На правах рукописи

Тюлькина Ирина Валерьевна

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ЗА РАМКАМИ ТЕОРИИ ОТТА–АНТОНСЕНА

Специальность 1.1.9 – «Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Пермь, 2024

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред УрО РАН — филиале Федерального государственного бюджетного учреждения науки Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук

Научный руководитель:	**Райхер Юрий Львович**, доктор физико–математических наук, главный научный сотрудник, профессор.
Официальные оппоненты:	**Абрашкин Анатолий Александрович**, доктор физико–математический наук, профессор кафедры математики ФГАОУ ВО НИУ «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород.
	Постников Евгений Борисович, доктор физико–математический наук, заведующий отделом теоретической физики НИЦ физики конденсированного состояния ФГБОУ ВО «Курский государственный университет», г. Курск.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки "Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН г. Владивосток.

Защита состоится 10 октября 2024 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 004.036.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки "Пермский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук"(филиал — Институт механики сплошных сред УрО РАН) по адресу: 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87; сайт: www.icmm.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «____» сентября 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико–математических наук, доцент А.Л.Зуев

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы диссертации. При исследовании коллективных эффектов в ансамблях связанных элементов особый интерес вызывает такое явление как синхронизация. Здесь заслуживают внимания системы, в которых собственная динамика элементов ансамбля сравнительно проста, а сложность возникает как следствие их сетевого взаимодействия. С точки зрения вопросов управления и самоорганизации актуальны ситуации, когда коллективные явления развиваются при слабой связи между элементами или несильном воздействии на них. Даже если общая физическая картина, связанная с синхронизацией, сложна и многогранна, анализ синхронизации можно чрезвычайно упростить для слабых возмущений, рассматривая ее в рамках динамики фаз колебаний. В основе математической теории коллективных явлений в таких системах лежит фазовое описание, при котором главное внимание уделяется динамике фазы колебания элемента.

Фазовое описание активно используется для изучения различных систем. Даже при сильно нелинейной динамике и неоднородности движения, как в нейроподобных системах, в системе можно ввести фазу. Более того, описывать динамику системы с помощью фазы и исследовать коллективные эффекты в рамках такого описания возможно и при работе с экспериментальными данными с высоким уровнем шума либо большой погрешностью измерений. Хотя фазовое описание применялось к многочисленным проблемам в разных областях науки, его использование в области гидродинамики было ограниченным, особенно в отношении синхронизации. Опираясь на фазовое описание, можно получить информацию необходимую для управления течениями в гидродинамической системе. В настоящей работе фазовое описание строится для связанных ячеек пористой среды; задача решается полностью аналитически, без использования численного счета.

Синхронность больших ансамблей связанных элементов можно охарактеризовать параметрами порядка — средними полями. Нередко эволюция этих коллективных переменных оказывается на удивление простой, что делает возможным описание с использованием лишь нескольких параметров порядка. Таким образом пытаются построить точные замкнутые малоразмерные математические модели динамики первых нескольких параметров порядка. Эти модели представляют собой полезные инструменты для понимания механизмов, лежащих в основе более сложных коллективных явлений: например, взаимодействующие ансамбли описываются с помощью связанных уравнений для соответствующих параметров порядка.

Для определенного класса ансамблей фазовых систем Отт (E. Ott) и Антонсен (T. M. Antonsen) развили аналитический подход [E. Ott, T. M.

Antonsen, Chaos **18**, 037113 (2008)], позволяющий получить замкнутые уравнения для комплексных параметров порядка ансамблей фазовых элементов. До сих пор, однако, отсутствовало описание ситуаций в окрестности решения Отта–Антонсена. В настоящей работе такое описание строится в рамках формализма так называемых "круговых кумулянтов" [1]. Эти величины можно считать специальными комплексными параметрами порядка для ансамблей фазовых элементов. Вместе с тем демонстрируется существование инвариантного решения, расширяющего решение Отта–Антонсена. Свойства реальных систем не так далеки от тех, при которых справедлива теория Отта–Антонсена. Однако, даже для слабых нарушений этих свойств прежде не получалось построить обобщение теории на протяжении достаточно длительного времени. Введение формализма круговых кумулянтов позволило построить эти обобщения.

В диссертационной работе показана возможность и перспективность использования формализма круговых кумулянтов для альтернативного описания динамики ансамблей фазовых элементов. Для систем типа Отта–Антонсена данный формализм позволяет получать точные уравнения для динамики параметров порядка.

Целью настоящей работы является изучение коллективных явлений в гидродинамических системах в рамках фазового описания; в частности, построить обобщение теории Отта–Антонсена. Для достижения цели были решены следующие задачи:

1. Показана возможность использования фазового описания для гидродинамических систем на примере термоконцентрационной конвекции с эффектом Соре в связанных ячейках пористой среды.
2. Исследована синхронизация колебаний течений в ячейках. Найдено решение для устойчивого синхронного режима.
3. Описана динамика системы в окрестности решения Отта–Антонсена. Доказано, что это решение является нейтрально устойчивым для ансамблей идентичных элементов и притягивающим при неидеальной идентичности элементов.
4. Найдено более общее решение, чем решение Отта–Антонсена.
5. Построена теория возмущений для широкого круга задач, выходящих за рамки применимости оригинальной теории Отта–Антонсена.
6. Разработаны способы подавления численной неустойчивости счета с оборванными кумулянтными разложениями при минимальной потере точности.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Колебания течений термоконцентрационной конвекции в смежных ячейках пористой среды синхронизируются при достаточно сильной связи через поле температуры на общей стенке. Их синхронизация может быть количественно охарактеризована в рамках построенного в работе фазового описания. [2]

2. В рамках формализма круговых кумулянтов могут быть получены семейства точных решений для динамики ансамблей фазовых элементов (осцилляторов). Эти решения являются расширением теории Отта–Антонсена и соответствуют двухгрупповым состояниям ансамблей. Макроскопическая динамика ансамбля описывается замкнутой системой уравнений для первого и второго кумулянтов. [3]
3. При нарушении условий применимости оригинальной теории Отта–Антонсена использование формализма круговых кумулянтов позволяет получить бесконечные цепочки уравнений макроскопической динамики ансамбля, которые являются обобщением теории Отта–Антонсена. Цепочка уравнений хорошо сходится для случая внутреннего шума (например, теплового); при малой интенсивности шума первые два уравнения дают достаточную точность описания коллективной динамики. [1, 4]
4. Применение формализма круговых кумулянтов позволяет строить приближенные математические модели макроскопической динамики при аномальной диффузии; при этом нет проблем с разрывами и отрицательными значениями поля концентрации. [5]

Научная новизна работы:

1. Показана возможность применения фазового описания для изучения синхронизации в гидродинамических системах на примере конкретной физической задачи: колебательной термоконцентрационной конвекции с эффектом Соре в смежных ячейках пористой среды [2, 6]. Задача была решена полностью аналитически, в противоположность работам других авторов, в которых для подобных систем используется только численное моделирование. Подобные работы начали появляется в течении последних 10 лет.
2. Введен формализм круговых кумулянтов для макроскопического описания ансамблей ориентационных и фазовых элементов [1].
3. На основе формализма построено частное обобщение теории Отта–Антонсена в терминах круговых кумулянтов для систем иерархически связанных осцилляторов [3], это решение расширяет оригинальную теорию.
4. Построена теория возмущений для систем связанных фазовых элементов с внутренним шумом, при котором условия применимости теории Отта–Антонсена нарушены [1]. Новое обобщение теории позволяет описать макроскопическую динамику реальных систем [4].
5. Разработаны два метода подавления численной неустойчивости при обрывании кумулянтных разложений [7].
6. На основании формализма круговых кумулянтов предложен подход, позволяющий строить приближенные модели макроскопической динамики уравнения Фоккера-Планка с производной дробного порядка, которое описывает системы с аномальной диффузией [5, 8].

Теоретическая и практическая значимость работы.

Применение фазового описание в гидродинамических задачах позволит расширить знания об управлении потоками, путем изучения коллективных явлений, в частности, синхронизации течений. Интерес представляют задачи, где осцилляторы обладают слабой связью, данное свойство присуще во множестве реальных систем. С теоретической точки зрения значимо, что в данной работе впервые были строго аналитически получены уравнения для фаз колебаний.

Использование формализма круговых кумулянтов позволило описать динамику систем и построить теорию возмущений для случая внутреннего шума, когда условия применимости оригинальной теории Отта–Антонсена нарушены. Также удалось получить расширение оригинальной теории для случая отсутствия внутреннего шума. Кумулянтный подход дает простую математическую систему дифференциальных уравнений, что позволяет увеличить скорость численного моделирования макроскопической динамики ансамблей.

Исследования, представленные в диссертации, были поддержаны грантами РНФ–DFG № 19-42-04120, РНФ № 17-12-01534, № 23-12-00180, г/бюджетными темами № 121112200078-7, № 124021600038-9 и выполнялись в рамках научного проекта поддержанного Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2024-535 от 23.04.2024).

Методология и методы исследования.

В ходе диссертационного исследования широко используются аналитические и численные методы. Для аналитической части диссертации применяются: метод фазовой редукции для колебательных систем с устойчивым предельным циклом, метод описания динамики систем с тепловым шумом посредством уравнения Фоккера–Планка, метод динамики характеристических функций, метод многих масштабов, слабонелинейный анализ. Для прямого численного моделирования макроскопической динамики ансамблей используется метод Рунге–Кутта–Мерсона.

Степень достоверности полученных результатов подтверждается согласием между численным моделированием и строгими аналитическими результатами; совпадением результатов, полученных разными методами и в рамках разных подходов; согласием результатов диссертационных исследований в предельных случаях с известными ранее результатами; внутренней непротиворечивостью результатов.

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 8 статей, включая 5 статей в периодических изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и Web of Science [1, 3, 4, 5, 7], 2 работы в журналах из списка ВАК [2, 8], 1 публикация в сборнике научных статей [6]. Также было опубликовано 15 тезисов докладов конференций, приведенных ниже.

Апробация работы.

Результаты работы были представлены на следующих научных конференциях: V, VI Всероссийская конференция Пермские гидродинамические научные чтения (Пермь, 2018, 2019 гг.); Международная школа и конференция "Patterns of Synchrony: Chimera States and Beyond" (Trieste, Italy, 2019 г.); XVIII, XIX, XX Научная школа "Нелинейные волны" (Нижний Новгород, 2018, 2020, 2022 гг.); XXI, XXII, XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2019, 2021, 2023 гг.); XXIX, XXX Всероссийская научная конференция "Нелинейные дни в Саратове для молодых" (Саратов, 2021, 2023 гг.); Международный симпозиум "Неравновесные процессы в сплошных средах" (Пермь, 2017, 2021 гг.); Международная научная конференция "Динамические системы. Теория и приложения" (Нижний Новгород, 2022 г.); Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2022 (Сочи, 2022 г.); Всероссийская конференция "Математические проблемы механики сплошных сред" (Новосибирск, 2024 г.).

Результаты исследований также были представлены на научных семинарах Института механики сплошных сред УрО РАН:

- Семинар № 6-2023 "Фазовое описание для колебательной термоконцентрационной конвекции в пористой среде" (19 апреля 2023 г.)
- Семинар № 9-2023 "Макроскопическая намагниченность XY-макроспиновой системы в рамках обобщенной теории Отта–Антонсена" (31 мая 2023 г.)
- Семинар № 10-2023 "Кумулянтное описание синхронизации гидродинамических систем" (28 июня 2023 г.)

Личный вклад автора. Автором диссертации построено аналитическое описание слабонелинейных режимов конвекции и фазовое описание для таких систем; получены и аналитически исследованы уравнения двухкумулянтного приближения. Написаны вычислительные программы для численного моделирования задач, получена основная часть численных результатов. Постановка задач, результаты исследования и их интерпретация обсуждалась с научным руководителем Ю.Л. Райхером и другими соавторами публикаций. Выбор теоретических моделей и методов решения осуществлялся совместно с Д.С. Голдобиным. Подготовка публикаций проводилась совместно с Д.С. Голдобиным.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы (120 наименований). Работа содержит 29 рисунков. Общий объём диссертации составляет 130 страницы.

Основное содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, сформулирована цель и поставлены задачи, отражена научная новизна исследований, описана теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены положения, выносимые на защиту, выполнен обзор научной литературы по теме диссертационного исследования.

В обзоре литературы освещены актуальные научные работы по теме диссертации: исследования коллективной динамики ансамблей связанных осцилляторов в различных системах, работы, в которых строится фазовое описание для сложных систем с распределенными параметрами, в частности, гидродинамических; состояние исследований термоконцентрационной конвекции в пористой среде, эффекта Соре.

Первая глава посвящена исследованию термоконцентрационной конвекции двухкомпонентной жидкости в подогреваемых снизу смежных горизонтальных ячейках пористой среды в поле тяжести. При колебательной неустойчивости синхронизация течений жидкости в смежных ячейках пористой среды может быть изучена в рамках фазового описания.

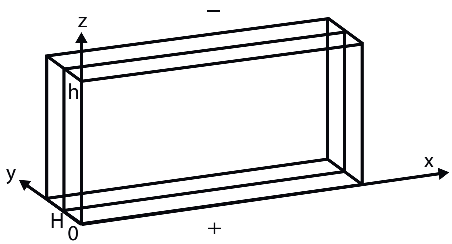

Рис. 1: Геометрия системы.

Для каждой ячейки полагается фиксированный тепловой поток и отсутствие потока примеси через горизонтальные границы (рис. 1). Движения жидкости описываются в приближении Дарси–Буссинеска с учетом эффекта Соре (эффект термодиффузии): в этом случае плотность жидкости $\rho = \rho_0(1-\beta(T-T_0)+\beta_C(C-C_0))$, где $\rho_0 = \rho(T_0, C_0)$, T — температура, C — концентрация тяжелой компоненты жидкости, β — коэффициент теплового расширения, $\beta_C = \rho^{-1}(\partial\rho/\partial C)$, и диффузионный поток примеси $\vec{j} = -D\,(\nabla C + \alpha_T(C/T)\nabla T)$, где α_T — константа термодиффузии.

Дополнительно, для описания теплообмена между ячейками в рассматриваемой системе вводится слагаемое, описывающее пространственно распределенный источник/сток тепла для каждой ячейки. Таким образом, в уравнениях для конвекции Соре в ячейках появляется связь через поле температуры.

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 - \frac{\nu m}{K}\vec{v}_1 + g(\beta T_1 - \beta_C C_1)\vec{e}_z\,, \qquad \mathrm{div}\vec{v}_1 = 0\,,$$
$$\frac{\partial C_1}{\partial t} + (\vec{v}_1\cdot\nabla)C_1 = D \triangle C_1 + \frac{\alpha_T C_0 D}{T_0}\triangle T_1\,,$$
$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{1}{b}(\vec{v}_1\cdot\nabla)T_1 = \chi \triangle T_1 + Q_1\,,$$

$$z = 0, h: \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} = A, \quad v_{1z} = 0, \quad j_{1z} = 0\,,$$

где $\vec{v}_1$ — средняя скорость жидкости в порах, ν — кинематическая вязкость, m — пористость среды, K — коэффициент проницаемости, h — высота ячейки, $-g\vec{e}_z$ — ускорение свободного падения, b — отношение теплоемкости пористой среды, насыщенной жидкостью, к части этой теплоемкости, приходящейся на жидкость в порах ($b > 1$), χ — температуропроводность пористой среды, насыщенной жидкостью, Q — распределенный источник тепла. Индекс 1 означает, что поля относятся к первой ячейке. Аналогичная система уравнений получится для второй ячейки.

Безразмерные управляющие параметры системы: N — параметр плавучести, Ra — число Рэлея–Дарси, S — обратное число Льюиса.

В ***разделе (1.2)*** для описанной конфигурации системы выводятся уравнения, описывающие нелинейную динамику длинноволновых структур. Уравнения выводятся с использованием метода многих масштабов.

В ***разделе (1.3)*** делается допущение о тонких ячейках, рассматривается двумерная постановка задачи. Вследствие того, что вопрос о коллективных эффектах актуален для колебательных режимов, аналитическое описание системы в рамках слабонелинейного анализа строится вблизи границы колебательной неустойчивости системы. Для понимания актуального диапазона параметров строится карта режимов и вычисляется пороговое значение числа Рэлея–Дарси Ra_0, выше которого существует колебательная неустойчивость.

Далее, для длинноволновых конвективных течений получены уравнения медленной динамики амплитуды колебательных мод с тепловой связью между ячейками. Из этих уравнений, в свою очередь, выводятся уравнения для фаз колебаний $\varphi_{1,2}$, которые являются ключевыми уравнениями фазового описания:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) - \sin\beta)\,, \\ \dot{\varphi}_2 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) - \sin\beta)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

где Ω_0 — частота конечноамплитудного колебательного течения, K — коэффициент связи, β — фазовый сдвиг связи; в диссертационной работе получены аналитические выражения для этих параметров. Уравнения (1) — это система типа Курамото–Сакагучи, одна из классических моделей для изучения коллективных колебаний в нелинейной динамике. Для описания коллективной динамики большого числа взаимодействующих “фазовых” элементов может быть также применен метод круговых кумулянтов [1].

В ***разделе (1.4)*** исследуется синхронизация колебаний в смежных ячейках. В реальных условиях ячейки не могут быть идеально идентичными, для описания чего вводится малая расстройка частот колебательного течения в ячейках. Найдены соотношения между силой связи и расстройкой частот, при которых в системе существует режим синхронизации течений. Получено решение для устойчивого синхронного режима.

В ***разделе (1.5)*** рассматривается реальная система, для которой строится зависимость индекса синхронизации от управляющих параметров.

Во **второй главе** рассматривается система фазовых осцилляторов, дается краткое введение в теорию Отта–Антонсена (ОА) и строится ее обобщение с помощью круговых кумулянтов.

В ***разделах (2.1) и (2.2)*** приводится теория ОА для идентичных и неидентичных осцилляторов.

Широкий и важный класс систем фазовых осцилляторов, демонстрирующих коллективные явления, описывается уравнениями вида:

$$\dot{\varphi}_k = \varOmega(t) + \mathrm{Im}(2h(t)\, e^{-i\varphi_k}), \qquad k = 1, ..., N\,, \tag{2}$$

где $\varOmega(t)$ и $h(t)$ — произвольные действительная и комплекснозначная функции времени. Например, этому виду соответствует классическая система Курамото, для которой $2h(t) = \mu N^{-1} \sum_{l=1}^{N} e^{i\varphi_l}$. Для уравнения (2) может быть записано мастер-уравнение, определяющее эволюцию плотности вероятности нахождения в конкретном состоянии $w(\varphi, t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big((\varOmega(t) - ih(t)e^{-i\varphi} + ih^*(t)e^{i\varphi})w\Big) = 0\,. \tag{3}$$

В Фурье-пространстве $w(\varphi, t) = (2\pi)^{-1}\big[1 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j(t)e^{-ij\varphi} + a_j^*(t)e^{ij\varphi})\big]$, где $a_j(t)$ — комплексные моды (коэффициенты Фурье-разложения), мастер-уравнение принимает вид:

$$\dot{a}_j = ji\varOmega(t)\, a_j + jh(t)a_{j-1} - jh^*(t)a_{j+1}\,, \tag{4}$$

где $j = 1, 2, ...$ и, по построению, $a_0 = 1$. Последнее уравнение допускает частное решение вида $a_j = a_1^j$. Оказывается, что динамика системы может происходить на некотором множестве, задаваемом соотношением $a_j = a_1^j$ и получившем название множества ОА. Динамика системы на этом множестве описывается обыкновенным дифференциальным уравнением для комплексной переменной a_1. Важно, что a_1 является параметром порядка $Z = \langle e^{i\varphi}\rangle = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} w(\varphi, t)\, \mathrm{d}\varphi = a_1(t)$. В итоге, на множестве ОА динамика системы точно описывается нуль-мерным уравнением для параметра порядка Z:

$$\dot{Z} = i\varOmega(t)\, Z + h(t) - h^*(t)Z^2\,. \tag{5}$$

В случае неидентичных осцилляторов с лоренцевым распределением собственных частот, в уравнения для параметра порядка (5) добавляется дополнительное слагаемое:

$$\dot{Z}_1 = (i\Omega_0 - \gamma)Z_1 + h(t) - h^*(t)\, Z_1^2 \tag{6}$$

где Ω_0 и γ — медиана и полуширина распределения частот.

Известно, что при неполной идентичности осцилляторов множество ОА из нейтрально устойчивого превращается в “слабо” притягивающее. Для реальных систем множество ОА оказывается не просто семейством частных решений, а аттрактором. Это дает возможность использования теорию ОА для описания многих задач.

В ***разделе (2.3)*** вводится понятие “круговых” кумулянтов, которые являются специальными комплексными параметрами порядка для ансамблей фазовых элементов.

Описание динамики системы в окрестности множества ОА в терминах Z_j (или a_j) оказывается проблематичным для состояний с высокой степенью синхронности, когда $|Z_1|$ близко к 1 и ряд $Z_j \sim (Z_1)^j$ обладает медленной сходимостью. В представлении круговых кумулянтов для фазовых ансамблей, эта проблема полностью снимается [3].

Например, первые три круговых кумулянта связаны с традиционными параметрами порядка следующим образом: $\varkappa_1 = Z_1$, $\varkappa_2 = Z_2 - Z_1^2$, $\varkappa_3 = (Z_3 - 3Z_2Z_1 + 2Z_1^2)/2\,$.

В работе получена цепочка уравнений, описывающая динамику системы в терминах круговых кумулянтов:

$$\dot{\varkappa}_j = j(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_j + h\delta_{1j} - h^*(j^2\varkappa_{j+1} + j\sum_{m=0}^{j-1}\varkappa_{j-m}\varkappa_{m+1}). \tag{7}$$

Эта система уравнений расширяет теорию ОА, соответствующую тривиальному частному случаю $\varkappa_1 = Z_1$ и $\varkappa_{n\geq 2} = 0$, при котором в (7) остается только первое уравнение.

Как следует из системы уравнений (7), динамика $\varkappa_j$ определяется значениями $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ..., $\varkappa_{j+1}$, и $\varkappa_{j+1}$ входит через слагаемое $(-j^2h^*\varkappa_{j+1})$. Таким образом, в общем случае выделить замкнутую систему конечного числа уравнений не представляется возможным.

В ***разделе (2.4)*** показано существование инвариантного могообразия, расширяющего множество ОА. Динамика всех четных круговых кумулянтов подобна динамике второго, нечетные кумулянты старше первого равны 0. Это частное решение подчиняется замкнутой системе уравнений для первого и второго кумулянтов:

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}_1 &= (i\Omega - \gamma)\varkappa_1 + h - h^*(\varkappa_2 + \varkappa_1^2)\,, \\ \dot{\varkappa}_2 &= 2(i\Omega - \gamma - 2h^*\varkappa_1)\varkappa_2\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Также выяснен геометрический смысл решений этого семейства: они являются двухгрупповыми, а величина $|\varkappa_2|$ тем больше, чем больше дистанция между группами.

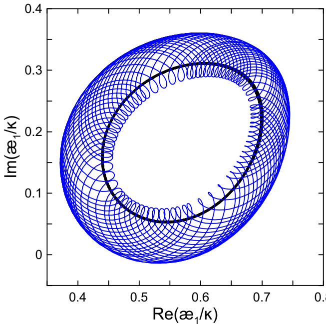

Рис. 2: Динамика двухгруппового состояния при $\gamma = 0$ (тонкая кривая) в сравнении с решением Отта–Антонсена (жирная кривая).

В качестве примера использования этого расширения теории ОА, описана коллективная динамика двух симметрично связанных ансамблей Курамото–Сакагучи (простейшая классическая модель для изучения самоорганизации в ансамблях иерархически связанных осцилляторов):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_k &= \omega_k + \frac{\mu}{N}\sum\nolimits_{l=1}^{N} \sin(\varphi_l - \varphi_k - \alpha) + \frac{\nu}{N}\sum\nolimits_{l=1}^{N} \sin(\psi_l - \varphi_k - \alpha)\,, \\ \dot{\psi}_k &= \omega_k + \frac{\mu}{N}\sum\nolimits_{l=1}^{N} \sin(\psi_l - \psi_k - \alpha) + \frac{\nu}{N}\sum\nolimits_{l=1}^{N} \sin(\varphi_l - \psi_k - \alpha)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь φ_k и ψ_k — фазы в ансамблях размера N, μ и $\nu = 1-\mu$ — параметры связи внутри ансамбля и с другим ансамблем соответственно, α — фазовый сдвиг связи. Связь типа Курамото–Сакагучи можно видеть в системе уравнений (1), полученных для конвективных ячеек.

В данной системе наблюдаются “химерные состояния” (переходное состояние между полностью синхронными и беспорядочными колебаниями), в которых первый ансамбль полностью синхронизирован, $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_N$, а второй находится в состоянии частичной синхронизации и описывается параметрами порядка Z_j. На рис. 2, где параметр порядка первого ансамбля $\kappa = e^{i\varphi_1}$ ($|\kappa| = 1$), параметр порядка второго ансамбля $Z_1 = \varkappa_1$ совершает квазипериодические колебания в системе отсчета, вращающейся с φ_1. Здесь интересны режимы динамики системы, в которых осцилляторы второго ансамбля формируют две группы. Исследована динамика таких двухгрупповых химер при различных начальных условиях.

В **третьей главе** исследуются системы фазовых элементов (осцилляторов) с внутренним шумом. Изучается возможность построения теории возмущений для анзаца Отта–Антонсена в терминах круговых кумулянтов. Кумулянтное представление удобно тем, что все старшие кумулянты исчезают на множестве ОА, что делает их естественными переменными для построения теории возмущений. В частности, в настоящей главе теория возмущений строится для систем с внутренним шумом; при этом интенсивность шума выступает малым параметром. Получены замкнутые уравнения динамики параметров порядка, учитывающие первые поправки по интенсивности шума.

В системах с внутренним шумом присутствует дополнительное слагаемое, нарушающее применимость оригинальной теории ОА:

$$\dot{\varphi}_k = \Omega(t) + \mathrm{Im}(2h(t)\, e^{-i\varphi_k}) + \sigma\xi_k(t), \qquad k = 1, ..., N\,, \tag{10}$$

где ξ_k — независимые белые гауссовы шумы: $\langle\xi_k(t)\rangle = 0$, $\langle\xi_k(t)\xi_m(t')\rangle = 2\delta_{km}\delta(t-t')$; σ — амплитуда шума. Цепочка уравнений для параметров порядка системы (10) принимает вид:

$$\dot{Z}_j = ji\Omega Z_j + jhZ_{j-1} - jh^* Z_{j+1} - \sigma^2 j^2 Z_j\,. \tag{11}$$

При $\sigma = 0$ это уравнение подчиняется теориям Отта–Антонсена и Ватанабэ–Строгаца. В данной главе изучается возможность построения теории возмущений для теории ОА для малых ненулевых σ. Подобно случаю нулевого внутреннего шума, уравнение (11) может быть обобщено на случай неидентичных осцилляторов с лоренцевым распределением частот:

$$\dot{Z}_j = j(i\Omega_0 - \gamma)Z_j + jhZ_{j-1} - jh^* Z_{j+1} - \sigma^2 j^2 Z_j\,. \tag{12}$$

В работе выведены уравнения для $\varkappa_j$:

$$\begin{aligned}\dot{\varkappa}_j = j(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_j + h\delta_{j1} - h^*\big(j^2\varkappa_{j+1} + j\sum\nolimits_{m=0}^{j-1}\varkappa_{j-m}\varkappa_{m+1}\big) - \\ - \sigma^2\big(j^2\varkappa_j + j\sum\nolimits_{m=0}^{j-2}\varkappa_{j-1-m}\varkappa_{m+1}\big)\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Для неисчезающего шума, как правило, все кумулянты отличны от нуля. Однако для слабых шумов можно ожидать, что кумулянты старшего порядка будут малы. Анализ полной системы (13) показывает, что предположение $|\varkappa_j| \sim \sigma^{2(j-1)}$ соответствует динамике всех $\varkappa_j$. Это дает основания для приближения, при котором все кумулянты выше второго предполагаются равными нулю.

В результате можно получить замкнутую редуцированную систему уравнений для первого и второго круговых кумулянтов:

$$\begin{aligned}\dot{\varkappa}_1 &= (i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_1 + h - h^*\varkappa_2 - h^*\varkappa_1^2 - \sigma^2\varkappa_1\,,\\ \dot{\varkappa}_2 &= 2(i\Omega_0 - \gamma)\varkappa_2 - 4h^*\varkappa_1\varkappa_2 - \sigma^2(4\varkappa_2 + 2\varkappa_1^2)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

В ***разделе (3.2)*** в качестве примера рассмотрена динамика двух симметричных связанных ансамблей Курамото–Сакагучи (9), в которой добавлен внутренний шум с амплитудой σ.

Установлено, что внутренний шум ликвидирует консервативность динамики параметров порядка и одногрупповое решение становится притягивающим (при $\sigma = 0$ оно нейтрально устойчиво). Траектория системы стремится к предельному циклу на плоскости Z/Y, где Y и Z — параметры порядка полностью и частично синхронизованного ансамблей соответственно. Шум оказывает стабилизирующее воздействие на динамику системы [1]. По мере увеличения σ предельный цикл сжимается. На рис. 3 приведены примеры притягивающих циклов при различных значениях σ.

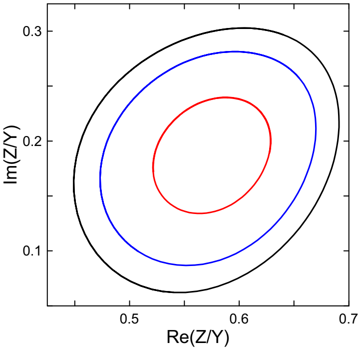

Рис. 3: Устойчивые предельные циклы при $\gamma = 0$ и различной интенсивности внутреннего шума, от периферии к центру: $\sigma = 0.01$, 0.02 и 0.03.

В ***разделе (3.3)*** изучается устойчивость оборванных кумулянтных разложений при численном счете. Кумулянтные цепочки бесконечны и для ряда задач их обрывание может привести к численной неустойчивости. Рассматривается несколько способов подавления неустойчивости: с помощью введение искусственной диссипации и путем подавления слагаемых, ответственных за неустойчивость.

В ***разделе (3.4)*** выводятся уравнения стохастической динамики фазы колебаний течения при случайной флуктуации внешних температурных условий для термоконцентрационной конвекции в пористой среде. Применяется подход круговых кумулянтов для исследования проблемы степени синхронности колебаний конвективных течений в связанных ячейках.

В ***разделе (3.5)*** используется подход круговых кумулянтов для построения маломодового макроскопического описание динамики ансамблей фазовых элементов, подверженных действию негауссова белого шума. Получены двухкумулянтные редуцированные уравнения для альфаустойчивых шумов. Поскольку маломодовое описание математически соответствует учету только ведущих фурье-гармоник распределения плотности вероятности, в рамках использованного подхода не возникает проблемы нефизичного поведения плотности вероятности (формирования разрывов и т.п.), типичной для уравнений типа Фоккера–Планка, в которых учитываются ведущие негауссовы поправки для шума, но кумулянтный ряд для шума оборван [5].

В **заключении** представлены основные результаты и выводы диссертации:

1. Использовано фазовое описание для изучения динамики в гидродинамической системе двух связанных конвективных ячеек. Построено аналитическое описание системы в рамках слабонелинейного анализа вблизи границы колебательной неустойчивости и найдены уравнения для фаз колебаний конвективных течений в двух ячейках. Полученные уравнения образуют систему типа Курамото–Сакагучи. Исследована синхронизация колебаний в смежных ячейках. Найдены соотношения между силой связи и частотой свободных колебаний, при которых в системе существует режим синхронизации течений. Получено решение для устойчивого синхронного режима.
2. В рамках формализма круговых кумулянтов построено описание поведения ансамблей в окрестности решения Отта–Антонсена. Получено более общее частное решение. Новое решение позволяет описывать динамику двухгрупповых состояний ансамбля в конечной окрестности решения ОА (являющегося одногрупповым). Использование подхода круговых кумулянтов продемонстрировано на системе двух симметричных связанных ансамблей Курамото–Сакагучи. Исследована динамика системы при разных начальных условиях, изучены состояния "химеры".
3. Построена теория возмущений для определенного набора задач, выходящих за рамки условий применимости оригинальной теории Отта–Антонсена. Рассмотрена проблема численной неустойчивости счета с оборванными кумулянтными разложениями на примере связанных ансамблей Курамото–Сакагучи и способы подавления такой неустойчивости. Было проанализировано два варианта подавления, с помощью введения искусственной диссипации и путем подавления слагаемых, ответственных за неустойчивость.
4. В рамках подхода круговых кумулянтов удалось построить достаточно точное макроскопическое описание динамики популяций фазовых элементов (осцилляторов) с негауссовыми дельтакоррелированными шумами (рассматривается α-устойчивый шум). Важно, что такие приближенные модели подходят для изучения ряда задач аномальной диффузии; при этом не появляется проблем с возникновением разрывов и отрицательных значений поля концентрации

Публикации по теме диссертации

[1] **Tyulkina, I. V.** Noisy Oscillator Populations beyond the Ott-Antonsen Ansatz / I. V. Tyulkina, D. S. Goldobin, L. S. Klimenko, A. Pikovsky // Physical Review Letters. — 2018. — Vol. 120. — P. 264101. (**Q1**)

[2] **Тюлькина, И. В.** Синхронизация конвективных течений двухкомпонентной жидкости в смежных ячейках пористой среды / И. В. Тюлькина, Д. С. Голдобин // Вестник Пермского университета. Физика. — 2023. — № 2. — С. 59—68.

[3] **Тюлькина, И. В.** Двухгрупповые решения для динамики ансамблей фазовых систем типа Отта-Антонсена / И. В. Тюлькина, Д. С. Голдобин, Л. С. Клименко, А. Пиковский // Известия Вузов. Радиофизика. — 2018. — Т. 61. — № 8–9. — С. 718–728.

[4] **Tyulkina, I. V.** Collective in-plane magnetization in a two-dimensional XY macrospin system within the framework of generalized Ott–Antonsen theory / I. V. Tyulkina, D. S. Goldobin, L. S. Klimenko, I. S. Poperechny, Y. L. Raikher // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 2020. — Vol. 378. — Iss. 2171. — P. 20190259. (**Q1**)

[5] Dolmatova A. V. Circular cumulant reductions for macroscopic dynamics of oscillator populations with non-Gaussian noise / A. V. Dolmatova, **I. V. Tyulkina**, D. S. Goldobin // Chaos. — 2023. — Vol. 33. — P. 113102. (**Q1**)

[6] **Тюлькина, И. В.** Фазовое описание колебательной термоконцентрационной конвекции в смежных слоях пористой среды / И. В. Тюлькина, Д. С. Голдобин // В сборнике: Неравновесные процессы в сплошных средах. Сборник статей по материалам Международного симпозиума. Пермь. — 2021. — С. 193–197.

[7] **Tyulkina, I. V.** Stabilization of direct numerical simulation for finite truncations of circular cumulant expansions / I. V. Tyulkina, D. S. Goldobin, A. Pikovsky // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2019. — Vol. 581. — P. 012008.

[8] Долматова, А. В. Описание макроскопической динамики популяций фазовых элементов с белым негауссовым шумом на основе подхода круговых кумулянтов / А. В. Долматова, **И. В. Тюлькина**, Д. С. Голдобин // Вестник Пермского университета. Физика. — 2021. — № 3. — С. 5–12.

Тюлькина Ирина Валерьевна

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Подписано в печать ______2024. Формат 60 × 90/16. Тираж 100 экз. Усл. печ. л. 1. Заказ.