta_\omega|$  от числа Рэлея–Дарси  $Ra_*$  и массовой концентрации  $C_0$ .

Для смеси углекислого газа и азота экспериментальные данные [80, 81] для нормальных условий могут быть аппроксимированы формулой  $\alpha_T \approx (-0.0485 + 0.0140C_0 - 0.1356C_0^2 + 0.1351C_0^3)(1 - C_0)$ . Используя для определения прочих молекулярно-кинетических параметров газовой смеси данные из [80] и принимая для зависимости этих параметров от температуры и концентрации кинетическую теорию идеальных газов, можно вычислить значения безразмерных управляющих параметров (теплопроводность пористого скелета в данном случае вычисляется по эмпирической формуле (60)). Для  $C_0$  в диапазоне от 0.05 до 0.95 значения параметров  $b = 1700 \div 3100$  и  $S = 55 \div 69$ . Значения модифицированного числа плавучести  $N$  при этом таково, что в системе всегда возможна колебательная неустойчивость (рис. 10). Как было вычисленно выше, в этом случае  $Ra/S^2 \approx -(N_*b/S)Ra_*$ , то есть колебательная неустойчивость развивается при отрицательных  $Ra_*$  — достаточно сильном подогреве снизу.

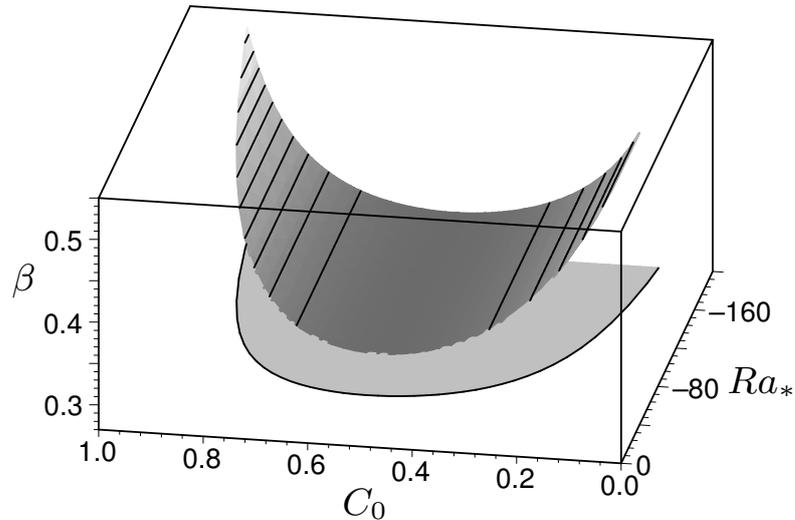


Рис. 12: Газовая смесь  $\text{CO}_2\text{-N}_2$  (параметры, как на рис. 10). Зависимость фазового сдвига коэффициента связи  $\beta$  от  $Ra_*$  и  $C_0$ . Серая область на плоскости  $(C_0, Ra_*)$  показывает область возбуждения колебательной конвекции.

Для газовой смеси и  $k = \pi/5$  результаты аналитической теории представлены на рис. 11–13. На рис. 11 представлена амплитуда возмущения поля температуры слабонелинейного решения  $|A_\vartheta| = 2|A_1\vartheta_\omega|$ . Сдвиг фазы коэффициента

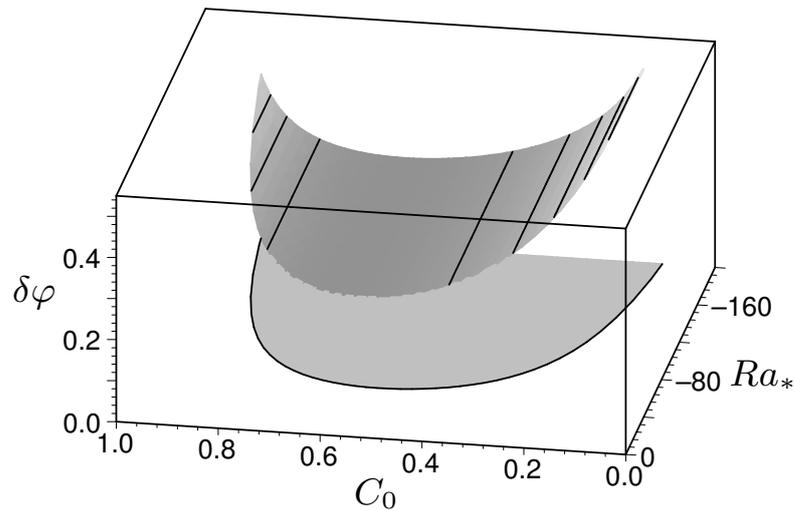


Рис. 13: Газовая смесь  $\text{CO}_2\text{-N}_2$  ( $H : h = 2 : 10$ ,  $l : h = 1 : 10$ , разность пористостей ячеек  $\delta m = 0.01$ ; прочие параметры — как на рис. 10). Зависимость разности фаз колебаний конвективного течения в ячейках  $\delta\varphi$  от  $Ra_*$  и  $C_0$ .

тепловой связи между ячейками  $\beta$  представлен на рис. 12.

На рис. 13 представлена количественная характеристика степени синхронности колебаний связанных осцилляторов — фазовый сдвиг  $\delta\varphi$ .

## 1.6. Выводы по главе

В данной главе исследована термоконцентрационная конвекция двухкомпонентной жидкости в подогреваемых снизу смежных горизонтальных ячейках пористой среды в поле тяжести. Для системы получены уравнения в приближении Дарси–Буссинеска с учетом эффекта Соре. В рассматриваемой системе связь между ячейками происходит через поле температуры, то есть в уравнениях для конвекции Соре добавлено дополнительное слагаемое. Выведены безразмерные уравнения, для которых получены управляющие параметры системы: число Рэлея–Дарси, параметр плавучести, обратное число Льюиса.

Получены уравнения динамики в длинноволновом приближении с использованием метода многих масштабов. Эти уравнения позволили изучить виды неустойчивости в системе (монотонная, колебательная), построить карту режи-

мов для системы (рис. 4) и получить пороговое значение числа Рэлея–Дарси, выше которого существует колебательная неустойчивость. Аналитическое описание системы в рамках слабонелинейного анализа можно построить только вблизи границы конвективной неустойчивости. К полученным уравнениям для амплитуды колебательных мод применяется фазовая редукция. Уравнения для фаз колебаний конвективных течений в двух ячейках являются системой типа Курамото–Сакагучи [82] — одной из классических моделей для изучения коллективных колебаний в нелинейной динамике.

Также исследована синхронизация колебаний в смежных ячейках. В реальных условиях ячейки не могут быть идеально идентичными: в первую очередь это проявляется в различии собственных частот колебательного течения в ячейках. Найдены соотношения между силой связи и расстройкой частот, при которых в системе существует режим синхронизации течений. Получено решение для устойчивого синхронного режима. Получены и проанализированы результаты для конкретных физических систем. А именно для водного раствора этилового спирта и бинарной смеси углекислого газа и азота в кварцевом песке.

## Глава 2. Теория Отта–Антонсена и ее обобщение

Данная глава посвящена системам фазовых осцилляторов, теории Отта–Антонсена и ее обобщению с помощью круговых кумулянтов. Фазовыми осцилляторами называются элементы (джозефсоновские сверхпроводящие контакты, электрогенераторы, ячейки пористой среды и т.п.), состояние которых в рамках конкретной задачи может быть охарактеризовано единственной циклической переменной — фазой. Для ориентационных элементов (например, ротаторов) в роли фазы выступает угол поворота; для осцилляторов — фаза цикла в пределах периода колебания. Если автономные элементы совершают устойчивые периодические колебания, фазовое описание их динамики в пределе слабого воздействия становится математически строгим [18,29,30,95]. В роли такого воздействия может выступать как связь между элементами, так и влияние внешних факторов на их состояние.

Из работ [65,96] известно, что при неидеальной идентичности осцилляторов множество Отта–Антонсена из нейтрально устойчивого превращается в “слабо” притягивающее. Для реальных систем множество Отта–Антонсена оказывается не просто семейством частных решений, а аттрактором. Это дает возможность использования теории Отта–Антонсена для описания многих задач. В разделах 2.1 и 2.2 это рассматриваться более подробно.

В разделе 2.3 введем понятие “круговых кумулянтов”, которые являются специальными комплексными параметрами порядка для фазовых ансамблей.

В разделе 2.4 покажем существование инвариантного решения, расширяющего решение Отта–Антонсена. Это решение полностью задается первым и вторым кумулянтами. В рамках нового подхода можно описать приближение состояния системы к многообразию Отта–Антонсена в случае неидентичных осцилляторов. Рассмотрим частный случай расширения теории Отта–Антонсена: динамика всех круговых кумулянтов четного порядка подобна динамике второго, кумулянты нечетного порядка старше первого равны 0. Получаемое та-

ким образом инвариантное многообразие оказывается соответствующим распределению элементов по двум группам равного размера, в каждой из которых распределение осцилляторов соответствует решению Отта–Антонсена. Система уравнений динамики на таком многообразии оказывается замкнутой.

В качестве примера опишем динамику двух симметрично связанных ансамблей осцилляторов Курамото–Сакагучи [82, 97, 98]. В данной системе наблюдаются “химерные состояния”: часть осцилляторов синхронизована, а часть — десинхронизована. Химерные состояния являются естественным переходным состоянием между полностью синхронными и беспорядочными колебаниями. Будем интересоваться режимами динамики системы, в которых осцилляторы несинхронизованного ансамбля формируют две группы. Исследуем динамику двухгрупповых химер при различных начальных условиях.

## 2.1. Теории Отта–Антонсена и Ватанабэ–Строгаца

В настоящем разделе дается краткое введение в теории Отта–Антонсена (ОА) и Ватанабэ–Строгаца (ВС) (см. Приложение к работе [99]).

Широкий класс систем фазовых осцилляторов, на которых традиционно теоретически изучались коллективные явления, описывается уравнениями вида:

$$\dot{\varphi}_k = \Omega(t) + \text{Im}(2h(t) e^{-i\varphi_k}), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (62)$$

где  $\Omega(t)$  и  $h(t)$  — произвольные действительная и комплекснозначная величины; допустимо любое изменение этих величин со временем, но важно, что их значения должны быть одинаковы для всех элементов. Например, именно к таким системам относится ансамбль Курамото–Сакагучи (обобщение ансамбля Курамото):

$$\dot{\varphi}_k = \Omega + \frac{K}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\varphi_l - \varphi_k + \beta),$$

для которого можно полагать вид (62) с  $2h(t) = K e^{i\beta} N^{-1} \sum_{l=1}^N e^{i\varphi_l}$ , здесь  $K$  и  $\beta$  — сила и фазовый сдвиг связи соответственно. Для цепочки сверхпроводящих

джозефсоновских контактов с омическим шунтированием, эффективно выполняющим функцию связи, могут быть получены безразмерные уравнения [100]

$$\dot{\varphi}_k = I_{\text{imp}}(t) - I_0 \sin \varphi_k + \frac{K}{N} \sum_{l=1}^N \sin \varphi_l,$$

где  $I_{\text{imp}}(t)$  — ток, подаваемый в систему,  $I_0$  — параметр контактов (максимальный ток стационарного эффекта Джозефсона), а фаза  $\varphi_k$  — фаза волновой функции тока сверхпроводимости, связана с легко наблюдаемой макроскопической величиной — разностью потенциалов  $U_k$  на контакте двух сверхпроводников: в размерном виде  $\dot{\varphi}_k = (2e/\hbar)U_k$ ,  $e$  — элементарный заряд,  $\hbar$  — постоянная Планка. Безразмерный коэффициент  $K$  пропорционален сопротивлению шунтирования и, с точки зрения коллективной динамики, играет роль коэффициента связи между элементами. Такому ансамблю контактов соответствует  $\Omega(t) = I_{\text{imp}}(t) - K \text{Im}(N^{-1} \sum_{l=1}^N e^{i\varphi_l})$  и  $2h(t) = I_0$ . Для системы связанных активных ротаторов [101] уравнения

$$\dot{\varphi}_k = \Omega + \frac{K}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\varphi_l - \varphi_k) - B \sin \varphi_k$$

имеют вид (62) с  $2h(t) = B + KN^{-1} \sum_{l=1}^N e^{i\varphi_l}$ .

Для уравнения (62) может быть записано Мастер-уравнение, определяющее динамику плотности вероятности  $w(\varphi, t)$  нахождения элемента в состоянии  $\varphi$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( (\Omega(t) - ih(t)e^{-i\varphi} + ih^*(t)e^{i\varphi})w \right) = 0. \quad (63)$$

В Фурье-пространстве:

$$w(\varphi, t) = (2\pi)^{-1} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j(t)e^{-ij\varphi} + a_j^*(t)e^{ij\varphi}) \right] \quad (64)$$

где  $a_j(t)$  — коэффициенты Фурье-разложения, уравнение (63) принимает следующий вид:

$$\dot{a}_j = ji\Omega(t)a_j + jh(t)a_{j-1} - jh^*(t)a_{j+1}, \quad (65)$$

где  $j = 1, 2, 3, \dots$  и, по построению,  $a_0 = 1$ . Можно видеть, что последнее уравнение допускает частное решение вида  $a_j = (a_1)^j$ . Действительно, подставляя  $a_j = (a_1)^j$  в (65) получим

$$\dot{a}_1 = i\Omega(t) a_1 + h(t) - h^*(t) a_1^2 \quad (66)$$

для  $j = 1$  и

$$j a_1^{j-1} \dot{a}_1 = j a_1^{j-1} (i\Omega(t) a_1 + h(t) - h^*(t) a_1^2),$$

для  $j > 1$ . Уравнения идентичны для всех  $j$  с точностью до множителя  $j a_1^{j-1}$ . Таким образом, оказывается что динамика системы может происходить на некотором множестве, задаваемом соотношением  $a_j = (a_1)^j$  и получившем название множества Отта–Антонсена [65]. Динамика системы на этом множестве описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (66) для комплексной переменной  $a_1$ . Следует отметить связь между  $a_1$  и параметром порядка Курамото  $Z = \langle e^{i\varphi} \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} w(\varphi, t) d\varphi = a_1(t)$ . В итоге, на множестве ОА динамика системы описывается ноль-мерным уравнением для параметра порядка Курамото  $Z$ :

$$\dot{Z} = i\Omega(t) Z + h(t) - h^*(t) Z^2. \quad (67)$$

При этом для конкретных задач, как правило, имеет место простая функциональная связь между  $\{\Omega(t), h(t)\}$  и  $Z$ . Например, в трех приведенных выше примерах  $2h = K e^{i\beta} Z$  для ансамбля Курамото–Сакагучи,  $\Omega = I_{\text{inp}}(t) - K \text{Im}(Z)$  и  $2h(t) = I_0$  для цепочки сверхпроводящих джозефсоновских контактов с шунтированием, и  $2h(t) = B + K Z$  для ансамбля активных ротаторов.

Важен вопрос о притягивающих свойствах множества ОА. Для идентичных осцилляторов множество ОА является нейтрально устойчивым, а динамика системы, как было показано Ватанабэ, Строгацом и др. [102–104], частично интегрируемой. Вместе с тем, в реальных системах имеет место неточное совпадение собственных частот осцилляторов. Принято считать, что непрерывное распределение собственных частот в узком интервале приводит к появлению “слабой”

устойчивости множества ОА и позволяет получать на основе уравнения (67) результаты, хорошо согласующиеся с результатами прямого численного моделирования больших ансамблей.

Для объяснения механизма возникновения устойчивости множества ОА целесообразно разобрать случай конечного ансамбля идеально идентичных осцилляторов, что является предметом теории Ватанабэ–Строгаца [64].

Для набора фаз  $\varphi_k$  можно определить взаимно однозначное преобразование к набору фаз  $\psi_k$ , параметризуемое комплексным числом  $z$ :

$$e^{i\varphi_k} = \frac{z + e^{i\psi_k}}{1 + z^* e^{i\psi_k}}; \quad (68)$$

обратное преобразование:

$$e^{i\psi_k} = \frac{e^{i\varphi_k} - z}{1 - z^* e^{i\varphi_k}}.$$

В литературе преобразование (68) также известно как преобразование Мёбиуса единичной окружности в себя на комплексной плоскости. Если потребовать для новых фаз выполнение условия  $\sum_{k=1}^N e^{i\psi_k} = 0$ , то преобразование становится единственным и однозначно определяет  $z$ .

Подстановка преобразования (68) в уравнение (62) позволяет получить уравнения эволюции  $z$  и  $\psi_k$ , которые при условии  $\sum_{k=1}^N e^{i\psi_k} = 0$  принимают вид:

$$\dot{z} = i\Omega(t)z + h(t) - h^*(t)z^2, \quad (69)$$

$$\dot{\psi}_k = \Omega(t) + \text{Im}(2h(t)z^*). \quad (70)$$

Можно заметить, что уравнение динамики (69) для переменной  $z$ , которая может быть введена в общем случае (не только на множестве ОА), эквивалентно уравнению для параметра порядка  $Z$  на множестве ОА (67). Процедура введения  $z$  при этом такова, что из нее не следует в общем случае эквивалентность  $z$  и  $Z$ . Согласно уравнению (70), все фазы  $\psi_k$  меняются одинаково. Таким образом, динамика системы определяется изменением  $z$  и любой одной из фаз  $\psi_{k'}$ , а разности всех фаз  $(\psi_k - \psi_{k'})$  являются константами — интегралами дви-

жения системы. Плотность вероятности  $W(\psi_k, t)$  является бегущей волной с замороженным профилем.

Определим, чему решение ОА соответствует в переменных  $\{z, \psi_k\}$ :

$$\begin{aligned} w_{\text{ОА}}(\varphi, t) &= \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} ([a_1(t)]^j e^{-ij\varphi} + [a_1^*(t)]^j e^{ij\varphi}) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1 - a_1(t)e^{-i\varphi}} + \frac{1}{1 - a_1^*(t)e^{i\varphi}} - 1 \right] = \\ &= \frac{1 - |a_1|^2}{2\pi |1 - a_1 e^{-i\varphi}|^2} = \frac{1 - |Z|^2}{2\pi |1 - Z e^{-i\varphi}|^2}. \end{aligned}$$

Поскольку для этого решения  $Z$  подчиняется уравнению (67), и тому же уравнению всегда подчиняется переменная  $z$ , естественно предположить их совпадение в этом случае. Из соотношений (68) может быть вычислено

$$d\psi = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z e^{-i\varphi}|^2} d\varphi,$$

откуда  $W_{\text{ОА}}(\psi) = w_{\text{ОА}}(\varphi) \frac{|d\varphi|}{|d\psi|} = \frac{1}{2\pi}$ .

Проверим предположение о тождественности  $z$  и  $Z$  для решения ОА. Для заданных распределения  $W(\psi) = \frac{1}{2\pi}$  и значения  $z$ , можно вычислить параметр порядка  $Z$ , который оказывается равен  $z$ , и  $w(\varphi)$ , оказывающееся совпадающим с  $w_{\text{ОА}}(\varphi|Z = z)$ . Таким образом получаем, что решение Отта–Антонсена — это частный случай, соответствующий равномерному распределению фаз  $\psi_k$ .

Теперь, когда установлено соответствие между решением ОА и описанием системы в переменных ВС  $\{z, \psi_k\}$ , можно рассмотреть вопрос о том, что при неидеальной идентичности осцилляторов множество ОА из нейтрально устойчивого превращается в “слабо” притягивающее. В самом деле, в ансамбле с расстройкой собственных частот можно выделить подгруппы осцилляторов с одинаковыми частотами. Распределение  $W(\psi, t)$  для каждой такой подгруппы является бегущей волной с замороженным профилем. Однако, из-за разностей частот эти волны, согласно уравнению (70), бегут с различной скоростью, что приводит к их постоянному смещению друг относительно друга. В термодинамическом пределе большого ансамбля “смещение” большого количества слу-

чайных профилей в течение достаточно длительного времени приводит к равномерному распределению  $W(\psi) = \frac{1}{2\pi}$ , что соответствует решению ОА. Таким образом, для реальных систем множество Отта–Антонсена оказывается не просто семейством частных решений, а аттрактором, и при описании динамики параметра порядка в системе можно полагаться на уравнение (67).

## 2.2. Теория Отта–Антонсена для неидентичных осцилляторов

Перепишем уравнение (62) для случая неидентичных осцилляторов:

$$\dot{\varphi}_k = \Omega_k + \text{Im}(2h(t) e^{-i\varphi_k}), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где собственные частоты нелинейных колебаний осцилляторов  $\Omega_k$  распределены с плотностью вероятности  $g(\Omega)$ . В термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  удобно идентифицировать осцилляторы по значению их собственной частоты  $\Omega$  и перейти к уравнениям для  $\varphi_\Omega$ :

$$\dot{\varphi}_\Omega = \Omega + \text{Im}(2h(t) e^{-i\varphi_\Omega}). \quad (71)$$

Плотность вероятности  $w_\Omega(\varphi, t)$  осцилляторов с собственными частотами  $\Omega$  представляем рядом Фурье:

$$w_\Omega(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} [a_{\Omega,j} e^{-ij\varphi} + a_{\Omega,j}^* e^{ij\varphi}] \right), \quad (72)$$

где  $a_{\Omega,j}$  подчиняется уравнению

$$\dot{a}_{\Omega,j} = ij\Omega a_{\Omega,j} + jh(t) a_{\Omega,j-1} - jh^*(t) a_{\Omega,j+1}. \quad (73)$$

При этом комплексные параметры порядка

$$Z_j = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega g(\Omega) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ij\varphi} w_\Omega(\varphi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega g(\Omega) a_{\Omega,j}.$$

Рассмотрим случай, когда частоты имеют лоренцево распределение с характерной полушириной  $\gamma$ :

$$g(\Omega) = \frac{\gamma}{\pi[\gamma^2 + (\Omega - \Omega_0)^2]}.$$

Если  $a_{\Omega,j}$  является бесконечно гладкой функцией  $\Omega$ , то можно расширить ось вещественных значений  $\Omega$  до комплексной плоскости и построить аналитическое продолжение  $a_j(\Omega)$  на всю комплексную плоскость. Уравнение (73) остается справедливо, но его следует рассматривать для комплексных значений  $\Omega$ . Пусть в некоторый момент времени все  $a_j(\Omega, t)$  являются аналитическими функциями  $\Omega$ , тогда приращения  $da_j(\Omega, t)$  за инфинитезимальное время  $dt$ , задаваемые уравнением (73), также являются аналитическими функциями  $\Omega$ . Следовательно, если аналитичность  $a_j(\Omega)$  имеет место в какой-то момент времени, то она сохраняется.

Для аналитических функций  $a_j(\Omega)$  интеграл с распределением  $g(\Omega)$  может быть вычислен методами теории вычетов, поскольку

$$Z_j = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega g(\Omega) a_j(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{\gamma a_j(\Omega)}{\pi(\Omega - \Omega_0 + i\gamma)(\Omega - \Omega_0 - i\gamma)}.$$

Определим, через какую полуплоскость следует производить замыкание контура интегрирования. При  $\Omega = +i\infty$  уравнение (73) дает  $\dot{a}_j(+i\infty) = -j\infty \cdot a_j(+i\infty) + \mathcal{O}(1)$ , то есть  $a_j(\Omega)$  на верхнем контуре бесконечно быстро стремится к нулю. При  $\Omega = -i\infty$  уравнение (73) дает  $\dot{a}_j(-i\infty) = +j\infty \cdot a_j(-i\infty) + \mathcal{O}(1)$ , то есть  $a_j(\Omega)$  на нижнем контуре бесконечно быстро стремится к бесконечности. Следовательно замыкание контура интегрирования следует делать через верхнюю полуплоскость, что дает

$$Z_j = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{\gamma a_j(\Omega)}{\pi(\Omega - \Omega_0 + i\gamma)(\Omega - \Omega_0 - i\gamma)} = a_j(\Omega_0 + i\gamma).$$

Аналог уравнения (65) в терминах параметра порядка для случая неиден-

тичных осцилляторов принимает вид:

$$\dot{Z}_j = j(i\Omega_0 - \gamma)Z_j + jh(t)Z_{j-1} - jh^*(t)Z_{j+1}. \quad (74)$$

Для ансамбля идентичных осцилляторов параметры порядка  $Z_j \equiv a_j$ .

Эволюция решения Отта–Антонсена, в свою очередь, описывается уравнением

$$\dot{Z}_1 = (i\Omega_0 - \gamma)Z_1 + h(t) - h^*(t)Z_1^2 \quad (75)$$

(ср. с уравнением (67)). Более того, для этого случая установлено, что решение Отта–Антонсена становится притягивающим [65, 96], а не нейтрально устойчивым, как для идеально идентичных осцилляторов.

### 2.3. Круговые кумулянты

Описание динамики системы в окрестности множества ОА в терминах  $Z_j$  (или  $a_j$ ) оказывается проблематичным для состояний с высокой степенью синхронности, когда  $|Z_1|$  близко к 1 и ряд  $Z_j \sim (Z_1)^j$  обладает медленной сходимостью. В связи с этим может оказаться продуктивным переход от рассмотрения моментов  $Z_j = \langle (e^{i\varphi})^j \rangle$  (параметров порядка) к формально соответствующим им кумулянтам [4]. Найдем их связь с помощью параметров порядка  $Z_j = \langle e^{ij\varphi} \rangle$  и производящей функции

$$F(k) = \langle \exp(ke^{i\varphi}) \rangle \equiv \sum_{j=0}^{\infty} Z_j \frac{k^j}{j!}. \quad (76)$$

Параметр порядка можно записать как:

$$Z_j = \frac{\partial^j}{\partial k^j} F(k)|_{k=0}.$$

Кумулянты  $K_j$  определяем стандартным образом через разложение производящей функции:

$$\Phi(k) = \ln(F(k)) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} K_j \frac{k^j}{j!}. \quad (77)$$

Однако удобнее работать с перенормированными переменными  $\varkappa_j = \frac{K_j}{(j-1)!}$ , которые ниже будем называть “круговыми кумулянтам”. Например, первые три круговых кумулянта имеют вид:

$$\varkappa_1 = Z_1, \quad \varkappa_2 = Z_2 - Z_1^2, \quad \varkappa_3 = \frac{1}{2}(Z_3 - 3Z_2Z_1 + 2Z_1^2).$$

Производящая функция для круговых кумулянтов:

$$\Psi(k) = k \frac{\partial}{\partial k} \Phi(k) = \frac{k}{F} \frac{\partial F}{\partial k} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_j \frac{k^j}{j!}. \quad (78)$$

Поскольку  $Z_j$  являются не моментами фазы, а моментами величины  $e^{i\varphi}$ ,  $K_j$  являются не подлинными кумулянтами распределения фазы, с чем и связан допустимый произвол в выборе между переменными  $K_j$  и  $\varkappa_j$  в качестве круговых кумулянтов.

Из уравнения (74) можно получить:

$$\dot{F} = (i\Omega_0 - \gamma)k \frac{\partial}{\partial k} F + hkF - h^*k \frac{\partial^2}{\partial k^2} F. \quad (79)$$

В дальнейшем будем обозначать частную производную как  $\frac{\partial}{\partial k} = \partial_k$ . Функцию  $F(k)$  можно выразить через производящую функцию кумулянтов  $\Phi(k) = \ln F(k)$ ,  $F(k) = \exp(\Phi(k))$ ; тогда после трудоемких, но явных преобразований уравнение (79) может быть приведено к виду:

$$\dot{\Phi} = (i\Omega_0 - \gamma)k \partial_k \Phi + hk - h^*k (\partial_k^2 \Phi + (\partial_k \Phi)^2). \quad (80)$$

Уравнение (80) содержит нелинейное слагаемое относительно функции  $\Phi$ , и это слагаемое является квадратом производной  $\partial_k \Phi$ . Следовательно, можно ожидать, что это уравнение будет иметь наиболее простой вид для коэффициентов Тейлора  $\varkappa_j$  функции  $\Psi(k) = k \partial_k \Phi(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_j k^j$ . Подставляя  $\dot{\Psi} = k \partial_k \dot{\Phi}$  в уравнение (80), получим:

$$\dot{\Psi} = (i\Omega_0 - \gamma)k \partial_k \Psi + hk - h^*k \partial_k \left( k \partial_k \left( \frac{\Psi}{k} \right) + \frac{\Psi^2}{k} \right). \quad (81)$$

Уравнение (81) дает для коэффициентов Тейлора  $\varkappa_j$ :

$$\dot{\varkappa}_j = j(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_j + h\delta_{j1} - h^* \left( j^2 \varkappa_{j+1} + j [\Psi^2]_{j+1} \right), \quad (82)$$

Можно вычислить  $[\Psi^2]_j$ :

$$\Psi^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_j k^j \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n k^n = \sum_{j=1}^{\infty} k^j \left( \sum_{m=1}^j \varkappa_m \varkappa_{j-m} \right).$$

Тогда уравнение (82) приобретает форму:

$$\dot{\varkappa}_j = j(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_j + h\delta_{1j} - h^* \left( j^2 \varkappa_{j+1} + j \sum_{m=0}^{j-1} \varkappa_{j-m} \varkappa_{m+1} \right). \quad (83)$$

где  $\delta_{1j} = 1$  при  $j = 1$  и  $\delta_{1j} = 0$  при  $j \neq 1$ .

Как следует из последнего уравнения, динамика  $\varkappa_j$  определяется значениями  $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{j+1}$ , и  $\varkappa_{j+1}$  входит через слагаемое  $(-j^2 h^* \varkappa_{j+1})$ . Таким образом, в общем случае выделить замкнутую систему конечного числа уравнений не представляется возможным.

## 2.4. Двухгрупповые решения

### 2.4.1. Расширение многообразия Отта–Антонсена

В терминах круговых кумулянтов решение ОА,  $Z_j = (Z_1)^j$ , принимает очень простой вид:

$$\varkappa_1 = a_1, \quad \varkappa_{j \geq 2} = 0. \quad (84)$$

Данное обстоятельство служит существенным аргументом в пользу кумулянтного представления: во-первых, оказывается, что старшие кумулянты описывают отклонение от многообразия ОА, и, во-вторых, появляется возможность обойти проблему медленной сходимости ряда  $Z_j$  при  $|Z_1| \rightarrow 1$ .

Для решения (84) из цепочки уравнений (83) остается только первое, которое совпадает с уравнением (66), а все последующие уравнения удовлетворены

тождественно. Однако возможны и более широкие частные случаи, позволяющие получить замкнутые уравнения вместо бесконечной системы (83). В общем случае, если старшие кумулянты не равны нулю, уравнение для  $j = 1$  имеет вид

$$\dot{\varkappa}_1 = (i\Omega - \gamma)\varkappa_1 + h - h^*(\varkappa_2 + \varkappa_1^2). \quad (85)$$

В типичных задачах  $h = h(\varkappa_1, t)$  и отклонение динамики параметра порядка  $\varkappa_1$  от решения ОА требует ненулевого значения  $\varkappa_2$ . Поэтому интерес представляют частные решения с  $\varkappa_2 \neq 0$ . Система уравнений (83) замыкается, если для некоторых существенных кумулянтов  $\varkappa_j$  будут обращаться в ноль  $\varkappa_{j+1}$ . При  $\varkappa_2 \neq 0$  простейшим вариантом для рассмотрения являются решения, для которых равны нулю все нечетные  $\varkappa_j$ , кроме первого.

Рассмотрим случай  $\varkappa_{2n+1} = 0$ , где  $n = 1, 2, \dots$ . Для  $j = 1$  имеем уравнение (85). Для  $j = 2n + 1$  уравнения (83) дают

$$0 = -jh^*(j\varkappa_{j+1} + (\varkappa_j\varkappa_1 + \varkappa_{j-1}\varkappa_2 + \dots + \varkappa_1\varkappa_j)),$$

или

$$0 = (2n + 1)\varkappa_{2n+2} + \varkappa_{2n}\varkappa_2 + \varkappa_{2n-2}\varkappa_4 + \dots + \varkappa_2\varkappa_{2n}. \quad (86)$$

Для  $j = 2n$ :

$$\dot{\varkappa}_j = j(i\Omega - \gamma)\varkappa_j - jh^*(\varkappa_j\varkappa_1 + \varkappa_{j-1}\varkappa_2 + \varkappa_{j-2}\varkappa_3 + \dots + \varkappa_1\varkappa_j),$$

или

$$\dot{\varkappa}_{2n} = 2n(i\Omega - \gamma - 2h^*\varkappa_1)\varkappa_{2n}. \quad (87)$$

Из последнего уравнения можно видеть, что динамика всех четных круговых кумулянтов подобна динамике второго: для некоторого решения с  $\varkappa_2(t)$  должно выполняться

$$\varkappa_{2n}(t) = C_n(\varkappa_2(t))^n, \quad (88)$$

где  $C_n$  — константы интегрирования, определяемые начальными условиями; по построению,  $C_1 = 1$ . Вместе с тем, следует помнить, что уравнения (87) спра-

ведливы только при выполнении соотношений (86), которые являются условием того, что нечетные кумулянты старше первого остаются нулевыми. Решение (88) удовлетворяет соотношению (86) при надлежащем выборе констант  $C_n$ : после подстановки  $\varkappa_{2n}(t)$  из (88) уравнение (86) может быть переписано в виде рекуррентного соотношения:

$$C_{n+1} = -\frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^n C_m C_{n+1-m},$$

которое выражает  $C_{n+1}$  через  $C_1, C_2, \dots, C_n$  и при фиксированном  $C_1 = 1$  дает однозначно определенный набор коэффициентов

$$\{C_n\} = \{1, -1/3, 2/15, -17/315, \dots\}.$$

Таким образом, в системе можно выделить инвариантное многообразие

$$\varkappa_{2n-1} = \varkappa_1 \delta_{1n}, \quad \varkappa_{2n} = C_n \varkappa_2^n, \quad (89)$$

являющееся расширением множества Отта–Антонсена (многообразие ОА соответствует  $\varkappa_2 = 0$ ). Динамика системы на этом многообразии определяется замкнутой системой двух комплексных уравнений

$$\dot{\varkappa}_1 = (i\Omega - \gamma)\varkappa_1 + h - h^*(\varkappa_2 + \varkappa_1^2), \quad (90)$$

$$\dot{\varkappa}_2 = 2(i\Omega - \gamma - 2h^*\varkappa_1)\varkappa_2. \quad (91)$$

Даже если  $h$  зависит не только от первых кумулянтов  $\varkappa_1$  и  $\varkappa_2$ , но и от старших кумулянтов, система остается замкнутой, поскольку на этом множестве старшие кумулянты выражаются через второй (либо равны нулю).

Покажем, что построенное инвариантное многообразие (89) можно интерпретировать как двухгрупповое состояние — оно может быть представлено в виде пары подансамблей, в каждом из которых распределение осцилляторов соответствует решению ОА. Вычислим для такого состояния кумулянты  $\varkappa_j$ . Для каждого подансамбля имеем параметр порядка  $\varkappa_1^{\{p\}}$  и нулевые старшие круговые кумулянты  $\varkappa_{j \geq 2}^{\{p\}}$ , где  $p = 1, 2$  — номер подансамбля. Распределение осцил-

ляторов в полном ансамбле является суперпозицией распределений в подансамблях:  $w(\varphi, t) = q_1 w_1(\varphi, t) + q_2 w_2(\varphi, t)$ , где  $q_p$  — доля элементов в подансамбле  $p$ . В силу линейности связи между генерирующей функцией моментов  $F(k)$  и распределением  $w(\varphi)$ , можно получить  $F(k) = q_1 F_1(k) + q_2 F_2(k) = q_1 e^{\Phi_1(k)} + q_2 e^{\Phi_2(k)}$  (см. уравнения (76), (77)). Так как для решения ОА генерирующая функция кумулянтов имеет вид  $\Phi_p(k) = \varkappa_1^{\{p\}} k$ , окончательно находим

$$\Phi(k) = \ln \left[ q_1 \exp(\varkappa_1^{\{1\}} k) + q_2 \exp(\varkappa_1^{\{2\}} k) \right].$$

Разложение последнего выражения в ряд Тейлора дает величины  $K_j$  и  $\varkappa_j$ . В случае равного распределения элементов между группами,  $q_1 = q_2 = 1/2$ , вычисления в программном пакете Maple с произвольной длиной разложений в ряд Тейлора (до 50 членов) обнаруживают, что все нечетные кумулянты выше первого равны нулю, а для четных имеет место соотношение (88); при этом получаются в точности соотношения (89):

$$\varkappa_1 = (\varkappa_1^{\{1\}} + \varkappa_1^{\{2\}})/2, \quad \varkappa_{2n} = C_n \left[ (\varkappa_1^{\{1\}} - \varkappa_1^{\{2\}})^2 / 4 \right]^j. \quad (92)$$

Состояния с равным распределением элементов между двумя группами вида ОА соответствуют найденному инвариантному многообразию. Поскольку полный набор кумулянтов однозначно определяет распределение плотности вероятности, то найденное соответствие между двухгрупповыми состояниями и частными решениями вида (89) является взаимнооднозначным. Само решение ОА является частным случаем совпадения групп  $\varkappa_1^{\{1\}} = \varkappa_1^{\{2\}}$ .

#### 2.4.2. Динамика двухгрупповых химер в иерархически связанных ансамблях Курамото–Сакагучи (система Абрамаса)

Рассмотрим в качестве примера динамику двух симметрично связанных ансамблей осцилляторов Курамото–Сакагучи (обобщение модели Курамото–

то) [82, 97, 98]:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_k &= \omega_k + \frac{\mu}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\varphi_l - \varphi_k - \alpha) + \frac{\nu}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\psi_l - \varphi_k - \alpha), \\ \dot{\psi}_k &= \omega_k + \frac{\mu}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\psi_l - \psi_k - \alpha) + \frac{\nu}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\varphi_l - \psi_k - \alpha).\end{aligned}\tag{93}$$

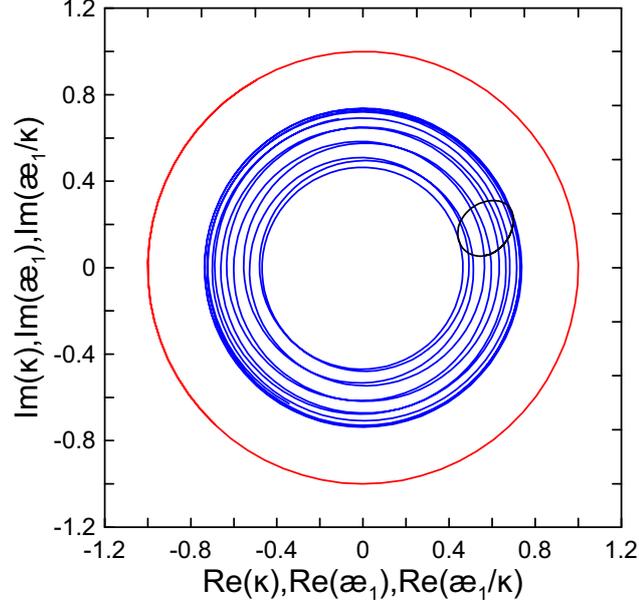


Рис. 14: Иллюстрация динамики системы (93), когда состояние второго ансамбля является одногрупповым, при  $\gamma = 0$ : красная линия — траектория параметра порядка  $\kappa$  для синхронизированного ансамбля 1, синяя линия — траектория параметра порядка  $\kappa_1$  для ансамбля 2, находящегося в однокластерном состоянии, черная линия — динамика параметра порядка ансамбля 2 в системе отсчета, вращающейся с параметром порядка ансамбля 1, то есть на плоскости  $(\kappa_1/\kappa)$ . Значения параметров:  $\mu = 0.65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0.15$ .

Здесь  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  — фазы в ансамблях размера  $N$ ,  $\mu$  и  $\nu = 1 - \mu$  — параметры связи внутри ансамбля и с другим ансамблем соответственно,  $\alpha$  — фазовый сдвиг связи (при  $\cos \alpha > 0$  связь является притягивающей, при  $\cos \alpha < 0$  — отталкивающей, при  $\cos \alpha = 0$  — консервативной; для модели Курамото  $\alpha = 0$ ). В работе [105] динамика этой системы была исследована для случая идентичных частот  $\omega_k = \Omega$  в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ . Для системы были

найлены состояния-химеры, в которых первый ансамбль оказывается полностью синхронизирован, а осцилляторы второго ансамбля формируют группу, ширина которой периодически меняется со временем (рис. 14).

Несинхронизированная группа отвечает решению ОА, и на многообразии ОА описанный режим является притягивающим. Впоследствии [103] было замечено, что данный режим должен являться не единственным притягивающим режимом, поскольку при идентичных частотах многообразии ОА, на котором задавались начальные условия, не является трансверсально притягивающим. В частности, было продемонстрировано, что если начальное состояние системы задавать отличным от распределения ОА, то система не переходит в режимы, представленные в работе [105], а динамика параметров порядка имеет более высокую размерность вложения (рис. 15, 16).

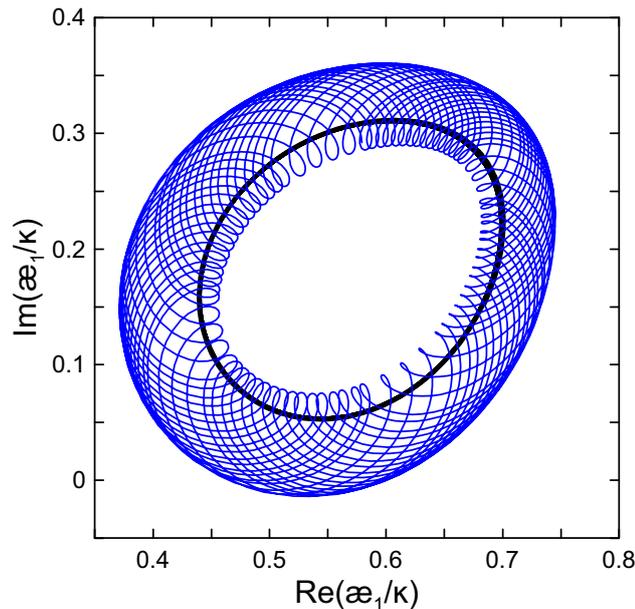


Рис. 15: Динамика двухгруппового состояния при  $\gamma = 0$  (синяя линия) в сравнении с одногрупповым решением (черная линия, соответствует черной линии на рис. 14). Значения параметров:  $\mu = 0.65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0.15$ ,  $\varkappa_1^{\{1,2\}} = (0.8 \pm 0.1)e^{i(0.3 \pm 0.15)}$ .

Такие режимы называются “химерами”. В них часть осцилляторов синхронизирована, а часть асинхронна (“химера”, в мифологии, это животное, про-

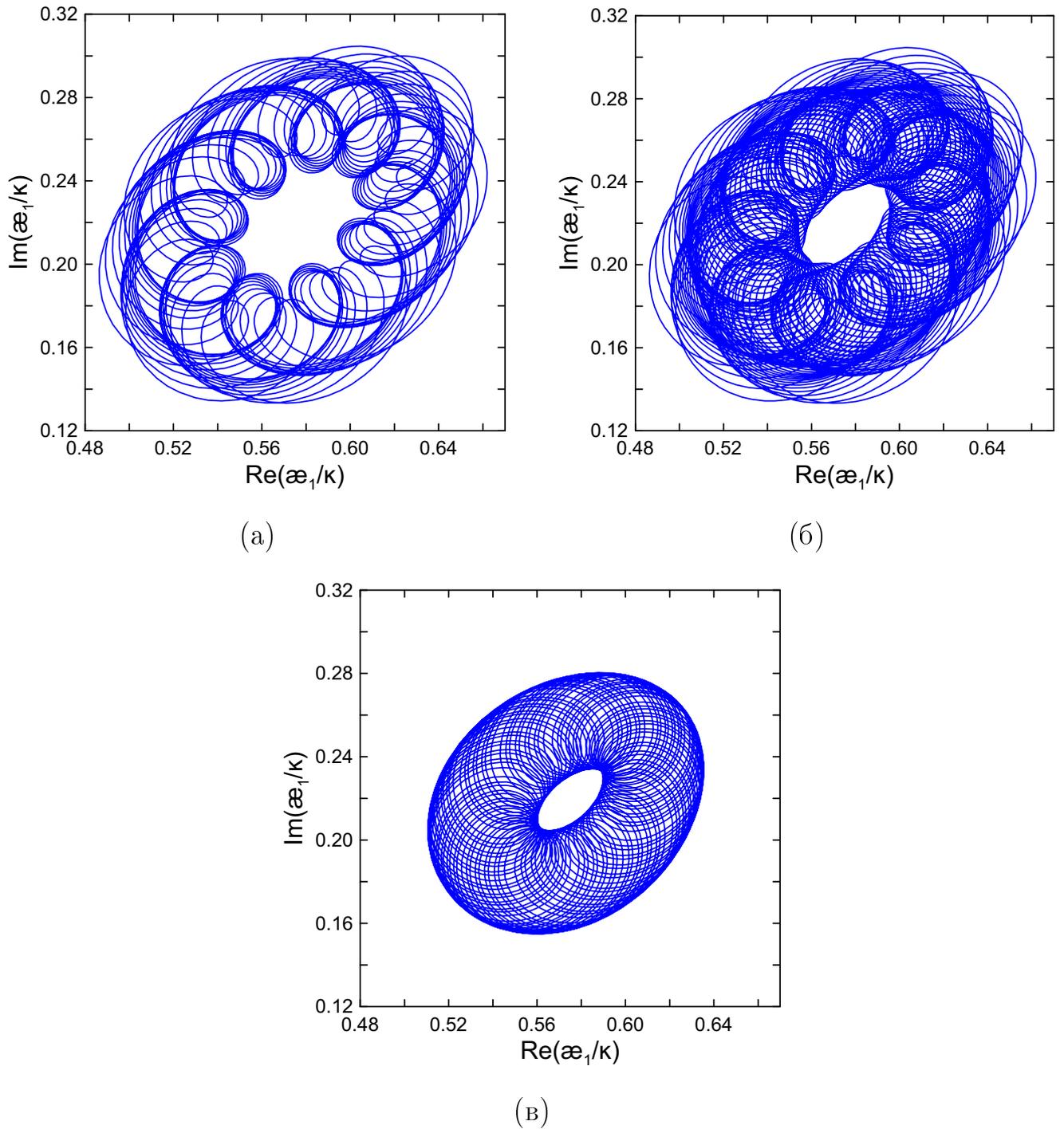


Рис. 16: Динамика двухгруппового состояния при  $\gamma = 0$ . а) Ранняя стадия переходного процесса. б) Переходный процесс. в) Конечное состояние. Значения параметров:  $\mu = 0.65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0.17$ ,  $\varkappa_1^{\{1,2\}} = (0.7 \pm 0.1)e^{i(0.4 \pm 0.2)}$ .

тивоестественно составленное из нескольких других живых существ разных классов, в классическом значении слова, оно используется для обозначения явления (предмета), составленного из разнородных, несовместимых элементов). Химерные состояния являются естественным переходным состоянием между

полностью синхронными и беспорядочными колебаниями; то есть столь же полноправным “агрегатным состоянием” динамической системы, как и последние два. Режимы химер находятся в центре внимания многих исследовательских работ (например, [106, 107]), также из-за сходства с такими проблемами, как турбулентная перемежаемость в гидродинамике [14, 15].

Будем интересоваться режимами динамики системы (93), в которых осцилляторы несинхронизированного ансамбля формируют две группы. Соответственно, начальное состояние второго ансамбля задаем как сумму распределений Отта–Антонсена, но с разным значением комплексного параметра порядка:

$$\kappa_1^{1,2} = (R \pm \delta R)e^{i(\phi \pm \delta\phi)}.$$

здесь  $|R \pm \delta R|$  — абсолютное значение параметра порядка для соответствующей группы, а  $|\phi \pm \delta\phi|$  — центральная фаза для соответствующей группы.

На рис. 16 представлена более сложная траектория движения. Здесь имеется длительная переходная динамика, в отличие от рис. 15. Оба графика были построены в случае равного распределения элементов между группами, то есть  $q_1 = q_2 = 0.5$ .

### 2.4.3. Устойчивость одногруппового режима по отношению к возбуждению второй группы

Воспользуемся результатом (90)–(91) для аналитического исследования динамики системы (93) вне многообразия ОА и установления влияния расстройки собственных частот  $\gamma$  на коллективную динамику системы. Для упрощения записи уравнений, будем сразу предполагать, что первый ансамбль фазы  $\varphi$  представляет из себя одну группу с первым кумулянтном  $\kappa$ , а первый и второй кумулянты в ансамбле фаз  $\psi$ , состоящем из двух групп, обозначим  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ .

На основе уравнений (90)–(91) для системы (93) можно записать:

$$\dot{\kappa} = (i\Omega - \gamma)\kappa + h_1 - h_1^*\kappa^2, \quad (94)$$

$$i\dot{\varkappa}_1 = (i\Omega - \gamma)\varkappa_1 + h_2 - h_2^*(\varkappa_2 + \varkappa_1^2), \quad (95)$$

$$i\dot{\varkappa}_2 = 2(i\Omega - \gamma - 2h_2^*\varkappa_1)\varkappa_2, \quad (96)$$

где  $h_1 = (\mu\kappa + \nu\varkappa_1)e^{-i\alpha}/2$ ,  $h_2 = (\mu\varkappa_1 + \nu\kappa)e^{-i\alpha}/2$ .

Рассмотрим устойчивость второго ансамбля к возбуждению  $\varkappa_2$ , то есть поведение системы (95)–(96) при малом  $\varkappa_2$  и конечном  $\varkappa_1$ . Уравнение (96) дает

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d}{dt} \ln \varkappa_2 \right) = -2\gamma - 2 \left( \mu |\varkappa_1|^2 \cos \alpha + \nu \operatorname{Re}(\kappa^* \varkappa_1 e^{i\alpha}) \right). \quad (97)$$

Из уравнения (95) при  $|\varkappa_2| \ll |\varkappa_1|$  можно получить

$$\frac{d}{dt} |\varkappa_1|^2 = -2\gamma |\varkappa_1|^2 + (1 - |\varkappa_1|^2) \left( \mu |\varkappa_1|^2 \cos \alpha + \nu \operatorname{Re}(\kappa^* \varkappa_1 e^{i\alpha}) \right). \quad (98)$$

Для анализа свойств устойчивости, описываемых уравнением (97), удобно переписать последнее уравнение следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{1}{1 - |\varkappa_1|^2} = -\frac{2\gamma |\varkappa_1|^2}{1 - |\varkappa_1|^2} + \left( \mu |\varkappa_1|^2 \cos \alpha + \nu \operatorname{Re}(\kappa^* \varkappa_1 e^{i\alpha}) \right).$$

Сравнивая правые части последнего уравнения и уравнения (97) и выполняя осреднение по времени, можно получить

$$\operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dt} \ln \varkappa_2 \right\rangle = -2\gamma \left\langle \frac{1 + |\varkappa_1|^2}{1 - |\varkappa_1|^2} \right\rangle - 2 \left\langle \frac{d}{dt} \ln \frac{1}{1 - |\varkappa_1|^2} \right\rangle. \quad (99)$$

Аналогичный результат может быть получен и для первого ансамбля.

Величина  $\operatorname{Re} \langle \frac{d}{dt} \ln \varkappa_2 \rangle$  определяет инкремент  $|\varkappa_2|$  и, таким образом, характеризует устойчивость системы к возмущениям, уводящим ее от многообразия ОА.

Из уравнения (99) можно видеть, что возможны два типа траекторий на многообразии Отта–Антонсена, для которых свойства устойчивости к возбуждению  $\varkappa_2$  могут отличаться: ограниченная траектория с неидеальной синхронностью

( $|\varkappa_1| < 1$ ) и траектории, для которых  $|\varkappa_1| \rightarrow 1$ . В первом случае второе слагаемое в правой части уравнений (99) равно нулю, и устойчивость определяется первым слагаемым, в котором выражение при  $\gamma$  знакоопределено. При  $\gamma = 0$  отклонения от множества ОА не затухают со временем, при  $\gamma \neq 0$  отклонения начинают затухать. Во втором случае, при  $|\varkappa_1| \rightarrow 1$ , аргумент логарифма  $(1 - |\varkappa_1|^2)^{-1}$  стремится к  $+\infty$  и  $\left\langle \frac{d}{dt} \ln \frac{1}{1 - |\varkappa_1|^2} \right\rangle > 0$ .

Таким образом, при переходе к полной синхронизации траектории сходятся к многообразию ОА —  $\varkappa_2$  затухает независимо от наличия расстройки частот  $\gamma$ . При расстройке частот,  $\gamma \neq 0$ , состояние полной синхронизации становится невозможным, что следует из уравнения (98), которое допускает решение  $|\varkappa_1| = 1$  только при  $\gamma = 0$ . Осредняя уравнение (98) по времени, можно видеть, что при малом  $\gamma$  режим с  $|\varkappa_1| = 1$  сменяется некоторым новым режимом, для которого  $\langle 1 - |\varkappa_1|^2 \rangle \sim \gamma$ . Таким образом, устойчивость “наследника” состояния полной синхронизации является высокой даже при малом  $\gamma$ , поскольку

$$\operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dt} \ln \varkappa_2 \right\rangle \sim \frac{-\gamma}{1 - |\varkappa_1|^2} \sim -1.$$

#### 2.4.4. Динамика двухгрупповых химер

Проведем детальное описание динамики двухгрупповых химер в рассматриваемой системе (94)–(96). Как уже отмечалось, в связи с тем, что для первого ансамбля второй кумулянт затухает либо из-за полной синхронизации, либо из-за влияния  $\gamma$  и скорость этого затухания  $\sim 1$  даже при  $\gamma \rightarrow 0$ , имеет смысл ограничиться случаем, когда не равен нулю только первый кумулянт. Поскольку уравнения (94)–(96) обладают симметрией относительно поворотов комплексных амплитуд  $\kappa \rightarrow \kappa e^{i\beta}$ ,  $\varkappa_n \rightarrow \varkappa_n e^{in\beta}$ , нетривиальная часть динамики связана не с полными фазами кумулянтов, а с их разностями. Введем для ансамбля 1 переменные  $\rho \equiv |\kappa|$  и  $\xi \equiv \kappa/|\kappa|$ :  $\kappa = \rho\xi$ . Динамику ансамбля 2 будем описывать в системе отсчета, вращающейся вместе с  $\kappa$ : конкретно, в терминах переменных  $\chi_1 = \varkappa_1 \xi^*$  и  $\chi_2 = \varkappa_2 (\xi^*)^2$ . Тогда из системы (94)–(96) можно

получить:

$$\dot{\rho} = -\gamma\rho + \frac{1-\rho^2}{2} (\mu\rho \cos \alpha + \nu \operatorname{Re}(\chi_1 e^{-i\alpha})) , \quad (100)$$

$$\dot{\xi} = i \left[ \Omega - \frac{1+\rho^2}{2\rho} (\mu\rho \sin \alpha + \nu \operatorname{Im}(\chi_1 e^{-i\alpha})) \right] \xi , \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 = & -\gamma\chi_1 + \frac{\mu}{2} \left[ \chi_1 e^{-i\alpha} - \chi_1^* e^{i\alpha} (\chi_1^2 + \chi_2) + i(1+\rho^2)\chi_1 \sin \alpha \right] + \\ & + \frac{\nu}{2} \left[ \rho e^{-i\alpha} - \rho e^{i\alpha} (\chi_1^2 + \chi_2) + i \frac{1+\rho^2}{\rho} \chi_1 \operatorname{Im}(\chi_1 e^{-i\alpha}) \right] , \quad (102) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_2 = & 2 \left( -\gamma + \mu \left[ -|\chi_1|^2 e^{i\alpha} + i \frac{1+\rho^2}{2} \sin \alpha \right] + \right. \\ & \left. + \nu \left[ -\rho \chi_1 e^{i\alpha} + i \frac{1+\rho^2}{2\rho} \operatorname{Im}(\chi_1 e^{-i\alpha}) \right] \right) \chi_2 . \quad (103) \end{aligned}$$

При  $\gamma = 0$  первый ансамбль может быть полностью синхронизованным,  $\rho = 1$ , и тогда уравнения (102)–(103) принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 = & \mu \left[ \frac{\chi_1 e^{-i\alpha} - \chi_1 |\chi_1|^2 e^{i\alpha} - \chi_1^* \chi_2 e^{i\alpha}}{2} + i \chi_1 \sin \alpha \right] + \\ & + \nu \left[ \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} (\chi_1^2 + \chi_2)}{2} + i \chi_1 \operatorname{Im}(\chi_1 e^{-i\alpha}) \right] , \quad (104) \end{aligned}$$

$$\dot{\chi}_2 = 2 \left( \mu \left[ -|\chi_1|^2 e^{i\alpha} + i \sin \alpha \right] + \nu \left[ -\chi_1 e^{i\alpha} + i \operatorname{Im}(\chi_1 e^{-i\alpha}) \right] \right) \chi_2 . \quad (105)$$

Последняя система уравнений задает автономную динамическую систему в 4-х мерном фазовом пространстве. При  $\gamma = \chi_2 = 0$  она сводится к двумерной, и соответствует рассмотренной в работе [105] одногрупповой химере на многообразии ОА. Пример такого решения представлен на рис. 14. Как уже было отмечено, при  $\gamma = 0$  малые значения кумулянта  $\chi_2$  в среднем со временем не затухают и не нарастают (в рамках линейной теории). Таким образом, при тех значениях параметров, где одногрупповая динамика демонстрировала стремление к устойчивому предельному циклу на плоскости  $\chi_1$ , для двухгрупповых состояний будет наблюдаться притяжение к семейству торов, параметризуемых характерной амплитудой колебаний  $\chi_2$  (качественно,  $|\chi_2|$  определяет “толщину” тора, см. рис. 15).

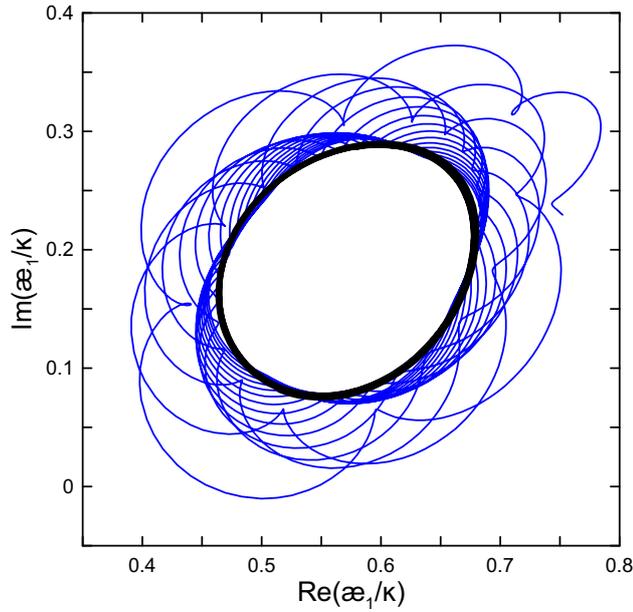


Рис. 17: Динамика двухгруппового состояния при  $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$ ; здесь синяя кривая — переходный процесс для двухгруппового начального состояния, черная кривая — притягивающий предельный цикл, соответствующий одногрупповому состоянию. Значения параметров:  $\mu = 0.65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0.15$ ,  $\varkappa_1^{\{1,2\}} = (0.8 \pm 0.1)e^{i(0.3 \pm 0.15)}$ .

При  $\gamma > 0$ , как было показано выше,  $\chi_2 \rightarrow 0$ , то есть устанавливается одногрупповой режим. В соответствии с этими аналитическими результатами, в численном счете наблюдается квазипериодическая динамика на плоскости  $(\varkappa_1/\kappa)$  при  $\gamma = 0$  (рис. 15) и притяжение траекторий к предельному циклу, соответствующему одногрупповым состояниям, при  $\gamma \neq 0$  (рис. 17).

В итоге, на основании уравнений (95)–(96) оказывается возможным явное аналитическое описание динамики системы за пределами многообразия ОА и аналитическое доказательство того, что в важной парадигматической задаче [105] это многообразие является нейтрально устойчивым (становится притягивающим только при введении расстройки частот  $\gamma$ ). Численный счет в рамках кумулянтного представления позволяет избежать проблем с медленной сходимостью ряда  $Z_n$  при  $|Z_1| \rightarrow 1$ : численное интегрирование с несколькими первыми кумулянтами обеспечивает тот же уровень точности, что аналогичное

интегрирование уравнения (65) с сотнями гармоник  $Z_n$ .

## 2.5. Выводы по главе

В данной главе построено описание поведения ансамблей в окрестности решения Отта–Антонсена в рамках формализма круговых кумулянтов. Для систем типа ОА данный формализм позволяет получать точные уравнения динамики параметров порядка. Получено более общее частное решение, чем решение Отта–Антонсена: новое решение позволяет описывать динамику двухгрупповых состояний ансамбля в конечной окрестности решения ОА (являющегося одногрупповым). Доказано, что решение ОА нейтрально устойчиво для идентичных ансамблей и устойчиво при введении неидентичности.

В системе двух симметричных связанных ансамблей осцилляторов Курамото–Сакагучи (“задаче Абрамса” [103, 105]) полученное решение позволяет наблюдать консервативную динамику многогрупповых состояний для ансамблей идентичных элементов и описывать переход многогрупповых состояний к одногрупповым, которые становятся притягивающими при неидеальной идентичности. Подход круговых кумулянтов потенциально может быть использован для разработки теории возмущений для других ситуаций, когда условия применимости теории ОА слабо нарушены.

## Глава 3. Обобщение теории Отта–Антонсена на системы с внутренним шумом

В данной главе исследуем системы фазовых осцилляторов с внутренним шумом. Изучим возможность построения теории возмущений для теории Отта–Антонсена в терминах круговых кумулянтов. Кумулянтное представление удобно тем, что все старшие кумулянты исчезают на многообразии Отта–Антонсена, что делает их естественными переменными для построения теории возмущений. В частности, в настоящей главе теория возмущений строится для систем с внутренним шумом; при этом интенсивность шума выступает малым параметром [95, 108–110]. Получены замкнутые уравнения динамики параметров порядка, учитывающие первые поправки по интенсивности шума.

Использование подхода продемонстрируем для системы двух симметрично связанных ансамблей осцилляторов Курамото–Сакагучи [82, 97, 98] при различных начальных условиях. Шум ликвидирует консервативность динамики параметров порядка и одnogрупповое решение становится притягивающим (в системах без шума оно нейтрально устойчиво). Траектория системы стремится к предельному циклу. Таким образом, шум оказывает стабилизирующее воздействие на макроскопическую динамику данной системы [1].

В разделе 3.3 изучим устойчивость оборванных кумулянтных разложений при численном счете. Кумулянтные цепочки бесконечны и для ряда задач их обрывание может привести к численной неустойчивости. Рассмотрим несколько способов подавления неустойчивости: с помощью введение искусственной диссипации и путем подавления слагаемых, ответственных за неустойчивость.

В разделе 3.4 получим уравнения стохастической динамики фазы колебаний течения при случайной флуктуации внешних температурных условий для термоконцентрационной конвекции в пористой среде (глава 1). В рамках этих фазовых уравнений исследуем проблему степени синхронности колебаний кон-

вективных течений в связанных ячейках с использованием круговых кумулянтов.

В разделе 3.5 строится маломодовое макроскопическое описание динамики ансамблей фазовых элементов, подверженных действию внутреннего негауссова дельта-коррелированного шума в терминах круговых кумулянтов. Для дельта-коррелированных шумов, в силу центральной предельной теоремы, любой негауссов шум сведется к  $\alpha$ -устойчивым шумам при предельном переходе от дискретного времени к непрерывному, что диктует интерес к системам именно такого типа. В этом разделе рассматривается случай шума, определяемого знакосимметричным устойчивым распределением.

### 3.1. Обобщение кумулянтного подхода на случай внутреннего шума

Рассмотрим системы с внутренним шумом, для этого добавим к уравнению (62) еще одно слагаемое:

$$\dot{\varphi}_k = \Omega(t) + \text{Im}(2h(t) e^{-i\varphi_k}) + \sigma \xi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (106)$$

где  $\xi_k$  — независимые белые гауссовы шумы:  $\langle \xi_k(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_k(t) \xi_m(t') \rangle = 2\delta_{km} \delta(t - t')$ . В большинстве приложений  $h(t)$  зависит от фаз из-за связи через среднее поле, но для развития теории целесообразно пока не конкретизировать эту функцию. Уравнение Фоккера–Планка, определяющее эволюцию плотности вероятности  $w(\varphi, t)$ , примет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( (\Omega(t) - ih(t)e^{-i\varphi} + ih^*(t)e^{i\varphi}) w \right) - \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0;$$

в терминах комплексных мод  $a_j$  (см. уравнение (64))

$$\dot{a}_j = ji\Omega a_j + jha_{j-1} - jh^* a_{j+1} - \sigma^2 j^2 a_j. \quad (107)$$

Уравнение (107) для параметров порядка принимает вид:

$$\dot{Z}_j = ji\Omega Z_j + jhZ_{j-1} - jh^* Z_{j+1} - \sigma^2 j^2 Z_j. \quad (108)$$

Для  $\sigma = 0$  это уравнение подчиняется теориям Отта–Антонсена и Ватанабэ–Строгаца. Наша задача изучить возможность построения теории возмущений для теории ОА для малых ненулевых  $\sigma$ . Подобно случаю при нулевом внутреннем шуме (74), уравнение (108) может быть обобщено на случай неидентичных осцилляторов с лоренцевым распределением частот  $\Omega$ :

$$\dot{Z}_j = j(i\Omega_0 - \gamma)Z_j + jhZ_{j-1} - jh^*Z_{j+1} - \sigma^2 j^2 Z_j. \quad (109)$$

По причинам, изложенным в разделе (), целесообразно перейти к кумулянтному представлению. Связь между  $Z_j$  и  $\varkappa_j$  определяется посредством производящих функций как и ранее, но вместо уравнений (79), (80) получаем:

$$\dot{F} = (i\Omega_0 - \gamma)k \frac{\partial}{\partial k} F + hkF - h^*k \frac{\partial^2}{\partial k^2} F - \sigma^2 k \frac{\partial}{\partial k} \left( k \frac{\partial}{\partial k} F \right), \quad (110)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} = (i\Omega_0 - \gamma)k \partial_k \Psi + hk - h^*k \partial_k \left( k \partial_k \left( \frac{\Psi}{k} \right) + \frac{\Psi^2}{k} \right) - \\ - \sigma^2 k \partial_k (k \partial_k \Psi + \Psi^2). \end{aligned} \quad (111)$$

Тогда уравнение для  $\varkappa_j$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}_j = j(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_j + h\delta_{j1} - h^*(j^2 \varkappa_{j+1} + j \sum_{m=0}^{j-1} \varkappa_{j-m} \varkappa_{m+1}) - \\ - \sigma^2 (j^2 \varkappa_j + j \sum_{m=0}^{j-2} \varkappa_{j-1-m} \varkappa_{m+1}). \end{aligned} \quad (112)$$

Для исчезающего шума, как правило, все кумулянты отличны от нуля. Однако для слабых шумов можно ожидать, что кумулянты старшего порядка будут малы. Для установления иерархии малых величин перепишем уравнения для  $\varkappa_2$  и  $\varkappa_3$  в явном виде:

$$\dot{\varkappa}_2 = 2(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_2 - 4h^* \varkappa_3 - 2h^* \varkappa_1 \varkappa_2 - 4\sigma^2 \varkappa_2 - 2\sigma^2 \varkappa_1, \quad (113)$$

$$\dot{\varkappa}_3 = 3(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_3 - 9h^* \varkappa_4 - h^*[6\varkappa_1 \varkappa_3 + 3\varkappa_2^2] - 9\sigma^2 \varkappa_3 - 6\sigma^2 \varkappa_1 \varkappa_2. \quad (114)$$

В уравнении (113) присутствуют слагаемые порядка  $\sim \varkappa_2$  и неоднородные слагаемые  $\sim \varkappa_3$  и  $\sim \sigma^2 \varkappa_1$ . Если предположить, что кумулянты более высокого

порядка меньше, чем кумулянты более низкого порядка, то слагаемое  $\sim \sigma^2 \varkappa_1$  будет определять кумулянт  $\varkappa_2$ , то есть  $\varkappa_2 \sim \sigma^2 \varkappa_1$ . В уравнении (114) неоднородные слагаемые  $\sim \varkappa_2^2$  и  $\sim \sigma^2 \varkappa_1 \varkappa_2$ , оба имеют порядок  $\sim \sigma^4$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что третий кумулянт имеет порядок величины  $\sigma^4$ . Анализ полной системы (112) показывает, что предположение  $|\varkappa_j| \sim \sigma^{2(j-1)}$  соответствует динамике всех  $\varkappa_m$ .

Запишем два первых уравнения бесконечной цепочки (112):

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}_1 &= (i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_1 + h - h^* \varkappa_2 - h^* \varkappa_1^2 - \sigma^2 \varkappa_1, \\ \dot{\varkappa}_2 &= 2(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_2 - 4h^*(\varkappa_3 + \varkappa_1 \varkappa_2) - \sigma^2(4\varkappa_2 + 2\sigma^2 \varkappa_1^2). \end{aligned} \quad (115)$$

Будем использовать простейшее приближение, при котором все кумулянты выше второго предполагаются равными нулю [67]. Как следует из приведенного выше обсуждения, это приближение имеет порядок точности  $O(\sigma^4)$ . В результате мы получаем замкнутую систему уравнений для первого и второго кумулянтов. Для простоты дальнейших обозначений мы опускаем индекс у  $Z_1$  ( $\varkappa_1 = Z_1$ ) и обозначим  $\kappa = \varkappa_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= (i\Omega_0 - \gamma)Z + h - h^* Z^2 - \sigma^2 Z - h^* \kappa, \\ \dot{\kappa} &= 2(i\Omega_0 - \gamma)\kappa - 4h^* Z\kappa - \sigma^2(4\kappa + 2Z^2). \end{aligned} \quad (116)$$

### 3.2. Иерархически связанные ансамбли Курамото–Сакагучи (система Абрамса) с внутренним шумом

Рассмотрим в качестве примера динамику двух симметричных связанных ансамблей осцилляторов Курамото–Сакагучи [82, 97, 98]:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_k &= \Omega_k + \frac{\mu}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\varphi_l - \varphi_k - \alpha) + \frac{\nu}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\psi_l - \varphi_k - \alpha) + \sigma \zeta_k(t), \\ \dot{\psi}_k &= \Omega_k + \frac{\mu}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\psi_l - \psi_k - \alpha) + \frac{\nu}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\varphi_l - \psi_k - \alpha) + \sigma \xi_k(t). \end{aligned} \quad (117)$$

Здесь  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  — фазы в ансамблях размера  $N$ ,  $\mu$  и  $\nu = 1 - \mu$  — параметры связи внутри ансамбля и с другим ансамблем соответственно,  $\alpha$  — фазовый сдвиг свя-

зи,  $\xi_k, \zeta_k(t)$  – независимые белые гауссовы шумы:  $\langle \xi_k(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_k(t) \xi_m(t') \rangle = 2\delta_{km}\delta(t - t')$ ,  $\langle \zeta_k(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \zeta_k(t) \zeta_m(t') \rangle = 2\delta_{km}\delta(t - t')$ ,  $\langle \zeta_k(t) \xi_m(t') \rangle = 0$ . Бифуркационный анализ для притягивающих режимов в системе (117) при  $\sigma = 0$ , выполненный в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  в рамках уравнения (108), можно найти в [103, 111].

Применим к системе (117) кумулянтный подход. При наличии шума обе популяции оказываются в состоянии частичной синхронизации. Таким образом, нам нужно написать систему из двух уравнений типа (116) для двух параметров порядка  $Z, Y$  и для двух соответствующих вторых кумулянтов  $\kappa, \chi$ :

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= (i\Omega_0 - \gamma)Z + h_1 - h_1^*Z^2 - \sigma^2Z - h_1^*\kappa, \\ \dot{\kappa} &= 2(i\Omega_0 - \gamma)\kappa - 4h_1^*Z\kappa - \sigma^2(4\kappa + 2Z^2), \\ \dot{Y} &= (i\Omega_0 - \gamma)Y + h_2 - h_2^*Y^2 - \sigma^2Y - h_2^*\chi, \\ \dot{\chi} &= 2(i\Omega_0 - \gamma)\chi - 4h_2^*Y\chi - \sigma^2(4\chi + 2Y^2),\end{aligned}$$

где  $h_1 = (\mu Z + \nu Y)e^{-i\alpha}/2$ ,  $h_2 = (\mu Y + \nu Z)e^{-i\alpha}/2$ .

Сравнивая рис. 15, 16 с рис. 18, 19, можно заметить, что внутренний шум ликвидирует консервативность динамики параметров порядка и однопольное решение становится притягивающим (при  $\sigma = 0$  оно нейтрально устойчиво). Траектория системы стремится к предельному циклу. Шум оказывает стабилизирующее воздействие на динамику системы [1]. По мере увеличения  $\sigma$  предельный цикл сжимается. На рис. 20 приведены примеры притягивающих циклов при разных  $\sigma$ .

### 3.3. Устойчивость кумулянтного обрывания

#### 3.3.1. Введение искусственной диссипации

Рассмотрим вопрос об использовании цепочки уравнений (112) для численного счета [6]. Обрывание цепочки кумулянтов для ряда задач может приводить к численной неустойчивости. Введем в исходные уравнения дополнитель-

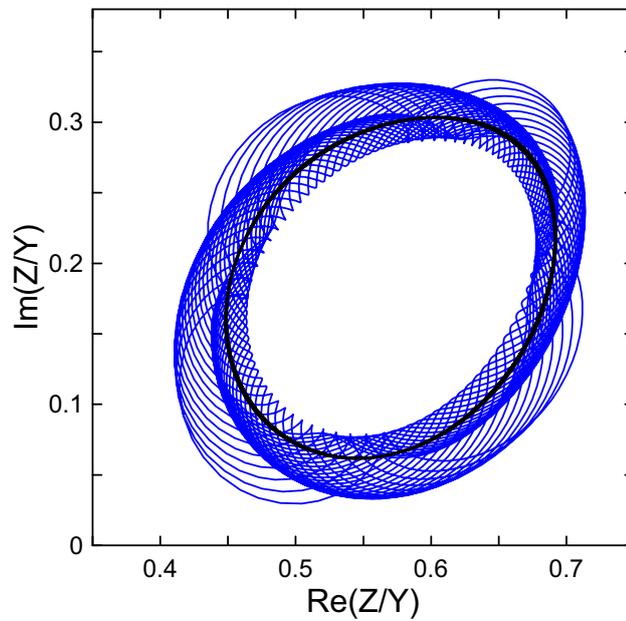


Рис. 18: Двухгрупповые режимы химеры являются переходными при внутреннем шуме  $\sigma = 0.01$ ,  $\gamma = 0$  (синие линии), черная линия — устойчивый предельный цикл. Значения параметров:  $\mu = 0.65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0.15$ ,  $\varkappa_1^{\{1,2\}} = (0.8 \pm 0.1)e^{i(0.3 \pm 0.15)}$ .

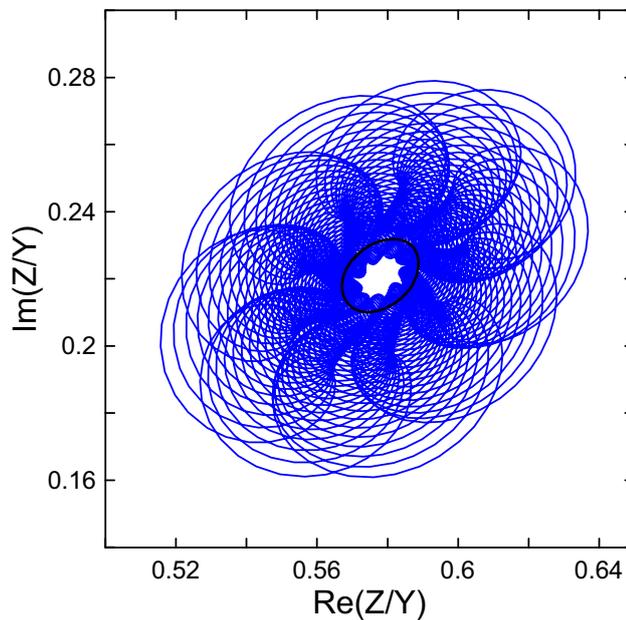


Рис. 19: Двухгрупповые режимы химеры с внутренним шумом  $\sigma = 0.01$ ,  $\gamma = 0$  изображены синими линиями, черная линия — устойчивый предельный цикл. Значения параметров:  $\mu = 0.65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0.17$ ,  $\varkappa_1^{\{1,2\}} = (0.7 \pm 0.1)e^{i(0.4 \pm 0.2)}$ .

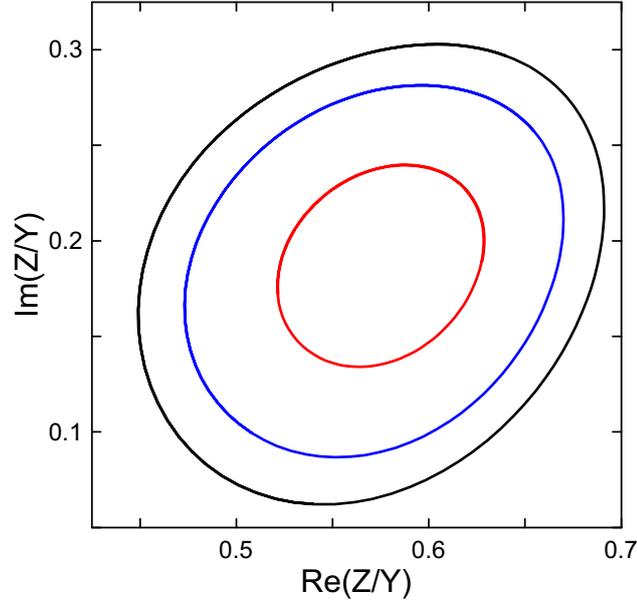


Рис. 20: Устойчивые предельные циклы при  $\gamma = 0$  при разной интенсивности внутреннего шума: черная кривая —  $\sigma = 0.01$ , синяя кривая —  $\sigma = 0.02$ , красная кривая —  $\sigma = 0.03$ . Значения параметров:  $\mu = 0.65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0.15$ ,  $\varkappa_1^{\{1,2\}} = (0.8 \pm 0.1)e^{i(0.3 \pm 0.15)}$ .

ное слагаемое, которое могло бы позволить стабилизировать численный счет без существенного искажения решений:

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}_j = & j(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_j + h\delta_{j1} - h^*(j^2\varkappa_{j+1} + j \sum_{m=1}^j \varkappa_{j-m+1}\varkappa_m) - \\ & - \sigma^2(j^2\varkappa_j + j \sum_{m=1}^{j-1} \varkappa_{j-m}\varkappa_m) - G(\gamma + \sigma^2)(j-1)(j-2)2^j\varkappa_j. \end{aligned} \quad (118)$$

Такой вид стабилизирующего слагаемого выбран из следующих соображений:

- $G$ -слагаемое вносит в систему диссипацию, которой в исходной системе нет при  $\gamma = \sigma = 0$ . Для того чтобы стабилизирующее слагаемое не вызывало качественных изменений динамики, оно уменьшается по мере уменьшения  $\gamma$  и  $\sigma$ .
- Поскольку стабилизирующее слагаемое должно быть существенно именно для старших кумулянтов, то есть расти с  $j$  существенно быстрее, чем  $\sigma^2 j^2 \varkappa_j$ -слагаемое, выбран вид  $\sim j^2 s^j \varkappa_j$ . Так как счет с одним первыми или первыми двумя кумулянтами всегда устойчив, целесообразно заменить  $j^2$ -множитель на  $(j-1)(j-2)$ . Анализ показал, что оптимальным является выбор  $s = 2$ .

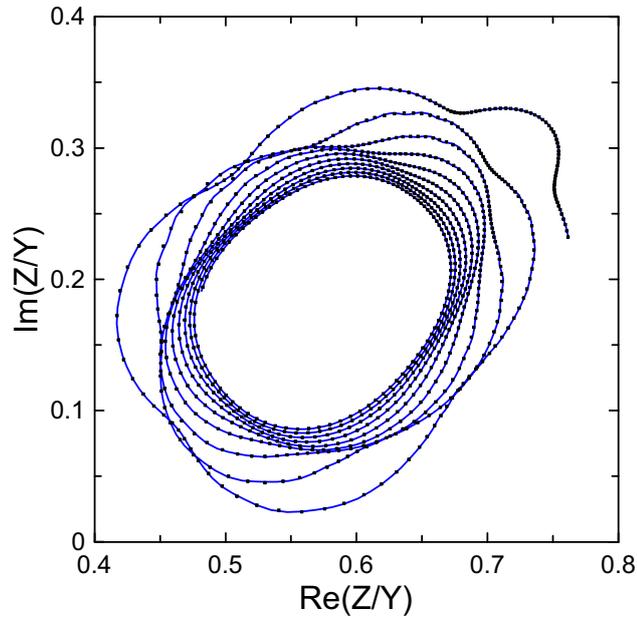


Рис. 21: Траектория системы при  $\mu = 0.65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0.15$ ,  $\varkappa_1^{\{1,2\}} = (0.8 \pm 0.05)e^{i(0.3 \pm 0.1)}$ ,  $\gamma = 0.001$ . Черные символы — результат точного интегрирования, синяя кривая — результат численного интегрирования уравнений (118). Используется 15 первых кумулянтов.

Рассмотрим пример, когда состояние первой подсистемы является одногрупповым, а второй — двухгрупповым; при этом осцилляторы равномерно распределены между двумя группами, то есть  $q_1 = q_2 = 0.5$ . Тестирование с равномерно распределенным случаем  $q_1 = q_2 = 0.5$  важно, так как в этом случае интегрирование модифицированной системы уравнений может быть выполнено точно без численной неустойчивости (все нечетные кумулянты, кроме первого, обращаются в ноль, динамика всех четных подобна динамике второго). И полученные результаты численного интегрирования с членами стабилизации можно сверить с численными решениями для неизменной системы. Траектория системы представлена на рис. 21.

Коэффициент  $G$  выбирается на основе результатов численного расчета, представленных на рис. 22. На графике построены кривые критического значения  $G$ , выше которых численный счет устойчив. Выбор значений  $G$ , умеренно превышающих критическое значение, позволяет достичь компромисса: расчеты

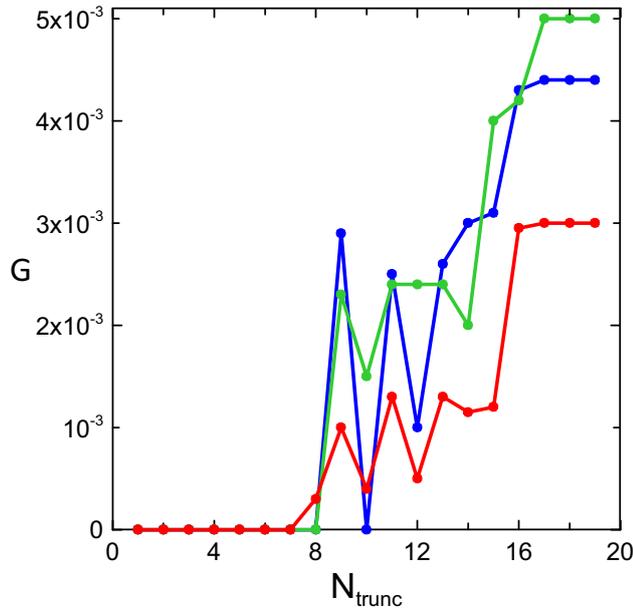


Рис. 22: Зависимость критического значения коэффициента  $G$  от количества кумулянтов  $N_{trunc}$  при  $\gamma = 0.001$ . Синяя кривая —  $\sigma = 0$ ,  $q_1 = q_2 = 0.5$ ; красная кривая —  $\sigma = 0.01$ ,  $q_1 = q_2 = 0.5$ ; зеленая кривая —  $\sigma = 0$ ,  $q_1 = 0.4$ ,  $q_2 = 0.6$ .

свободны от численной неустойчивости, а траектория системы практически не зависит от стабилизирующего члена.

На рис. 23 представлены зависимости кумулянтов  $\varkappa_n$  от времени  $t$  для подкритических и надкритических значений параметра  $G$ . Когда  $G$  выбирается ниже границы, решение теряет регулярность и расходится за конечное время. Когда  $G$  выбирается выше границы, формируется регулярное решение, быстрые флуктуации кумулянтов со временем затухают. Можно видеть формирование иерархии малости кумулянтов, как было предсказано теоретически в предыдущем разделе и работах [1, 67].

Лучше всего выбирать количество кумулянтов, не превышающее 20, и расстояние между двумя группами во второй подсистеме выбирать сравнительно небольшим. При использовании более 20 кумулянтов, требующееся для стабилизации численного счета значение  $G$  начинает очень быстро нарастать с числом кумулянтов: стабилизирующее слагаемое начинает существенно искажать истинную динамику системы.

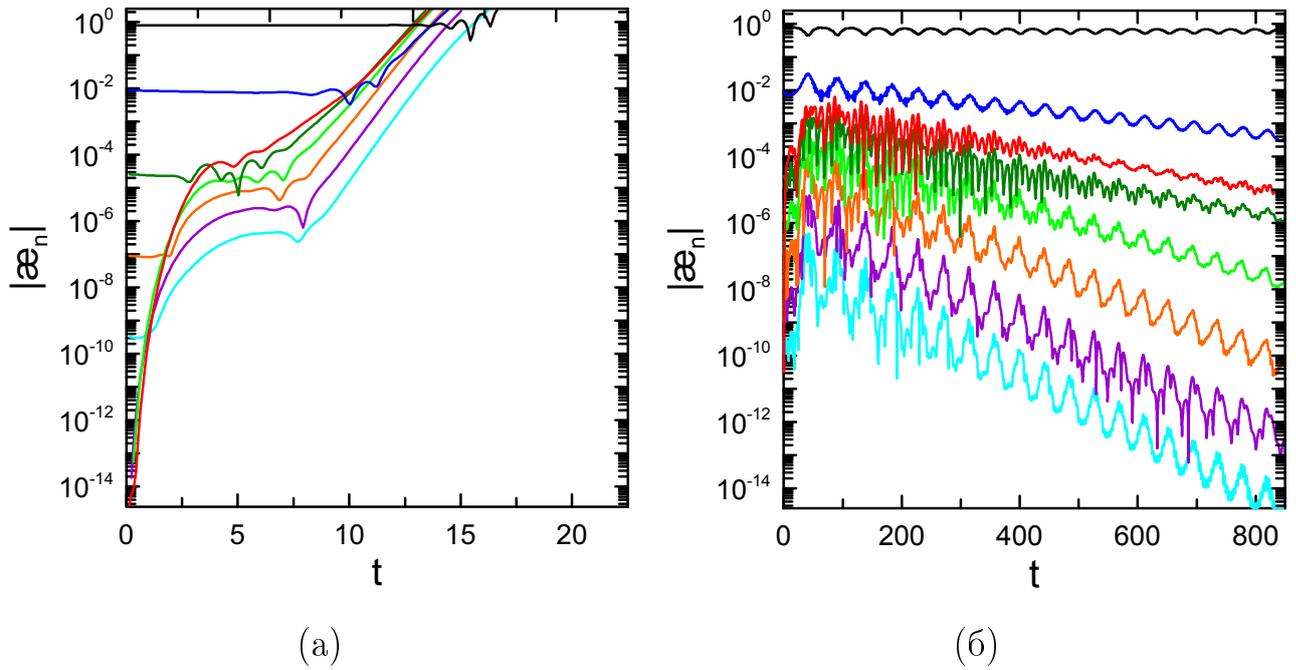


Рис. 23: Зависимости кумулянтов  $\varkappa_n$  от времени  $t$  (сверху вниз по порядку от  $\varkappa_1$  до  $\varkappa_8$ ). (а) Параметр  $G$  выбирается ниже границы устойчивости метода (см. рис. 22). (б) Параметр  $G$  выбирается выше границы устойчивости метода.

Рассмотрим случай с шумом  $\sigma = 0.01$ . Во второй подсистеме осцилляторы также равномерно распределены между двумя группами, то есть  $q_1 = q_2 = 0.5$ . Критическое значение коэффициента  $G$  для случая с шумом (красная кривая на рис. 22) находится ниже, чем для случая без шума (синяя кривая). На рис. 24а приведены примеры траекторий системы. Можно заметить, что траектория при пограничном значении  $G$  хоть и существенно возмущена флуктуациями, со временем не расходится с траекторией, рассчитанной при больших значениях  $G$ , когда вычислительные флуктуации подавлены. Система с шумом требует меньших значений коэффициента  $G$ , т.к. шум оказывает стабилизирующее действие.

В виду того, что специфика равномерно распределенных решений также может влиять на их свойства численной устойчивости. Требуется дополнительное рассмотрение случая неравного распределения осцилляторов между двумя группами, то есть  $q_1 = 0.4$  и  $q_2 = 0.6$  при  $\sigma = 0$ . Из рис. 22 можно заметить, что характерные критические значения  $G$  для симметричных и асимметричных распределений между двумя группами близки.

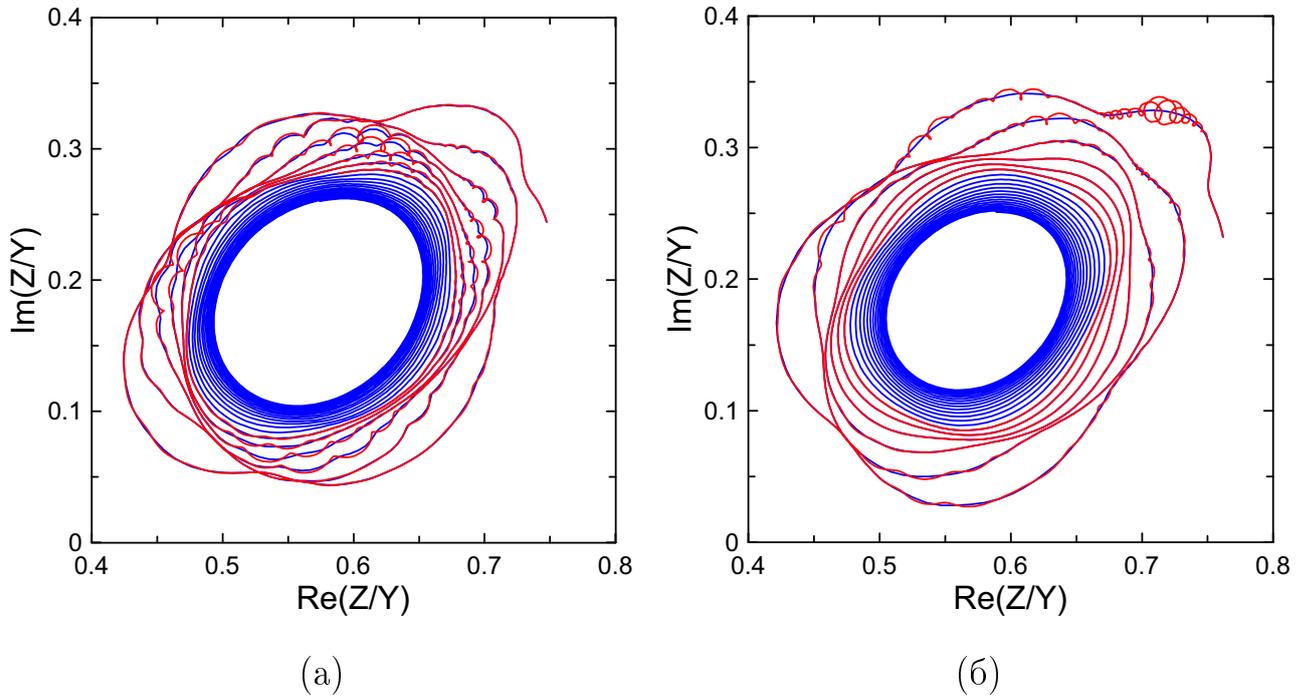


Рис. 24: Траектория системы для разных значений  $G$ . Синяя кривая —  $G = 0.01$ , для красной кривой  $G$  выбирается на границе устойчивости. Используется 15 кумулянтов. (а) Параметры системы:  $q_1 = q_2 = 0.5$ ,  $\sigma = 0.01$ . (б) Параметры системы:  $q_1 = 0.4$ ,  $q_2 = 0.6$ ,  $\sigma = 0.01$

Из приведенного графика границы устойчивости численного счета (рис. 22) можно сделать вывод, что при используемых начальных условиях стабилизирующее слагаемое не требуется, если для численного счета использовать менее 8 кумулянтов. Если использовать для счета большее число кумулянтов, то требуется вводить стабилизирующее слагаемое [6].

Эффективность процедуры стабилизации зависит от начальных условий:

$$\varkappa_1^{1,2} = (R \pm \delta R)e^{i(\phi \pm \delta \phi)}.$$

Для начальных условий расстояние по амплитуде и фазе параметра порядка  $(\delta R, \delta \phi)$  между двумя группами должны быть небольшими, иначе подавление неустойчивости численного счета оказывается невозможным (моделирование с двумя первыми кумулянтами всегда устойчиво). В этих ситуациях необходимое значение коэффициента  $G$  становится слишком большим, что может привести к искажению естественной динамики системы. На рис. 25 представлена зави-

симось критического значения  $G$  от фазы  $\delta\phi$  при фиксированном расстоянии по амплитуде между двумя группами. Представлен случай, когда  $\sigma = 0.01$  и во второй подсистеме осцилляторы распределены неравномерно между двумя группами, то есть  $q_1 = 0.4$  и  $q_2 = 0.6$ .

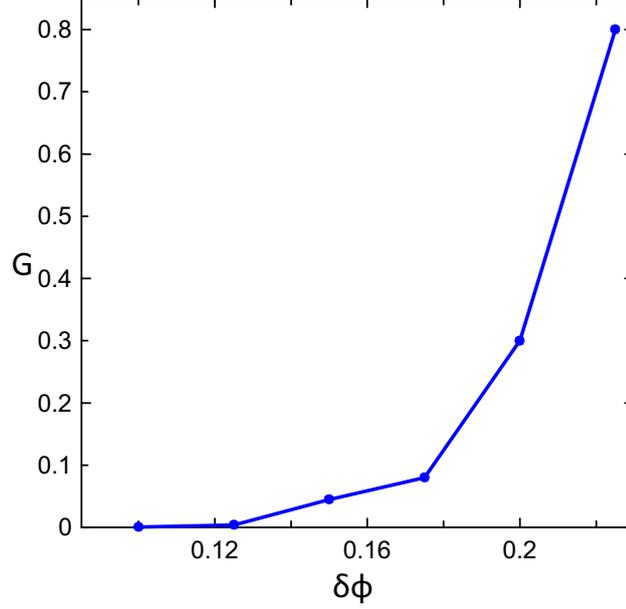


Рис. 25: Зависимость критического значения коэффициента  $G$  от разницы фаз  $\delta\phi$  для  $\mu = 0.65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0.15$ ,  $\delta R = 0.05$ ,  $R = 0.8$ ,  $\phi = 0.3$ ,  $\gamma = 0.001$ ,  $\sigma = 0.01$ . Используется 12 кумулянтов.

### 3.3.2. Подавление слагаемых, ответственных за неустойчивость

Рассмотрим второй способ подавления неустойчивости: изменим одно из слагаемых исходной бесконечной цепочки уравнений (112), добавив экспоненциально затухающий множитель:

$$\dot{\varkappa}_j = j(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_j + h\delta_{j1} - h^*(j^2\varkappa_{j+1}e^{-\lambda(j-1)} + j \sum_{m=1}^j \varkappa_{j-m+1}\varkappa_m) - \sigma^2(j^2\varkappa_j + j \sum_{m=1}^{j-1} \varkappa_{j-m}\varkappa_m). \quad (119)$$

Такое изменение выбрано из следующих соображений:

- Численная неустойчивость связана с  $\varkappa_{j+1}$ -слагаемым в  $\dot{\varkappa}_j$ . Делаем так, чтобы

для больших  $j$  оно исчезло, а при малых  $j$  было неизменно, то есть несущественно искажало истинную динамику системы.

Рассмотрим такую стабилизацию на тех же примерах, что и выше. Состояние первой подсистемы является одногрупповым, второй — двухгрупповым:

- 1) Осцилляторы равномерно распределены между двумя группами, то есть  $q_1 = q_2 = 0.5$ , при этом  $\sigma = 0$ . В этом случае вычисления можно производить точно благодаря тому, что все нечетные кумулянты, кроме первого, обращаются в ноль.
- 2) Осцилляторы равномерно распределены между двумя группами, то есть  $q_1 = q_2 = 0.5$ , но в систему добавляется шум  $\sigma = 0.01$ .
- 3) Осцилляторы между двумя группами распределены неравномерно, то есть  $q_1 = 0.4$  и  $q_2 = 0.6$ , при этом  $\sigma = 0$ .

Зависимость коэффициента в показателе экспоненты  $\lambda$  от числа кумулянтов  $N_{trunc}$  представлена на рис. 26. Начальные условия такие же, как и в предыдущем случае стабилизации.

Также построим зависимость коэффициента  $\lambda$  от разности фаз  $\delta\phi$  при фиксированной разности амплитуд параметров порядка между двумя группами. На рис. 27 представлен случай, когда  $\sigma = 0.01$  и во второй подсистеме осцилляторы распределены неравномерно между двумя группами, то есть  $q_1 = 0.4$  и  $q_2 = 0.6$ .

Как и для предыдущего метода подавления неустойчивости, из графиков зависимости коэффициента  $\lambda$  от количества кумулянтов  $N_{trunc}$  можно сделать вывод, что для стабилизации численного счета желательно брать не более 20 кумулянтов. Так же можно заметить, что при использовании менее 8 кумулянтов стабилизирующие поправки можно не использовать. Как и ранее, эффективность процедуры стабилизации зависит от выбора начальных условий: для двухгрупповых начальных условий расстояние по амплитуде и фазе между двумя группами должны быть небольшими, иначе невозможно будет подавить неустойчивость.

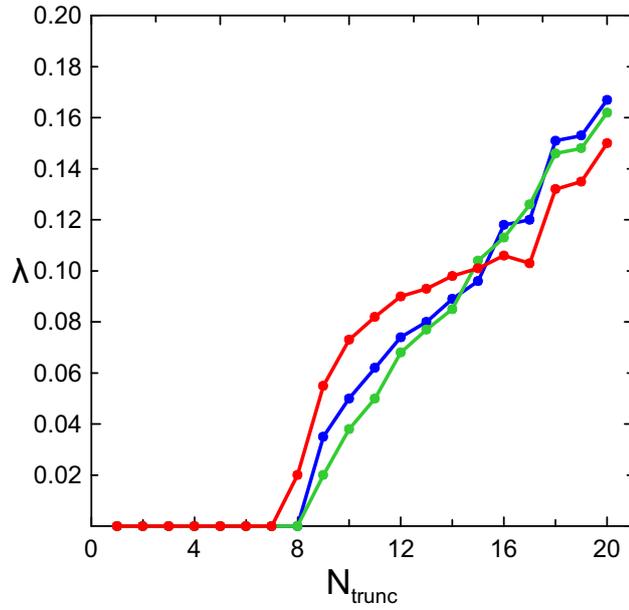


Рис. 26: Зависимость критического значения коэффициента в показателе экспоненты  $\lambda$  от количества кумулянтов  $N_{trunc}$  при  $\gamma = 0.001$ . Синяя кривая —  $\sigma = 0$ ,  $q_1 = q_2 = 0.5$ ; красная кривая —  $\sigma = 0.01$ ,  $q_1 = q_2 = 0.5$ ; зеленая кривая —  $\sigma = 0$ ,  $q_1 = 0.4$ ,  $q_2 = 0.6$ .

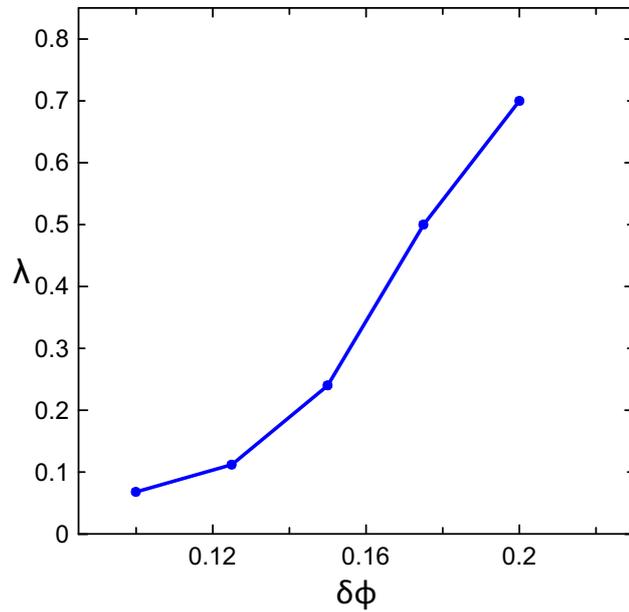


Рис. 27: Зависимость критического значения коэффициента в показателе экспоненты  $\lambda$  от разницы фаз  $\delta\phi$  для  $\mu = 0.65$ ,  $\alpha = \pi/2 - 0.15$ ,  $\delta R = 0.05$ ,  $R = 0.8$ ,  $\phi = 0.3$ ,  $\gamma = 0.001$ ,  $\sigma = 0.01$ . Используется 12 кумулянтов.

### 3.4. Влияние шума на синхронность колебаний конвективных течений

В задаче о колебательных режимах термоконцентрационной конвекции, рассмотренной в главе 1, может быть учтено влияние случайных флуктуаций внешних условий — шума. Основным естественным источником случайных флуктуаций является нестационарность внешних температурных условий, поскольку непроницаемость границ для течения и примеси является более точным граничным условием, чем фиксированность вертикального теплового потока и теплоизолированность боковых границ. Опишем интегральную по поперечной координате  $y$  флуктуирующую компоненту притока тепла в ячейку  $j$  распределенным безразмерным притоком тепла на единицу площади плоскости  $(x, z)$  полем  $q_{\vartheta j}(x, z, t)$ . Тогда в полные нелинейные уравнения (14) для первой ячейки к слагаемому тепловой связи между ячейками следует добавить очевидное слагаемое  $\widehat{Q}\{0, q_{\vartheta 1}(x, z, t)\}^T$ , где “T” обозначает транспонирование. Отметим, что посредством  $q_{\vartheta 1}(x, z, t)$  можно описать не только теплопередачу через боковые границы, но и флуктуации потока тепла через горизонтальные границы: последние дают в  $q_{\vartheta 1}(x, z, t)$  вклады вида  $\sim \delta(z)$  и/или  $\sim \delta(z - 1)$ .

Следовательно, в правую часть уравнения медленной динамики амплитуды возмущения (24) следует добавить

$$\langle \Psi_{\omega}^+ | \widehat{Q} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \langle e^{-i\omega_0 t_0} q_{\vartheta 1}^{(3)}(x, z, t) \rangle_{t_0} \end{array} \right\},$$

где  $\langle \dots \rangle_{t_0}$  обозначает осреднение по времени  $t_0$ , а в окончательном амплитудном уравнении (26), как показано ниже, появится эффективное шумовое слагаемое

$$+ \sigma (\xi_{re,1}(t) + i\xi_{im,1}(t)),$$

где  $\xi_{re,1}(t)$  и  $\xi_{im,1}(t)$  — независимые нормированные дельта-коррелированные гауссовы шумы:  $\langle \xi_{re,1}(t) \rangle = \langle \xi_{im,1}(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_{re,1}(t) \xi_{im,1}(t') \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_{re,1}(t) \xi_{re,1}(t') \rangle = \langle \xi_{im,1}(t) \xi_{im,1}(t') \rangle = 2\delta(t-t')$ . Отметим, что идеализация дельта-коррелированного

шума в амплитудном уравнении уместна и при конечных, но коротких временах корреляций, поскольку в “медленном” времени  $t_2$  эти времена корреляций будут еще меньше. Амплитуда  $\sigma$  по-разному вычисляется для случаев *пространственно регулярного* и *пространственно случайного* притока тепла.

*Пространственно регулярный приток тепла*

$$q_{\vartheta 1}(x, z, t) = \sigma_{\vartheta}(x, z)\xi_1(t), \quad (120)$$

где  $\sigma_{\vartheta}(x, z)$  — детерминированная функция координат,  $\xi_1(t)$  — дельта-коррелированный гауссов шум:  $\langle \xi_1(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_1(t)\xi_1(t') \rangle = 2\delta(t - t')$ . В этом случае сигналы  $\xi_1(t) \cos(\omega_0 t + \beta_q)$  и  $\xi_1(t) \sin(\omega_0 t + \beta_q)$  при любом значении  $\beta_q$  можно представить независимыми эффективными шумами  $\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_{re,1}(t)$  и  $\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_{im,1}(t)$  соответственно. В самом деле, для статистически стационарного шума имеет место эргодичность: среднее по времени эквивалентно среднему по реализациям шума — следовательно,  $\langle \xi_1(t) \cos(\omega_0 t + \beta_q)\xi_1(t + \tau) \cos(\omega_0(t + \tau) + \beta_q) \rangle_{\xi_1} = \langle \langle \xi_1(t)\xi_1(t + \tau) \rangle_{\xi_1} \cos(\omega_0 t + \beta_q) \cos(\omega_0(t + \tau) + \beta_q) \rangle_t = \langle 2\delta(\tau) \cos(\omega_0 t + \beta_q) \cos(\omega_0(t + \tau) + \beta_q) \rangle_t = 2\delta(\tau) \langle \cos^2(\omega_0 t + \beta_q) \rangle_t = \delta(\tau)$ , аналогично для второго сигнала, а перекрестная корреляционная функция  $\langle \xi_1(t) \cos(\omega_0 t + \beta_q)\xi_1(t + \tau) \sin(\omega_0(t + \tau) + \beta_q) \rangle_{\xi_1} = 2\delta(\tau) \langle \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t + 2\beta_q) \rangle_t = 0$ . Таким образом, первый и второй сигналы являются статистически независимыми, дельта-коррелированными, имеют половинную интенсивность по сравнению с  $\xi_1(t)$  и, в силу линейности по  $\xi_1(t)$ , остаются гауссовыми случайными величинами. Альтернативный строгий вывод того, как на масштабе времени большом по сравнению с периодом  $2\pi/\omega_0$  сигнал  $e^{-i\omega_0 t}\xi_1(t)$  порождает два эффективных статистически независимых дельта-коррелированных сигнала, может быть проведен на основании уравнения Фоккера–Планка с применением метода усреднения Крылова–Боголюбова [32, 33] и дает эквивалентные результаты (раздел 3.1 в работе [99]).

Для амплитуды эффективного шума, подставляя (16) и (20) с (25) и исполь-

зую (11), находим

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\langle \Psi_\omega^+ | \widehat{Q} \{0, \sigma_\vartheta(x, z)\}^T}{\langle \Psi_\omega^+ | \Psi_\omega \rangle} \right| = \\ &= \frac{k^2}{\sqrt{2}\omega_0} \left| 1 + \frac{b(S - \frac{i\omega_0}{k^2})}{b - S(b - 1)} \right| \left| \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz \sigma_\vartheta(x, z) \cos kx \right|. \quad (121)\end{aligned}$$

Для жидкостей  $S \ll 1$  и

$$\sigma \approx \frac{1}{\sqrt{2N}} \left| \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz \sigma_\vartheta(x, z) \cos kx \right|; \quad (122)$$

для газов  $1 \ll S < b$  и

$$\sigma \approx \frac{1}{\sqrt{2S}} \left| \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz \sigma_\vartheta(x, z) \cos kx \right|. \quad (123)$$

*Пространственно случайный приток тепла*  $q_{\vartheta 1}(x, z, t)$  следует характеризовать пространственно-временной автокорреляционной функцией

$$\langle q_{\vartheta 1}(x, z, t) q_{\vartheta 1}(x + r_x, z + r_z, t') \rangle = 2C_q(r) \delta(t - t'), \quad (124)$$

здесь рассмотрение ограничивается случаем пространственно однородного и изотропного шума,  $r = \sqrt{r_x^2 + r_z^2}$ . Аналогично предыдущему случаю, можно показать, что на “медленном” масштабе времени  $\cos \omega_0 t q_{\vartheta 1}(x, z, t)$  и  $\sin \omega_0 t q_{\vartheta 1}(x, z, t)$  представимы парой статистически независимых шумов  $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{re,1}(x, z, t)$  и  $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{im,1}(x, z, t)$  с теми же автокорреляционными свойствами, как  $q_{\vartheta 1}$ , но половинной интенсивностью. Шумовое слагаемое, которое следует добавить в (26), представимо парой эффективных статистически независимых шумов  $\xi_{re,1}(t)$  и  $\xi_{im,1}(t)$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle \Psi_\omega^+ | \widehat{Q} \{0, q_{re,1}(x, z, t) + i q_{im,1}(x, z, t)\}^T}{\langle \Psi_\omega^+ | \Psi_\omega \rangle} = \sigma (\xi_{re,1}(t) + i \xi_{im,1}(t)),$$

где амплитуда  $\sigma$  и свойства  $\xi_{re/im,1}(t)$  могут быть определены из автокорреляционной функции этого слагаемого, которая может быть вычислена для левой

и правой частей последнего равенства:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\langle \Psi_\omega^+ | \widehat{Q}\{0, q_{re,1}(x, z, t)\}^T \rangle}{\langle \Psi_\omega^+ | \Psi_\omega \rangle} \right)^* \frac{\langle \Psi_\omega^+ | \widehat{Q}\{0, q_{re,1}(x, z, t + \tau)\}^T \rangle}{\langle \Psi_\omega^+ | \Psi_\omega \rangle} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\langle \Psi_\omega^+ | \widehat{Q}\{0, q_{im,1}(x, z, t)\}^T \rangle}{\langle \Psi_\omega^+ | \Psi_\omega \rangle} \right)^* \frac{\langle \Psi_\omega^+ | \widehat{Q}\{0, q_{im,1}(x, z, t + \tau)\}^T \rangle}{\langle \Psi_\omega^+ | \Psi_\omega \rangle} \right\rangle_t = \\ & = \sigma^2 (\langle \xi_{re,1}(t) \xi_{re,1}(t + \tau) \rangle + \langle \xi_{im,1}(t) \xi_{im,1}(t + \tau) \rangle). \end{aligned} \quad (125)$$

Подставляя (16) и (20) с (25) и используя (11), подобно предыдущему случаю, получим в левой части (125):

$$\begin{aligned} & \frac{k^4}{\omega_0^2} \left| 1 + \frac{b(S - \frac{i\omega_0}{k^2})}{b - S(b - 1)} \right|^2 \left\langle \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz q_{re,1}(x, z, t) \cos kx \times \right. \\ & \left. \times \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx' \int_0^1 dz' q_{re,1}(x', z', t + \tau) \cos kx' \right\rangle. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение автокорреляционную функцию (124), в пределе малого радиуса корреляций  $r_{\text{corr}} = \frac{\int_0^\infty r |C_q(r)| dr}{\int_0^\infty |C_q(r)| dr} \ll 1$  можно вычислить среднее от интегралов, которое оказывается равно  $2\delta(\tau) \int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr \langle \cos^2 kx \rangle_x$ , и окончательно получить:

$$\frac{k^4}{\omega_0^2} \left| 1 + \frac{b(S - \frac{i\omega_0}{k^2})}{b - S(b - 1)} \right|^2 \delta(\tau) \int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr.$$

Сопоставляя это выражение с правой частью равенства (125), находим  $\langle \xi_{re,1}(t) \xi_{re,1}(t + \tau) \rangle = \langle \xi_{im,1}(t) \xi_{im,1}(t + \tau) \rangle = 2\delta(\tau)$  и

$$\sigma = \frac{k^2}{2\omega_0} \left| 1 + \frac{b(S - \frac{i\omega_0}{k^2})}{b - S(b - 1)} \right| \sqrt{\int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr}. \quad (126)$$

Для жидкостей  $S \ll 1$  и

$$\sigma \approx \frac{1}{2\sqrt{N}} \sqrt{\int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr}; \quad (127)$$

для газов  $1 \ll S < b$  и

$$\sigma \approx \frac{1}{2S} \sqrt{\int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr}. \quad (128)$$

Таким образом, для пары связанных конвективных осцилляторов с шумом получаем стохастическую версию уравнения (26):

$$\frac{dA_1}{dt} = (\lambda_r + i\delta\omega_0)A_1 + K(A_2 - A_1) + C_T A_1 |A_1|^2 + \sigma(\xi_{re,1}(t) + i\xi_{im,1}(t)), \quad (129)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = (\lambda_r + i\delta\omega_0)A_2 + K(A_1 - A_2) + C_T A_2 |A_2|^2 + \sigma(\xi_{re,2}(t) + i\xi_{im,2}(t)). \quad (130)$$

Строгая фазовая редукция для шума с коротким временем корреляций, когда время корреляций сопоставимо или меньше характерного времени затухания амплитудных степеней свободы  $1/\lambda_r$ , должна учитывать конечность  $1/\lambda_r$  [112] и была проведена в [5]. Для уравнений (129) и (130) эта процедура дает стохастическую версию уравнений динамики фазы (46):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Omega_{01} + |K|(\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) - \sin\beta) + \sigma_\varphi \xi_{\varphi 1}(t), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Omega_{02} + |K|(\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) - \sin\beta) + \sigma_\varphi \xi_{\varphi 2}(t), \end{aligned} \quad (131)$$

здесь допускается малая неидентичность параметров осцилляторов  $\Omega_{01} \neq \Omega_{02}$  и интенсивность эффективных независимых дельта-коррелированных шумов  $\sigma_\varphi^2 = \frac{\sigma^2(-\text{Re } C_T)}{\lambda_r} \left[ 1 + \left( \frac{\text{Im } C_T}{\text{Re } C_T} \right)^2 \right]$ , где второе слагаемое в скобках связано с шумом в амплитудной степени свободы. Разность уравнений системы (131) дает замкнутое уравнение для разности фаз  $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ :

$$\frac{d}{dt} \delta\varphi = \Omega_{01} - \Omega_{02} - |K| \cos\beta \sin\delta\varphi + \sigma_{\delta\varphi} \xi_\varphi(t), \quad (132)$$

где нормированный шум  $\xi_\varphi(t) = \frac{\xi_{\varphi 1}(t) - \xi_{\varphi 2}(t)}{\sqrt{2}}$ ,

$$\sigma_{\delta\varphi}^2 = \frac{2\sigma^2(-\text{Re } C_T)}{\lambda_r} \left[ 1 + \left( \frac{\text{Im } C_T}{\text{Re } C_T} \right)^2 \right]. \quad (133)$$

Уравнение (132) эквивалентно уравнению (106) с  $\Omega(t) = \Omega_{01} - \Omega_{02}$ ,  $h(t) = |K| \cos\beta$  и  $\sigma_{\delta\varphi}$  для одного элемента. При наличии шума задача о поведении

распределения плотности вероятности состояний в такой системе имеет физический смысл не только для большого ансамбля, но и для единственного элемента. Комплексные Фурье-коэффициенты распределения  $w(\delta\varphi, t)$ , поведение которых описывается бесконечной цепочкой уравнений (107), здесь имеют следующий смысл:  $a_j = \langle e^{ij\delta\varphi} \rangle$ . В разделе 3.1 для динамики системы получено двухкумулянтное приближение (116), в котором для нашего случая  $\gamma = 0$ ,  $Z = a_1$ ,  $\kappa = a_2 - a_1^2$ . Синхронность осцилляторов можно количественно характеризовать величиной  $\langle \cos \delta\varphi \rangle = \text{Re } Z$ , таким образом задача математически сводится к проблеме вычисления  $Z$ .

Для стационарного распределения  $\dot{Z} = \dot{\kappa} = 0$  и из второго уравнения системы (116) можно выразить

$$\kappa = \frac{\sigma_{\delta\varphi}^2 Z}{i(\Omega_{01} - \Omega_{02}) - 2\sigma_{\delta\varphi}^2 - 2|K| \cos \beta Z}, \quad (134)$$

после чего первое уравнение системы становится кубическим относительно  $Z$ :

$$Z^3 + \frac{3}{2}\mathcal{D}_1 Z^2 - (1 - \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2) Z - \mathcal{D}_2 = 0. \quad (135)$$

$$\mathcal{D}_1 \equiv \frac{\sigma_{\delta\varphi}^2 - i(\Omega_{01} - \Omega_{02})}{|K| \cos \beta}, \quad \mathcal{D}_2 \equiv \frac{\sigma_{\delta\varphi}^2 - i(\Omega_{01} - \Omega_{02})/2}{|K| \cos \beta}.$$

У данного кубического уравнения следует выбирать ту ветку решений, которая при  $\Omega_{01} - \Omega_{02} = \sigma_{\delta\varphi} = 0$  дает  $Z = 1$ ; выражения не приводятся в силу их чрезвычайной громоздкости.

Для идентичных конвективных осцилляторов,  $\Omega_{01} = \Omega_{02}$ , стационарное распределение  $\delta\varphi$  в стохастической системе (132) может быть найдено точно — это распределение фон Мисеса (von Mises) [5, 67]

$$w(\delta\varphi) = \frac{\exp\left(\frac{2|K| \cos \beta}{\sigma_{\delta\varphi}^2} \cos \delta\varphi\right)}{2\pi I_0(2|K| \cos \beta / \sigma_{\delta\varphi}^2)},$$

для которого можно вычислить

$$Z_{\Omega_{01}=\Omega_{02}} = \frac{I_1(2|K| \cos \beta / \sigma_{\delta\varphi}^2)}{I_0(2|K| \cos \beta / \sigma_{\delta\varphi}^2)}; \quad (136)$$

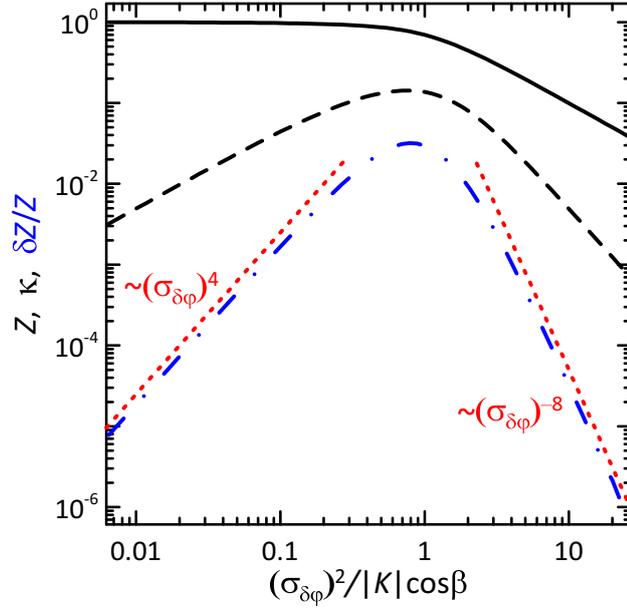


Рис. 28: Степень синхронизации двух идентичных конвективных осцилляторов, подверженных воздействию шума,  $Z$  (сплошная кривая) в зависимости от интенсивности шума  $\sigma_{\delta\varphi}^2$  (136). Штриховая кривая: второй кумулянт (134); синяя штрихпунктирная: относительная погрешность двухкумулянтного приближения (135); красный пунктир показывает наклон степенных законов.

здесь  $I_n(\cdot)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка от мнимого аргумента. На рис. 28 двухкумулянтное приближение (135) сопоставляется с точным решением (136) (двухкумулянтное приближение не ограничено условием  $\Omega_{01} = \Omega_{02}$ , для которого получено точное решение). Можно видеть, что при малой интенсивности шума двухкумулянтное приближение имеет точность  $\mathcal{O}(\sigma_{\delta\varphi}^4)$  (красный пунктир:  $\sigma_{\delta\varphi}^4/(4|K|^2 \cos^2 \beta)$ ). При большой интенсивности шума малым параметром задачи становится  $1/\sigma_{\delta\varphi}^2$  и двухкумулянтное приближение дает очень высокий порядок точности (красный пунктир:  $0.5[\sigma_{\delta\varphi}^2/(|K| \cos \beta)]^{-4}$ ).

Таким образом, можно явно видеть, что построенное на основе формализма круговых кумулянтов обобщение теории Отта–Антонсена имеет смысл и позволяет решать физические задачи не только для больших ансамблей, как это было с оригинальной теорией [65], но и для пары связанных осцилляторов, рассмотренной в настоящем разделе, или даже единственного осциллятора, для

которого может быть сформулирована задача о когерентности отклика на периодическое внешнее воздействие в присутствии шума [29].

### 3.5. Обобщение кумулянтного подхода на случай внутреннего негауссова шума

Рассмотрим стохастическую динамическую системы

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})\xi(t), \quad (137)$$

где  $\vec{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ , ниже свойства негауссового шума  $\xi(t)$  будут обсуждены более детально. Данные стохастические уравнения записаны в смысле Стратоновича.

Напомним определением характеристического функционала стохастического процесса  $\xi(t)$  [113, 114]:

$$F^{(\xi)}[v(t)] = \langle e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \xi(\tau) d\tau} \rangle, \quad (138)$$

где  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по реализациям шума. Для некоторых приложений также востребовано

$$F_t^{(\xi)}[v(t)] = \langle e^{i \int^t v(\tau) \xi(\tau) d\tau} \rangle. \quad (139)$$

Логарифм характеристического функционала

$$\begin{aligned} \Phi^{(\xi)}[v(t)] \equiv \ln F^{(\xi)}[v(t)] \equiv & \int dt_1 K_{\xi,1}(t_1) i v(t_1) + \int dt_1 \int dt_2 K_{\xi,2}(t_1, t_2) \frac{i^2 v(t_1) v(t_2)}{2!} + \\ & + \int dt_1 \int dt_2 \int dt_3 K_{\xi,3}(t_1, t_2, t_3) \frac{i^3 v(t_1) v(t_2) v(t_3)}{3!} + \dots, \end{aligned} \quad (140)$$

где  $K_{\xi,n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$  является  $n$ -ой кумулянтной функцией. Введем логарифм характеристического функционала в момент времени  $t$ :

$$\Phi_t^{(\xi)}[v(t)] \equiv \ln F_t^{(\xi)}[v(t)].$$

Для дельта-коррелированного шума, если можно ввести кумулянтные функции, то они выглядят таким образом:

$$K_{\xi,n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathcal{K}_{\xi,n}(t_1) \delta(t_2 - t_1) \dots \delta(t_n - t_1),$$

где допускаются стохастические процессы с зависящими от времени свойствами,  $\mathcal{K}_{\xi,n}(t)$ . Для дискретных версий уравнения (137) с шагом по времени  $\Delta t$ , имеем  $\xi_j = \xi(t_j)$  как независимые случайные числа с кумулянтами  $\mathcal{K}_{\xi,n}(t_j)/(\Delta t)^{n-1}$ .

Кроме того, если мы имеем дело с дельта-коррелированным шумом, управляющим динамической системой (137), уместно рассмотреть только  $\alpha$ -устойчивых распределений  $\xi$ . Действительно, если принять для дискретного времени версию уравнения (137) и плотность вероятности  $\xi$  с хвостами распределения  $\sim |\xi|^{-1-\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ , то в силу обобщенной центральной предельной теоремы в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$ , шум будет эффективно действовать как  $\alpha$ -устойчивый. Таким образом, в численном моделировании выбор  $\alpha$ -устойчивого распределения приведет к лучшей сходимости результатов к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ ; в теоретическом анализе физически непротиворечивое рассмотрение должно полагать для дельта-коррелированного шума  $\alpha$ -устойчивые статистические свойства.

Напомним кратко необходимые свойства  $\alpha$ -устойчивых распределений [115]. Сумма большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин, плотность вероятности которых имеет степенные хвосты  $|\xi|^{-1-\alpha}$ , распределяется согласно  $\alpha$ -устойчивому распределению (с таким же показателем степенного закона для хвостов) для  $0 < \alpha < 2$  и распределению Гаусса ( $\alpha = 2$ ) для  $\alpha \geq 2$ . Для  $\alpha \leq 0$  распределение не может быть нормировано. Обычно эти распределения задаются через их характеристические функции:

$$F(v; \alpha, \beta, c, \mu) = \exp\left(iv\mu - |cv|^\alpha(1 + i\beta\text{sign}(v)\Theta)\right), \quad (141)$$

где  $\mu \in \mathbb{R}$  — параметр сдвига,  $c > 0$  — параметр масштаба, задающий ширину распределения,  $\beta \in [-1, 1]$  называется параметром асимметрии (“skewness”, обычно термин “skewness” используется для третьего кумулянта, который в настоящей задаче может расходиться),

$$\Theta = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \text{for } \alpha \neq 1; \\ -\frac{2}{\pi} \ln|v|, & \text{for } \alpha = 1. \end{cases}$$

Важно обсудить дискретную версию дельта-коррелированного  $\alpha$ -устойчивого шума. Сумма двух независимых  $\alpha$ -устойчивых случайных величин является  $\alpha$ -устойчивой случайной величиной с параметрами (см. ур. (141))  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ,  $|c| = (|c_1|^\alpha + |c_2|^\alpha)^{1/\alpha}$ ,  $\beta = (\beta_1|c_1|^\alpha + \beta_2|c_2|^\alpha)/(|c_1|^\alpha + |c_2|^\alpha)$ . Для суммы двух приращений шума  $\xi_{\Delta t}\Delta t$  эквивалентное приращение для размера временного шага ( $2\Delta t$ ) является  $\xi_{2\Delta t}2\Delta t = 2^{1/\alpha}\xi_{\Delta t}\Delta t$ ; следовательно, на шаге по времени  $\Delta t$  в численном счете следует задавать шум  $\xi_{\Delta t} \propto (\Delta t)^{1/\alpha-1}$ .

Для стохастической системы (137) функция плотности вероятности

$$(\vec{x}, t) = \langle \delta(x_1(t) - x_1) \delta(x_2(t) - x_2) \dots \delta(x_N(t) - x_N) \rangle = \langle \delta^N(\vec{x}(t) - \vec{x}) \rangle$$

подчиняется следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\vec{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(\vec{x}) w(\vec{x}, t)) = \langle \xi(t) \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \delta^N(\vec{x}(t) - \vec{x}) \rangle, \quad (142)$$

где принята договоренность о суммировании по повторяющимся индексам и  $\frac{\delta}{\delta \xi(t)}$  — вариационная производная для  $\delta^N(\vec{x}(t) - \vec{x})$ , которая является функционалом от  $\xi(\tau)|_{\tau \in (-\infty, t]}$ . Для дельта-коррелированного процесса  $\xi(t)$  производная по времени от логарифма характеристического функционала

$$\dot{\Phi}_t[v(t)] = \frac{\langle i\xi(t)v(t)e^{i \int^t \xi(\tau)v(\tau)d\tau} \rangle}{\langle e^{i \int^t \xi(\tau)v(\tau)d\tau} \rangle}$$

в момент  $t$  включает только  $\xi(t)$ , так как усреднение  $\langle e^{i \int^t \xi(\tau)v(\tau)d\tau} \rangle$  можно разложить на множители для усреднений по  $\xi(t)$  и реализации  $\xi(\tau)|_{\tau \in (-\infty, t-0)}$ .

Для дискретного времени имеем  $\xi(t)dt \sim (dt)^{1/\alpha}$  и после сокращения общего множителя  $\langle e^{i \int^{t-dt} \xi(\tau)v(\tau)d\tau} \rangle$  среднее значение в знаменателе  $\sim (1 + \mathcal{O}(v^2(dt)^{2/\alpha}))$ , а в числителе —  $\sim v^2(dt)^{1/\alpha+1}$ . Последнее может быть конечным, когда первое превращается в 1. Следовательно, в уравнении (142)

$$\langle \xi(t) \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \delta^N(\vec{x}(t) - \vec{x}) \rangle = \langle \dot{\Phi}_t^{(\xi)} \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \right] \delta^N(\vec{x}(t) - \vec{x}) \rangle.$$

Используя

$$\frac{\delta}{\delta \xi(t)} = \frac{\delta \vec{x}(t)}{\delta \xi(t)} \cdot \frac{\delta}{\delta \vec{x}(t)},$$

$$\frac{\delta \vec{x}(t)}{\delta \xi(t)} = \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \int^t (f(\vec{x}(\tau)) + \xi(\tau) g(\vec{x}(\tau))) d\tau = g(\vec{x}(t)),$$

и  $\frac{\delta}{\delta \vec{x}(t)} \delta^N(\vec{x}(t) - \vec{x}) = -\frac{\delta}{\delta \vec{x}} \delta^N(\vec{x}(t) - \vec{x})$ , можно получить

$$\langle \dot{\Phi}_t^{(\xi)} \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \right] \delta^N(\vec{x}(t) - \vec{x}) \rangle = \langle \dot{\Phi}_t^{(\xi)} [i\hat{Q}] \delta^N(\vec{x}(t) - \vec{x}) \rangle = \dot{\Phi}_t^{(\xi)} [i\hat{Q}] w(\vec{x}, t),$$

где  $\hat{Q}(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} (g_j(\vec{x})(\cdot))$ .

Таким образом, мы приходим к результату Кляцкина [113, 114]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(\vec{x})w) - \dot{\Phi}_t^{(\xi)} (i\hat{Q})w = 0, \quad (143)$$

или, если возможно представление кумулянтным функциональным рядом,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(\vec{x})w) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{\xi, n}}{n!} (-\hat{Q})^n w = 0. \quad (144)$$

Для важного случая знакосимметричного шума  $\xi(t)$  с  $\alpha$ -устойчивым распределением (141) имеем  $\mu = 0$  и  $\beta = 0$ ; следовательно

$$\Phi_t^{(\xi)} [v(t)] = - \int^t |cv(\tau)|^\alpha d\tau$$

и

$$\dot{\Phi}_t^{(\xi)} [v(t)] = -|cv(t)|^\alpha.$$

Для уровня шума  $c = \sigma$ , уравнение (144) можно переписать как

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(\vec{x})w) - \dot{\Phi}_t^{(\xi)} (i\sigma\hat{Q}; c = 1)w = 0. \quad (145)$$

Здесь используется, что “амплитуда” шума может быть явно записана в виде множителя при операторе  $\hat{Q}$ .

Здесь и далее мы ограничиваем рассмотрение случаем фазового уравнения с аддитивным шумом  $g(\varphi) = 1$  и  $f(\varphi, t) = \Omega(t) + \text{Im}(h(t)e^{-i\varphi})$ :

$$\dot{\varphi} = \Omega(t) + \text{Im}(h(t)e^{-i\varphi}) + \sigma\xi(t). \quad (146)$$

В этом случае уравнение (145) можно переписать как

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (f(\varphi)w) - \dot{\Phi}_t^{(\xi)} \left( i\sigma \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) w = 0. \quad (147)$$

В Фурье-пространстве

$$w(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{-im\varphi}$$

с  $a_0 = 1$  и  $a_{-m} = a_m^*$ , уравнение (147) принимает следующий вид:

$$\dot{a}_m = im\Omega a_m + mh a_{m-1} - mh^* a_{m+1} + \dot{\Phi}_t^{(\xi)}(\sigma m) a_m. \quad (148)$$

Поскольку уравнения для  $a_{m>1}$  не включают  $a_{m<0}$  и  $a_0 = 1$ , то функция  $\dot{\Phi}_t^{(\xi)}(\sigma m)$  приобретает аналитическую форму  $\dot{\Phi}_t^{(\xi)}(\sigma m) = -(\sigma m)^\alpha$ , что означает, что она корректно определена для оператора в уравнении (143).

Подводя итог, для дельта-коррелированного  $\alpha$ -устойчивого симметричного аддитивного шума  $\xi(t)$  с “амплитудой”  $\sigma$ , функция плотности вероятности определяется следующим уравнением для мод Фурье:

$$\dot{a}_m = im\Omega a_m + mh a_{m-1} - mh^* a_{m+1} - (\sigma m)^\alpha a_m. \quad (149)$$

Примечательно, что уравнение (149) подчеркивает проблему построения аналога уравнения Фоккера–Планка посредством кумулянтного представления шума, такого как в уравнении (144). Для всех физически осмысленным случаев дельта-коррелированного шума необходимо принять  $\alpha$ -устойчивые распределения либо с  $0 < \alpha < 2$ , либо с  $\alpha = 2$  (случай классического уравнения Фоккера–Планка). Представление сингулярной функции  $(\sigma m)^\alpha$  для  $0 < \alpha < 2$  рядом по четным степеням  $(\sigma m)$  никогда не будет адекватным: для больших  $(\sigma m)$ , которые связаны с формированием разрывов распределения, имеем  $m \rightarrow \infty$ , а для слабого шума  $(\sigma m) \rightarrow 0$ .

Проблема формирования нефизичных коротковолновых особенностей плотности распределений из-за пространственных производных высокого порядка снимается в маломодовых приближениях на основе представления круговых

кумулянтов [1, 116]. Можно надеяться, что эта проблема не должна возникнуть в уравнении (149). К сожалению, для нецелого числа  $\alpha$  вывод уравнений для круговых кумулянтов [1] в общем виде может быть проблематичным и включать дробные производные. Рассмотрим двухкумулянтные приближения [67] и уравнение (148). Здесь также можно рассмотреть случай распределения Лоренца для собственных частот  $g(\Omega) = \gamma/\{\pi[(\Omega - \Omega_0)^2 + \gamma^2]\}$ , при котором из уравнения (148) могут быть получены уравнения для динамики параметров порядка Курамото–Дайдо  $Z_m = \langle e^{im\varphi} \rangle$ :

$$\dot{Z}_m = m((i\Omega_0 - \gamma)Z_m + hZ_{m-1} - h^*Z_{m+1}) + \dot{\Phi}_t^{(\xi)}(\sigma m) Z_m \quad (150)$$

с  $Z_0 = 1$ . Для

$$\kappa_1 = Z_1, \quad \kappa_2 = Z_2 - Z_1^2, \quad \kappa_3 = \frac{Z_3 - 3Z_2Z_1 + 2Z_1^3}{2}, \dots$$

можно записать  $\dot{\kappa}_1 = \dot{Z}_1$ ,  $\dot{\kappa}_2 = \dot{Z}_2 - 2Z_1\dot{Z}_1$  и т.д. Тогда можно получить аналог уравнений (115) для негауссового шума:

$$\dot{Z}_1 = (i\Omega_0 - \gamma)Z_1 + h - h^*(Z_1^2 + \kappa_2) + \Phi_\sigma Z_1, \quad (151)$$

$$\dot{\kappa}_2 = 2(i\Omega_0 - \gamma)\kappa_2 - 4h^*(\kappa_3 + Z_1\kappa_2) + \Phi_{2\sigma}\kappa_2 + [\Phi_{2\sigma} - 2\Phi_\sigma]Z_1^2. \quad (152)$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_3 = & 3(i\Omega_0 - \gamma)\kappa_3 - h^*(9\kappa_4 + 6Z_1\kappa_3 + 3\kappa_2^2) + \Phi_{3\sigma}\kappa_3 + \\ & + \frac{3}{2}[\Phi_{3\sigma} - \Phi_{2\sigma} - \Phi_\sigma]\kappa_2Z_1 + \frac{\Phi_{3\sigma} - 3\Phi_{2\sigma} + 3\Phi_\sigma}{2}Z_1^3, \end{aligned} \quad (153)$$

...

где  $\Phi_{m\sigma} := \dot{\Phi}_t^{(\xi)}(m\sigma)$ . С  $\dot{\Phi}_t^{(\xi)}(\sigma t) = -(\sigma t)^\alpha$ , уравнения (151)–(152) принимают следующий вид:

$$\dot{Z}_1 = (i\Omega_0 - \gamma)Z_1 + h - h^*(Z_1^2 + \kappa_2) - \sigma^\alpha Z_1, \quad (154)$$

$$\dot{\kappa}_2 = 2(i\Omega_0 - \gamma)\kappa_2 - 4h^*(\kappa_3 + Z_1\kappa_2) - \sigma^\alpha[2^\alpha\kappa_2 + (2^\alpha - 2)Z_1^2]. \quad (155)$$

Можно проверить уравнения (149) и (154)–(155), используя модель Курамото с внутренними негауссовыми шумами. Сопоставим

- (i) моделирование конечного ансамбля,
- (ii) решение уравнения (150),
- (iii) решение уравнений (154)–(155).

Для

$$\dot{\varphi}_j = \Omega_j + \varepsilon \sum_{m=1}^N \sin(\varphi_m - \varphi_j) + \sigma \xi_j(t), \quad j = 1, \dots, N \quad (156)$$

в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$h = \frac{\varepsilon}{2} Z_1,$$

и уравнения (154)–(155) с  $\kappa_3 = 0$  дают “стационарное” решение ( $\dot{Z}_n = in\Omega_0 Z_n$ )

$$\kappa_2 = -\frac{(2^\alpha - 2)\sigma^\alpha Z_1^2}{2\gamma + (2\sigma)^\alpha + 2\varepsilon|Z_1|^2},$$

$$|Z_1|^2 = \frac{1}{2} - \frac{3(\gamma + \sigma^\alpha)}{2\varepsilon} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - [2\gamma + (6 - 2^{\alpha+1})\sigma^\alpha]\varepsilon + (\gamma + \sigma^\alpha)[\gamma + (9 - 2^{\alpha+2})\sigma^\alpha]}}{2\varepsilon}, \quad (157)$$

и с  $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$

$$|Z_1|^2 = 1 - \frac{2(\gamma + \sigma^\alpha)}{\varepsilon}. \quad (158)$$

Для получения  $\alpha$ -устойчивых переменных мы используем решение, предложенное в [117], основанное на интегральной формуле из работы [115], как это было реализовано в [118]. (См. “Stable distributions” на Wiki, “Simulation of stable variables”, работы [19–21])

На рис. 29 символами представлены результаты численного моделирования для ансамбля  $N = 1500$  осцилляторов Курамото (156) для  $\varepsilon = 1$ ; значения параметров  $(\sigma^2, \gamma)$  снизу-вверх:  $(0.01, 0)$ ,  $(0.01, 0.005)$ ,  $(0.01, 0.01)$ ,  $(0.1, 0)$ ,  $(0.1, 0.05)$ ,  $(0.1, 0.1)$ . Черные пунктирные линии — двухкумулянтное приближение (157); синие штриховые линии — “стационарное” (в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega_0$ ) численное решение системы уравнений (150) для параметров Курамото—Дайдо с учетом 200 элементов. Можно видеть, что аналитическое решение близко к “точному” численному решению, что позволяет судить о точности двухкумулянтной модели. Отклонение результатов счета для

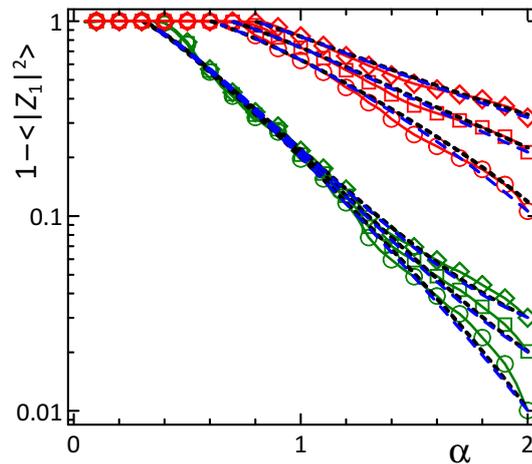


Рис. 29: Сопоставление результатов численного счета и аналитической теории (описание в тексте).

конечного ансамбля, по-видимому, связано с эффектами конечности размера ансамбля.

### 3.6. Выводы по главе

В данной главе с помощью формализма круговых кумулянтов построена теория возмущений для ряда задач, выходящих за рамки условий применимости оригинальной теории Отта–Антонсена. То что все старшие кумулянты исчезают на многообразии ОА, делает их естественными переменными для построения теории возмущений. При этом интенсивность шума выступает малым параметром. Ожидается, что стабилизирующее воздействие внутреннего шума является довольно общим свойством. Однако для достоверной проверки этой гипотезы необходим систематический анализ различных ситуаций, особенно состояний, далеких от многообразия ОА, где может возникнуть нетривиальное взаимодействие между шумом и детерминированной динамикой. Подход круговых кумулянтов потенциально может быть использован для разработки теории возмущений для других ситуаций, когда условия применимости теории ОА слабо нарушены.

Также рассмотрена проблема численной неустойчивости счета с оборванными-

ми кумулянтными разложениями для “системы Абрамса” и способы подавления такой неустойчивости. Было рассмотрено два варианта подавления: с помощью введения искусственной диссипации и путем подавления слагаемых, ответственных за неустойчивость. Для таких методов стабилизации в данной задаче для численного счета желательно брать не более 20 кумулянтов, при использовании менее 8 кумулянтов стабилизирующие поправки можно не использовать. Эффективность процедуры стабилизации явно зависит от близости начальных состояний к многообразию Отта–Антонсена.

Для задачи о термоконцентрационной конвекции в пористой среде (глава 1) получены уравнения стохастической динамики фазы колебаний течения при случайной флуктуации внешних температурных условий. В рамках этих фазовых уравнений исследована проблема о степени синхронности колебаний в связанных ячейках. С использованием круговых кумулянтов — фактически, обобщения теории Отта–Антонсена — получены количественные характеристики степени синхронности и установлена их зависимость от параметров задачи. Следует отметить, что оригинальная теория ОА имеет смысл только для больших ансамблей осцилляторов, поскольку в своей основе опирается на распределение плотности вероятности состояний, но не позволяет рассматривать задачи с индивидуальным шумом в осцилляторах. В присутствии же шума, распределение плотности вероятности состояний имеет смысл не только для большого ансамбля, но и для пары связанных осцилляторов или даже одного осциллятора (например, задача о когерентности отклика осциллятора с шумом на периодическое внешнее воздействие).

Использован подход круговых кумулянтов для построения маломодового макроскопического описание динамики ансамблей фазовых элементов, подверженных действию негауссова белого шума. Получены двухкумулянтные редуцированные уравнения для альфа-устойчивых шумов. Применение подхода демонстрируется на случае ансамбля Курамото с негауссовым шумом. Такие приближенные модели подходят для изучения ряда задач при аномальной диффу-

зии; при этом не появляется проблем с возникновением разрывов и отрицательных значений поля концентрации [7, 8].

В работе [5] рассмотрена проблема магнитных переходов между макроспину-упорядоченными фазами в двумерных массивах. Система моделировалась как плоская структура из идентичных однодоменных частиц, расположенных на квадратной решетке и связанных магнитным диполь–дипольным взаимодействием; все частицы обладали сильной магнитной анизотропией типа “легкая плоскость” [119, 120]. В таких 2D ансамблях тепловые флуктуации ориентации магнитных моментов частиц являются ключевым элементом для описания самоорганизации магнитоупорядоченных состояний — антиферромагнитного и ферромагнитного. Описание макроскопической динамики таких систем было построено в приближении среднего поля, с использованием техники круговых кумулянтов, так как случай теплового шума не может быть рассмотрен в рамках оригинальной теории ОА. При редукции описания динамики магнитных частиц к единственной угловой переменной круговые кумулянты могут быть использованы для построения среднеполевого описания: например, для отслеживания динамики макроскопической намагниченности и параметра антиферромагнитного порядка. Численное моделирование и аналитическое исследование кумулянтных уравнений раскрыло полную картину реакции системы на статическое внешнее магнитное поле и возможные фазовые переходы из-за изменения температуры или приложенного поля. Так же была вычислена свободная энергия макроскопических состояний и определено, какие из них термодинамически устойчивы, а какие — метастабильны. Это один из примеров, когда применение метода круговых кумулянтов позволяет построить теоретическое описание существенно неравновесной динамики термодинамической системы.

## Заключение

**Итоги выполненного исследования.** В настоящей диссертационной работе аналитически построено фазовое описание для колебательных режимов термоконцентрационной конвекции в пористой среде. В рамках фазовой редукции описана синхронизация течений в смежных ячейках с тепловой связью. Для фазовых ансамблей введен формализм круговых кумулянтов и построено обобщение теории Отта–Антонсена, позволяющее получать малоразмерные уравнения динамики параметров порядка и описывать коллективные явления для неидеальных ситуаций — за рамками оригинальной теории Отта–Антонсена.

**Глава 1. Фазовое описание колебательной термоконцентрационной конвекции в смежных ячейках пористой среды.**

В первой главе использовано фазовое описание для изучения динамики в гидродинамической системе двух связанных ячеек. Исследована термоконцентрационная конвекция двухкомпонентной жидкости в подогреваемых снизу смежных горизонтальных ячейках пористой среды в поле тяжести. В рассматриваемой системе связь между ячейками происходит через поле температуры (стенки ячеек соприкасаются).

Получены уравнения динамики в длиноволновом приближении с использованием метода многих масштабов. Построено аналитическое описание системы в рамках слабонелинейного анализа вблизи границы конвективной неустойчивости и найдены уравнения для фаз колебаний конвективных течений в двух ячейках. Эти уравнения являются системой типа Курамото–Сакагучи [82], которая, в свою очередь, является одной из классических моделей для изучения коллективных колебаний в нелинейной динамике.

Исследована синхронизация колебаний в смежных ячейках. Найдены соотношения между силой связи и расстройкой частот свободных колебаний, при которой в системе существует режим синхронизации течений. Получено решение для устойчивого синхронного режима.

## **Глава 2. Теория Отта–Антонсена и ее обобщения.**

Во второй главе построено описание поведения ансамблей в окрестности решения Отта–Антонсена в рамках формализма круговых кумулянтов. Для систем типа Отта–Антонсена данный формализм позволяет получать точные уравнения динамики параметров порядка, как для идентичных осцилляторов, так и для неидентичных. Вся динамика системы описывается первым кумулянтом, старшие кумулянты описывают отклонение от многообразия ОА. Численное интегрирование с несколькими первыми кумулянтами обеспечивает тот же уровень точности, что аналогичное интегрирование с сотнями гармоник. Доказано, что решение ОА нейтрально устойчиво для идентичных ансамблей и устойчиво при введении неидентичности.

Получено более общее частное решение — двухгрупповое решение. Новое решение позволяет описывать динамику двухгрупповых состояний ансамбля в конечной окрестности решения ОА (являющегося одногрупповым). При тех значениях параметров, где одногрупповая динамика демонстрировала стремление к устойчивому предельному циклу, для двухгрупповых состояний будет наблюдаться притяжение к семейству торов.

Подход круговых кумулянтов был продемонстрирован на системе двух симметричных связанных ансамблей осцилляторов Курамото–Сакагучи [82]. Исследована динамика системы при разных начальных условиях. Для системы были найдены состояния химеры, в которых первый ансамбль полностью синхронизирован, а осцилляторы второго (несинхронизированного) ансамбля формируют две группы.

## **Глава 3. Обобщение теории Отта–Антонсена на системы с внутренним шумом.**

В третьей главе построена теория возмущений для определенного набора задач, выходящих за рамки условий применимости оригинальной теории Отта–Антонсена. Все старшие кумулянты обращаются в ноль на многообразии ОА, что позволяет использовать их в качестве удобных переменных для построе-

ния теории возмущений при малой интенсивности шума. Внутренний шум оказывает стабилизирующее воздействие на динамику идентичных осцилляторов, тем не менее для доказательства универсальной справедливости этой гипотезы необходим систематический анализ различных ситуаций, особенно состояний, далеких от многообразия ОА, где может возникнуть нетривиальное взаимодействие между шумом и детерминированной динамикой. Подход круговых кумулянтов может быть использован для построения теории возмущений во многих других ситуациях, когда условия применимости теории ОА слабо нарушены.

Рассмотрена проблема численной неустойчивости счета с оборванными кумулянтными разложениями на примере “системы Абрамса” [105] и способы подавления такой неустойчивости. Было рассмотрено два варианта подавления: с помощью введения искусственной диссипации и путем подавления слагаемых, ответственных за неустойчивость. Эффективность процедуры стабилизации явно зависит от близости начальных состояний к многообразию Отта–Антонсена.

Получены уравнения стохастической динамики фазы колебаний течения при случайной флуктуации внешних температурных условий для задачи о термоконцентрационной конвекции в пористой среде. С помощью подхода круговых кумулянтов исследована проблема о степени синхронности колебаний конвективных течений в связанных ячейках. Показана применимость этого подхода для случая индивидуального шума в осцилляторах, тогда как теории ОА не позволяет описывать задачи такого типа.

В рамках подхода круговых кумулянтов удастся построить достаточно точное макроскопическое описание динамики ансамблей фазовых элементов (осцилляторов) с негауссовыми дельта-коррелированными шумами. Поскольку маломодовое описание математически соответствует учету только ведущих Фурье-гармоник распределения плотности вероятности, в рамках подхода не возникает проблемы нефизичного поведения плотности вероятности (формирования разрывов и т.п.), типичной для уравнений типа Фоккера–Планка, в которых учитываются ведущие негауссовы поправки для шума, но кумулянтный ряд для

шума оборван. Применение подхода продемонстрировано на случае ансамбля Курамото с негауссовым шумом.

Также в выводах к главе приведена работа [5] как один из примеров описания макроскопической динамики магнитной системы с помощью формализма круговых кумулянтов.

**Практические рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы.** Полученные в рамках диссертационного исследования результаты могут быть востребованы при рассмотрении коллективных явлений и управления колебательными режимами в широком диапазоне задач. Развитие фазового описания в гидродинамике важно для изучения процессов переноса в различных отраслях: при анализе наносистем, химических реакторов, систем охлаждения электронных компонентов. В частности, фазовое описание оказывается востребованным для проблемы оптимального управления срывом вихрей при обтекании тела быстрым потоком [44], что позволяет манипулировать аэродинамическим сопротивлением объектов. С точки зрения проблем управления, интерес представляют ситуации слабой связи между элементами и слабого управляющего воздействия — именно при таких условиях фазовое описание является математически строгим.

В дальнейшем диссертантом планируется исследовать восприимчивость рассмотренной конвективной системы к слабому внешнему воздействию. А также рассмотреть другие гидродинамические системы со связанными фазовыми осцилляторами.

Востребованным шагом в дальнейшем развитии теории возмущений для связанных осцилляторов является изучение случая, когда в системе существует и внутренний шум, и инерция. Интерес представляет исследование конкуренции двух факторов, а так же поведение системы при различных параметрах.

## Список литературы

- [1] Tyulkina, I. V. Dynamics of Noisy Oscillator Populations beyond the Ott-Antonsen Ansatz / I. V. Tyulkina, D. S. Goldobin, L. S. Klimenko, A. Pikovsky // *Physical Review Letters*. — 2018. — Vol. 120. — P. 264101.
- [2] Тюлькина, И. В. Синхронизация конвективных течений двухкомпонентной жидкости в смежных ячейках пористой среды / И. В. Тюлькина, Д. С. Голдобин // *Вестник Пермского университета. Физика*. — 2023. — Т. 2. — С. 59–68.
- [3] Тюлькина, И. В. Фазовое описание колебательной термоконцентрационной конвекции в смежных слоях пористой среды / И. В. Тюлькина, Д. С. Голдобин // В сборнике: *Неравновесные процессы в сплошных средах. Сборник статей по материалам Международного симпозиума*. Пермь. — 2021. — С. 193–197.
- [4] Тюлькина, И. В. Двухгрупповые решения для динамики ансамблей фазовых систем типа Отта-Антонсена / И. В. Тюлькина, Д. С. Голдобин, Л. С. Клименко, А. Пиковский // *Известия Вузов. Радиофизика*. — 2018. — Т. 61, № 8–9. — С. 718–728.
- [5] Tyulkina, I. V. Collective in-plane magnetization in a two-dimensional XY macrospin system within the framework of generalized Ott–Antonsen theory / I. V. Tyulkina, D. S. Goldobin, L. S. Klimenko et al. // *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (Series A)*. — 2020. — Vol. 378, no. 2171. — P. 20190259.
- [6] Tyulkina, I. V. Stabilization of direct numerical simulation for finite truncations of circular cumulant expansions / I. V. Tyulkina, D. S. Goldobin, A. Pikovsky // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. — 2019. — Vol. 581. — P. 012008.

- [7] Dolmatova, A. V. Circular cumulant reductions for macroscopic dynamics of oscillator populations with non-gaussian noise / A. V. Dolmatova, I. V. Tyulkina, D. S. Goldobin // *Chaos*. — 2023. — Vol. 33. — P. 113102.
- [8] Долматова, А. В. Описание макроскопической динамики популяций фазовых элементов с белым негауссовым шумом на основе подхода круговых кумулянтов / А. В. Долматова, И. В. Тюлькина, Д. С. Голдобин // *Вестник Пермского университета. Физика*. — 2021. — Т. 3. — С. 5–12.
- [9] Turtle, J. Synchronization of spin torque nano-oscillators / J. Turtle, P. L. Buono, A. Palacios et al. // *Physical Review B*. — 2017. — Vol. 95. — P. 144412.
- [10] Pikovsky, A. Robust synchronization of spin-torque oscillators with an LCR load / A. Pikovsky // *Physical Review E*. — 2013. — Vol. 88. — P. 032812.
- [11] Bernardini, A. Synchronization between two Hele-Shaw Cells / A. Bernardini, J. Bragard, H. L. Mancini // *Mathematical Biosciences and Engineering*. — 2004. — Vol. 1. — P. 339–346.
- [12] Kawamura, Y. Collective phase description of oscillatory convection / Y. Kawamura, H. Nakao // *Chaos*. — 2013. — Vol. 23. — P. 043129.
- [13] Kawamura, Y. Phase description of oscillatory convection with a spatially translational mode / Y. Kawamura, H. Nakao // *Physica D*. — 2015. — Vol. 295–296, no. 1. — P. 11–29.
- [14] Barkley, D. Computational Study of Turbulent Laminar Patterns in Couette Flow / D. Barkley, L. S. Tuckerman // *Physical Review Letters*. — 2005. — Vol. 94. — P. 014502.

- [15] Moxey, D. Distinct large-scale turbulent-laminar states in transitional pipe flow / D. Moxey, D. Barkley // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2010. — Vol. 107. — P. 80911–8096.
- [16] Prindle, A. A sensing array of radically coupled genetic “biopixels” / A. Prindle, P. Samayoa, I. Razinkov et al. // Nature. — 2012. — Vol. 481. — P. 39–44.
- [17] Kawamura, Y. Phase reduction approach to elasto-hydrodynamic synchronization of beating flagella / Y. Kawamura, R. Tsubaki // Physical Review E. — 2018. — Vol. 97. — P. 022212.
- [18] Acebrón, J. A. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena / J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, Vicente C. J. P. et al. // Reviews of Modern Physics. — 2005. — Vol. 77, no. 1. — P. 137.
- [19] Golomb, D. Mechanisms of synchrony of neural activity in large networks / D. Golomb, D. Hansel, G. Mato // Neuro-Informatics and Neural Modeling. — Elsevier, 2001. — Vol. 4. — P. 887–968.
- [20] Monga, B. Phase reduction and phase-based optimal control for biological systems: a tutorial / B. Monga, D. Wilson, T. Matchen, J. Moehlis // Biological Cybernetics. — 2019. — Vol. 113. — P. 11–46.
- [21] Kuramoto, Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. / Y. Kuramoto. — Dover, New York, 2003. — 156 p.
- [22] Kiss, I. Emerging coherence in a population of chemical oscillators / I. Kiss, Y. Zhai, J. Hudson // Science. — 2002. — Vol. 296. — P. 1676–1678.
- [23] Taylor, A. F. Phase clustering in globally coupled photochemical oscillators / A. F. Taylor, P. Kapetanopoulos, B. J. Whitaker et al. // The European Physical Journal Special Topics. — 2008. — Vol. 165. — P. 137–149.

- [24] Nakao, H. Phase and amplitude description of complex oscillatory patterns in reaction-diffusion systems / H. Nakao // *Physics of Biological Oscillators*. — 2021. — Vol. 735. — P. 11–27.
- [25] Temirbayev, A. A. Experiments on oscillator ensembles with global nonlinear coupling / A. A. Temirbayev, Z. Z. Zhanabaev, S. B. Tarasov et al. // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 85. — P. 015204(R).
- [26] Filatrella, G. Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model / G. Filatrella, A. H. Nielsen, N. F. Pedersen // *European Physical Journal B*. — 2008. — Vol. 61. — P. 485–491.
- [27] Strogatz, S. H. Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the Millennium Bridge / S. H. Strogatz, D. M. Abrams, A. McRobie et al. // *Nature*. — 2005. — Vol. 438. — P. 43–44.
- [28] Néda, Z. The sound of many hands clapping / Z. Néda, E. Ravasz, Y. Brechet et al. // *Nature*. — 2000. — Vol. 403. — P. 849–850.
- [29] Пиковский А. С. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю. — Техносфера. Москва, 2003. — 493 с.
- [30] Winfree, T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators / T. Winfree // *Journal of Theoretical Biology*. — 1967. — Vol. 16. — P. 15–42.
- [31] Nakao, H. Phase reduction approach to synchronization of nonlinear oscillators / H. Nakao // *Contemporary Physics*. — 2016. — Vol. 57. — P. 188–214.

- [32] Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М.: Наука, 1974. — 503 с.
- [33] Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М.: Наука, 1981. — 918 с.
- [34] Arai, K. Phase coherence in an ensemble of uncoupled limit-cycle oscillators receiving common Poisson impulses / K. Arai, H. Nakao // *Physical Review E*. — 2008. — Vol. 77. — P. 036218.
- [35] Goldobin, D. S. Ott–Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series / D. S. Goldobin, A. V. Dolmatova // *Physical Review Research*. — 2019. — Vol. 1. — P. 033139.
- [36] Laing, C. R. The dynamics of networks of identical theta neurons / C. R. Laing // *Journal of Mathematical Neuroscience*. — 2018. — Vol. 8. — P. 4.
- [37] Montbrió, E. Macroscopic description for networks of spiking neurons / E. Montbrió, D. Pazó, Roxin A. // *Physical Review X*. — 2015. — Vol. 5. — P. 021028.
- [38] Klinshov, V. V. Constructive role of shot noise in the collective dynamics of neural networks / V. V. Klinshov, P. S. Smelov, S. Yu. Kirillov // *Chaos*. — 2023. — Vol. 33, no. 6. — P. 061101.
- [39] Brown, E. On the phase reduction and response dynamics of neural oscillator populations / E. Brown, J. Moehlis, P. Holmes // *Neural Computation*. — 2004. — Vol. 16, no. 4. — P. 673–715.

- [40] Kiss, I. Z. Experiments on arrays of globally coupled periodic electrochemical oscillators / I. Z. Kiss, W. Wang, J. L. Hudson // The Journal of Physical Chemistry B. — 1999. — Vol. 103, no. 51. — P. 11433–11444.
- [41] Kori, H. Partial synchronization of relaxation oscillators with repulsive coupling in autocatalytic integrate-and-fire model and electrochemical experiments / H. Kori, I. Z. Kiss, S. Jain, J. L. Hudson // Chaos. — 2018. — Vol. 28, no. 4. — P. 045111.
- [42] Manoj, K. Experimental evidence of amplitude death and phase-flip bifurcation between in-phase and anti-phase synchronization / K. Manoj, S. A. Pawar, R. I. Sujith // Scientific Reports. — 2018. — Vol. 8. — P. 11626.
- [43] Taira, K. Phase-response analysis of synchronization for periodic flows / K. Taira, H. Nakao // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Vol. 846. — P. R2.
- [44] Nair, A. Phase-based control of periodic flows / A. Nair, K. Taira, B. Brunton, S. Brunton // Journal of Fluid Mechanics. — 2021. — Vol. 927. — P. A30.
- [45] Castrejón-Pita, A. A. Synchronization in a Pair of Thermally Coupled Rotating Baroclinic Annuli: Understanding Atmospheric Teleconnections in the Laboratory / A. A. Castrejón-Pita, P. L. Read // Physical Review Letters. — 2010. — Vol. 104, no. 20–21. — P. 204501.
- [46] Duane, G. S. Synchronized Chaos in Geophysical Fluid Dynamics / G. S. Duane, J. J. Tribbia // Physical Review Letters. — 2001. — Vol. 86, no. 19. — P. 4298.
- [47] Богатырев, Г. П. Лабораторная модель процесса образования крупномасштабного спирального вихря в конвективно-неустойчивой вращающейся жидкости / Г. П. Богатырев, И. В. Колесниченко, Левина Г. В., Суханов-

- ский А. Н. // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. — 2006. — Т. 42, № 4. — С. 460–466.
- [48] Сухановский, А. Н. Лабораторное исследование нестационарных конвективных течений с геофизическими приложениями / А. Н. Сухановский, А. Ю. Васильев, А. В. Евграфова и др. // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. — 2021. — № 4. — С. 47–54.
- [49] Bratsun, D. Spatial analog of the two-frequency torus breakup in a nonlinear system of reactive miscible fluids / D. Bratsun // Physical Review E. — 2019. — Vol. 100. — P. 031104(R).
- [50] Брацун, Д. А. Моделирование пространственного сценария перехода к хаосу через разрушение тора в задаче с концентрационно-зависимой диффузией / Д. А. Брацун // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 1. — С. 9–31.
- [51] Tass, P. Detection of  $n:m$  Phase Locking from Noisy Data: Application to Magnetoencephalography / P. Tass, M. G. Rosenblum, J. Weule et al. // Physical Review Letters. — 1998. — Oct. — Vol. 81. — P. 3291–3294.
- [52] Голдобин, Д. С. Термоконцентрационная конвекция бинарной смеси в горизонтальном слое пористой среды при наличии источника тепла или примеси / Д. С. Голдобин, Д. В. Любимов // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 2007. — Т. 131, № 5. — С. 949–956.
- [53] Гершуни, Г. З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. — М.: Наука, 1972. — 392 р.
- [54] Гершуни, Г. З. Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. — М.: Наука, 1989. — 320 с.

- [55] Brand, H. R. Convective instabilities in binary mixtures in a porous medium / H. R. Brand, V. Steinberg // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 1983. — Vol. 119, no. 1–2. — P. 327–338.
- [56] Brand, H. R. Nonlinear effects in the convective instability of a binary mixture in a porous medium near threshold / H. R. Brand, V. Steinberg // *Physics Letters A*. — 1983. — Vol. 93, no. 7. — P. 333–336.
- [57] Mamou, M. Thermosolutal bifurcation phenomena in porous enclosures subject to vertical temperature and concentration gradients / M. Mamou, P. Vasseur // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1999. — Vol. 395. — P. 61–87.
- [58] Bahloul, A. Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer / A. Bahloul, N. Boutana, P. Vasseur // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2003. — Vol. 491. — P. 325–352.
- [59] Bourich, M. Soret effect inducing subcritical and Hopf bifurcations in a shallow enclosure filled with a clear binary fluid or a saturated porous medium: A comparative study / M. Bourich, M. Hasnaoui, M. Mamou, A. Amahmid // *Physics of Fluids*. — 2004. — Vol. 16, no. 3. — P. 551–568.
- [60] Bourich, M. Soret convection in a shallow porous cavity submitted to uniform fluxes of heat and mass / M. Bourich, M. Hasnaoui, A. Amahmid, M. Mamou // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. — 2004. — Vol. 31, no. 6. — P. 773–782.
- [61] Bourich, M. Hydrodynamic Boundary Conditions Effects on Soret-Driven Thermosolutal Convection in a Shallow Porous Enclosure / M. Bourich, M. Hasnaoui, M. Mamou, A. Amahmid // *Journal of Porous Media*. — 2005. — Vol. 8, no. 5. — P. 455–469.
- [62] Smorodin, B. L. Evolution of convective patterns in a binary-mixture layer subjected to a periodical change of the gravity field / B. L. Smorodin,

- B. I. Myznikova, J. C. Legros // *Physics of Fluids*. — 2008. — Vol. 20. — P. 094102.
- [63] Smorodin, B. L. Convection in binary fluid mixtures with modulated heating / B. L. Smorodin, M. Lücke // *Physical Review E*. — 2009. — Vol. 79. — P. 026315.
- [64] Watanabe, S. Integrability of a globally coupled oscillator array / S. Watanabe, S. H. Strogatz // *Physical Review Letters*. — 1993. — Vol. 70. — P. 2391.
- [65] Ott, E. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators / E. Ott, T. M. Antonsen // *Chaos*. — 2008. — Vol. 18. — P. 037113.
- [66] Vlasov, V. Dynamics of weakly inhomogeneous oscillator populations: perturbation theory on top of Watanabe–Strogatz integrability / V. Vlasov, M. Rosenblum, A. Pikovsky // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2016. — Vol. 49, no. 31. — P. 31LT02.
- [67] Goldobin, D. S. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators / D. S. Goldobin, I. V. Tyulkina, L. S. Klimenko, A. Pikovsky // *Chaos*. — 2018. — Vol. 28. — P. 101101.
- [68] Ratas, I. Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons / I. Ratas, K. Pyragas // *Physical Review E*. — 2019. — Vol. 100. — P. 052211.
- [69] Zheng, T. Distinct effects of heterogeneity and noise on gamma oscillation in a model of neuronal network with different reversal potential / T. Zheng, K. Kotani, Y. Jimbo // *Scientific Reports*. — 2021. — Vol. 11. — P. 12960.
- [70] Di Volo, M. Coherent oscillations in balanced neural networks driven by endogenous fluctuations / M. Di Volo, M. Segneri, D. S. Goldobin et al. // *Chaos*. — 2022. — 02. — Vol. 32, no. 2. — P. 023120.

- [71] Buendía, V. Hybrid-type synchronization transitions: Where incipient oscillations, scale-free avalanches, and bistability live together / V. Buendía, P. Villegas, R. Burioni, M. A. Muñoz // *Physical Review Research*. — 2021. — Vol. 3. — P. 023224.
- [72] Goldobin, D. S. Circular cumulant reductions for macroscopic dynamics of Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise / D. S. Goldobin, A. V. Dolmatova // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2020. — Vol. 53. — P. 08LT01.
- [73] Goldobin, D. S. Corrigendum: Circular cumulant reductions for macroscopic dynamics of Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise (2020 *J. Phys. A: Math. Theor.* 53 08LT01) / D. S. Goldobin, A. V. Dolmatova // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2020. — Vol. 53. — P. 219501.
- [74] Soret, C. Sur l'état d'équilibre que prend, du point de vue de sa concentration, une dissolution saline primitivement homogène, dont deux parties sont portées à des températures différentes / C. Soret // *Archives des Sciences Physiques et Naturelles de Ge Genève*. — 1879. — Vol. 2. — P. 48–61.
- [75] Bird, R. B. *Transport Phenomena* / R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot. — 2 edition. — Wiley, 2007.
- [76] Kevorkian, J. *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods* / J. Kevorkian, J. D. Cole. — Springer, 1996.
- [77] Nield, D. A. *Convection in Porous Media* / D. A. Nield, A. Bejan. — Springer Verlag, 1998.
- [78] Costesèque, P. Determination of the apparent negative soret coefficient of water-10% alcohol solutions by experimental and numerical methods in packed

- cells / P. Costesèque, S. Gaillard, Y. Gachet, Ph. Jamet // *Philosophical Magazine*. — 2003. — Vol. 83, no. 17–18. — P. 2039–2044.
- [79] Colombani, J. Thermal diffusion in (LiCl, RH<sub>2</sub>O) / J. Colombani, J. Bert, J. Dupuy-Philon // *Journal of Chemical Physics*. — 1999. — Vol. 110, no. 17. — P. 8622–8627.
- [80] Варгафтик, Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н. Б. Варгафтик. — М.: Наука, 1972. — 721 с.
- [81] Ibbs, T. L. A comparison of the behaviour in thermal diffusion of nitrogen and carbon monoxide, and of nitrous oxide and carbon dioxide / T. L. Ibbs, L. Underwood // *Proceedings of the Physical Society*. — 1926. — Vol. 39, no. 1. — P. 227–237.
- [82] Sakaguchi, H. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment / H. Sakaguchi, Y. Kuramoto // *Progress of Theoretical Physics*. — 1986. — Vol. 76, no. 3. — P. 576–581.
- [83] Omel'chenko, O. Chimerapedia: coherence–incoherence patterns in one, two and three dimensions / O. Omel'chenko, E. Knobloch // *New Journal of Physics*. — 2019. — Vol. 21, no. 9. — P. 093034.
- [84] Omel'chenko, O. Collective states in a ring network of theta neurons / O. Omel'chenko, C. Laing // *Proceedings of the Royal Society A*. — 2022. — Vol. 478. — P. 20210817.
- [85] Haacke, R. R. Controls on the formation and stability of gas hydrate-related bottom-simulating reflectors (BSRs): A case study from the west Svalbard continental slope / R. R. Haacke, G. K. Westbrook, M. S. Riley // *Journal of Geophysical Research*. — 2008. — Vol. 113. — P. B05104.

- [86] Магид, М. Ш. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых. / М. Ш. Магид, Н. Б. Дортман, И. Ф. Зотова и др. — Недра. Москва., 1984. — 455 с.
- [87] Таблицы для определения содержания этилового спирта в водно-спиртовых растворах / Под ред. М. И. Максимова. — М.: ИПК Издательство стандартов, 1999. — Т. 1.
- [88] Khattab, I. S. Density, viscosity, and surface tension of water+ethanol mixtures from 293 to 323K / I. S. Khattab, F. Vandarkar, M. A. A. Fakhree, A. Jouyban // Korean Journal of Chemical Engineering. — 2012. — Vol. 29. — P. 812–817.
- [89] Этиловый спирт / Под ред. Н. В. Стабников, И. М. Ройтер, Т. Б. Процюк. — М.: Пищевая промышленность, 1976.
- [90] Pratt, K. C. The mutual diffusion coefficient of ethanol–water mixtures: determination by a rapid, new method / K. C. Pratt, W. A. Wakeham // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 1974. — Vol. 336. — P. 393–406.
- [91] Lapeira, E. Thermodiffusion coefficients of water/ethanol mixtures for low water mass fractions / E. Lapeira, M. M. Bou-Ali, J. A. Madariaga, C. Santamaría // Microgravity Science and Technology. — 2016. — Vol. 28. — P. 553—557.
- [92] Nield, D. A. Estimation of the stagnant thermal conductivity of saturated porous media / D. A. Nield // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1991. — Vol. 34, no. 6. — P. 1575–1576.
- [93] Midttomme, K. The effect of grain size on thermal conductivity of quartz sands and silts / K. Midttomme, E. Roaldset // Petroleum Geoscience. — 1998. — Vol. 4, no. 2. — P. 165–172.

- [94] Chaudhary, D. R. Thermal conductivity of two-phase porous materials: dry soils / D. R. Chaudhary, R. C. Bhandari // Journal of Physics D: Applied Physics. — 1969. — Vol. 2, no. 4. — P. 609.
- [95] Пиковский, А. С. Синхронизация и стохастизация ансамбля автогенераторов внешним шумом / А. С. Пиковский // Известия Вузов. Радиофизика. — 1984. — Т. 27, № 5. — С. 576–581.
- [96] Pietras, B. Ott-Antonsen attractiveness for parameter-dependent oscillatory systems / B. Pietras, A. Daffertshofer // Chaos. — 2016. — Vol. 26. — P. 103101.
- [97] Kuramoto, Y. International symposium on mathematical problems in theoretical physics / Y. Kuramoto // Lecture Notes in Physics. — 1975. — Vol. 39. — P. 420–422.
- [98] Sakaguchi, H. Mutual entrainment in oscillator lattices with nonvariational-type interactions / H. Sakaguchi, Sh. Shinomoto, Y. Kuramoto // Progress of Theoretical Physics. — 1988. — Vol. 79, no. 5. — P. 1069–1079.
- [99] Голдобин, Д. С. Синхронизация в ансамблях Курамото-Сакагучи при конкурирующем влиянии общего шума и глобальной связи / Д. С. Голдобин, А. В. Долматова, М. Розенблюм, А. Пиковский // Известия вузов. ПНД. — 2017. — Т. 25, № 6. — С. 5–37.
- [100] Marvel, S. A. Invariant submanifold for series arrays of Josephson junctions / S. A. Marvel, S. H. Strogatz // Chaos. — 2009. — Vol. 19. — P. 013132.
- [101] Shinomoto, Sh. Phase transitions in active rotator systems / Sh. Shinomoto, Y. Kuramoto // Progress of Theoretical Physics. — 1986. — Vol. 75, no. 5. — P. 1105–1110.

- [102] Watanabe, S. Constant of motion for superconducting Josephson arrays / S. Watanabe, S. H. Strogatz // *Physica D.* — 1994. — Vol. 74. — P. 197–253.
- [103] Pikovsky, A. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators / A. Pikovsky, M. Rosenblum // *Physical Review Letters.* — 2008. — Vol. 101. — P. 2264103.
- [104] Marvel, S. A. Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action / S. A. Marvel, R. E. Mirollo, S. H. Strogatz // *Chaos.* — 2009. — Vol. 19. — P. 043104.
- [105] Abrams, D. M. Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators / D. M. Abrams, R. Mirollo, S. H. Strogatz, D. A. Wiley // *Physical Review Letters.* — 2008. — Vol. 101. — P. 084103.
- [106] Omel'chenko, O. E. Chimera states induced by spatially modulated delayed feedback / O. E. Omel'chenko, Y. L. Maistrenko, P. A. Tass // *Physical Review Letters.* — 2008. — Vol. 100. — P. 044105.
- [107] Omelchenko, I. Loss of Coherence in Dynamical Networks: Spatial Chaos and Chimera States / I. Omelchenko, Y. Maistrenko, P. Hövel, E. Schöll // *Physical Review Letters.* — 2011. — Vol. 106. — P. 234102.
- [108] Pimenova, A. V. Interplay of coupling and common noise at the transition to synchrony in oscillator populations / A. V. Pimenova, D. S. Goldobin, M. Rosenblum, A. Pikovsky // *Scientific Reports.* — 2016. — Vol. 6. — P. 38518.
- [109] Goldobin, D. S. Interplay of the mechanisms of synchronization by common noise and global coupling for a general class of limit-cycle oscillators / D. S. Goldobin, A. V. Dolmatova // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2019. — Vol. 75. — P. 94–108.

- [110] Dolmatova, A. V. Synchronization of coupled active rotators by common noise / A. V. Dolmatova, D. S. Goldobin, A. Pikovsky // *Physical Review E*. — 2017. — Vol. 96, no. 6. — P. 062204.
- [111] Laing, C. R. Disorder-induced dynamics in a pair of coupled heterogeneous phase oscillator networks / C. R. Laing // *Chaos*. — 2012. — Vol. 22. — P. 043104.
- [112] Goldobin, D. S. Dynamics of Limit-Cycle Oscillators Subject to General Noise / D. S. Goldobin, J.-N. Teramae, H. Nakao, G. B. Ermentrout // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 105. — P. 154101.
- [113] Кляцкин, В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах / В. И. Кляцкин. — М.: Наука, 1980. — 337 с.
- [114] Klyatskin, V. I. *Dynamic of Stochastic Systems* / V. I. Klyatskin. — Elsevier Science, 2005. — 212 p.
- [115] Zolotarev, V. M. *One-dimensional stable distribution* / V. M. Zolotarev. — American Mathematical Society, 1986. — 284 p.
- [116] Тюлькина, И. В. К описанию коллективной динамики в ансамблях реальных осцилляторов / И. В. Тюлькина, Д. С. Голдобин, Л. С. Клименко, А. Пиковский // *Вестник Пермского университета. Физика*. — 2018. — Vol. 3. — P. 5–7.
- [117] Chambers, J. M. A method for simulating stable random variables / J. M. Chambers, C. L. Mallows, B. W. Stuck // *Journal of the American Statistical Association*. — 1976. — Vol. 71, no. 354. — P. 340–344.
- [118] Misiorek, A. Heavy-Tailed Distributions in VaR Calculations / A. Misiorek, R. Weron // *Handbook of Computational Statistics*. — Springer, 2012. — P. 1025–1059.

- [119] Arnalds, U. B. Thermal transitions in nano-patterned XY-magnets / U. B. Arnalds, M. Ahlberg, M. S. Brewer et al. // Applied Physics Letters. — 2014. — Vol. 105, no. 4. — P. 042409.
- [120] Leo, N. Collective magnetism in an artificial 2D XY spin system / N. Leo, S. Hohenstei, D. Schildknecht, et al. // Nature Communications. — 2018. — Vol. 9. — P. 2850.