

Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет»
Физический факультет
Кафедра физики и технологии

На правах рукописи



Ширяева Мария Андреевна

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ИНЕРЦИОННО-ВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЙ
ЖИДКОСТИ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ
ЦИЛИНДРЕ**

1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Козлов В.Г.

Пермь – 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| ГЛАВА 1. ГИДРОДИНАМИКА ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМ | 12 |
| 1.1. Инерционно-волновые режимы в замкнутых вращающихся полостях..... | 12 |
| 1.2. Нелинейные режимы инерционных волн..... | 16 |
| 1.3. Осредненные эффекты во вращающихся системах..... | 17 |
| 1.4. Обоснование выбора задачи исследования..... | 19 |
| ГЛАВА 2. ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ С НАКЛОННЫМИ ТОРЦАМИ | 22 |
| 2.1. Методика эксперимента..... | 22 |
| 2.1.1. Экспериментальная установка..... | 22 |
| 2.1.2. Методика вычисления скорости пульсационного течения..... | 27 |
| 2.1.3. Методика исследования осредненных потоков..... | 31 |
| 2.2. Полость с параллельным наклоном торцов..... | 31 |
| 2.2.1. Пульсационное течение..... | 31 |
| 2.2.1.1. Пространственная структура волновых режимов..... | 34 |
| 2.2.1.2. Влияние угла наклона торцов..... | 43 |
| 2.2.1.3. Временная динамика инерционных волн..... | 47 |
| 2.2.1.4. Влияние числа Экмана на волновые процессы..... | 51 |
| 2.2.2. Осредненные течения, генерируемые инерционными волнами..... | 54 |
| 2.3. Полость с непараллельным наклоном торцов..... | 65 |
| 2.3.1. Режимы пульсационного течения..... | 65 |
| 2.3.2. Осредненное течение жидкости..... | 68 |
| 2.4. Анализ результатов экспериментов..... | 71 |
| 2.5. Основные выводы по главе..... | 80 |
| ГЛАВА 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ОСРЕДНЁННЫХ ТЕЧЕНИЙ И НАДКРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ | 82 |
| 3.1. Полость с параллельным наклоном торцов..... | 82 |

| | |
|--|------------|
| 3.1.1. Пороги неустойчивости осредненного течения..... | 82 |
| 3.1.2. Механизм неустойчивости в различных режимах..... | 89 |
| 3.1.3. Надкритическая динамика осредненных структур..... | 94 |
| 3.2. Полость с непараллельным наклоном торцов..... | 97 |
| 3.2.1. Пороги неустойчивости осредненного течения..... | 97 |
| 3.2.2. Надкритическая динамика осредненных структур..... | 102 |
| 3.3. Основные выводы по главе..... | 106 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... | 107 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... | 110 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Во вращающейся однородной жидкости под действием силы Кориолиса возникает внутреннее волновое движение, известное как инерционные волны [1]. Этот тип движения широко распространён в природе, например, в океанах, атмосферах и жидких ядрах планет, а также конвективных зонах звезд. Для существования этих волн необходимо, чтобы частота вносимых возмущений не превышала удвоенную частоту вращения самой системы. В неограниченной жидкости волны распространяются от источника колебаний вдоль конусообразных характеристических поверхностей, образованных свободными сдвиговыми слоями. При этом угол раствора характеристического конуса определяется только частотой. В связи с гео- и астрофизическими приложениями в качестве способов возбуждения инерционных волн традиционно рассматривают колебательные движения, характерные для планет и спутников: прецессия оси вращения [2], упругие приливные деформации [3], а также периодические изменения скорости вращения – либрации [4 – 6]. Большой обзор литературы, посвященный влиянию гармонического воздействия на вращающиеся системы, можно найти в [7].

Инерционные волны имеют много общего с внутренними волнами в стратифицированной жидкости, где роль восстанавливающей силы играют силы тяжести и плавучести. В обоих случаях волны подчиняются одинаковому специфическому дисперсионному соотношению, которое не содержит масштаб длины. Благодаря этому наиболее интересные свойства проявляются во вращающихся замкнутых полостях, которые содержат наклонные границы (непараллельные и неперпендикулярные оси вращения). В этом случае при отражении волновых лучей от твердых границ сохраняется угол по отношению к оси вращения, а не к нормали поверхности. В результате в бассейнах со сложной топографией дна возможны эффекты фокусировки, связанные с концентрацией энергии возмущений в так называемые *волновые аттракторы* [8 – 10]. Предполагается, что аттракторы инерционных волн могут возникать в жидких

ядрах или подповерхностных океанах планет и спутников Солнечной системы [11, 12]. Благодаря тому, что в планетарных масштабах числа Экмана достаточно малы, $E = \nu / \Omega_{rot} R^2 \sim 10^{-14} - 10^{-12}$, вся энергия волнового аттрактора сосредоточена в тонких сдвиговых слоях. Здесь ν – кинематическая вязкость жидкости, Ω_{rot} – угловая скорость, R – характерный масштаб длины. В таких условиях развиваются каскадные волновые процессы по сценарию триадных взаимодействий, и происходит переход к волновой турбулентности [10]. Другой тип резонансного движения, характерного для вращающейся жидкости, связан с возбуждением собственных инерционных колебаний – *инерционных мод* [1]. Эти глобальные осциллирующие вихри, которые в осесимметричных полостях напоминают стоячие волны. Причем пространственная структура мод, а также значения собственных частот определяются геометрией полости [13]. С точки зрения геофизических приложений наибольший интерес представляет сферическая геометрия. Тем не менее, основные свойства инерционно-волновых режимов легче исследовать в более простых с геометрической точки зрения полостях. Так, осесимметричные инерционные волны и моды во вращающемся цилиндре с прямыми торцами исследованы в [14 – 16]. В свою очередь, даже небольшое нарушение азимутальной симметрии геометрии торцов качественно меняет характер колебаний жидкости в полости. В этом случае, с одной стороны, на первый план должны выходить эффекты, связанные с возбуждением неосесимметричных резонансных мод. С другой стороны, наличие наклонной стенки может обеспечивать появление эффектов фокусировки волновой энергии в аттрактор [17, 18].

Целью диссертационной работы является экспериментальное изучение инерционно-волновых режимов течений во вращающемся круговом цилиндре с наклонными торцевыми стенками. Для поддержания волнового движения используется либрационное воздействие, связанное с периодическими изменениями скорости вращения.

Задачи исследования:

- разработка методики измерения мгновенных и осреднённых полей скорости;
- изучение пространственной структуры и временной динамики инерционных режимов во вращающемся цилиндре в зависимости от частоты, амплитуды вносимых возмущений, числа Экмана и геометрии торцов;
- построение двухмерной лучевой модели распространения инерционных волн и сравнение с результатами экспериментов;
- расчет значений собственных частот невязких инерционных мод во вращающемся цилиндре;
- исследование структуры осреднённого течения, возбуждаемого резонансными инерционными режимами;
- определение безразмерных параметров, ответственных за интенсивность движения жидкости;
- экспериментальное исследование устойчивости осреднённого азимутального течения, пространственной структуры и временной динамики надкритических течений, определение порогов неустойчивости;
- выявление механизмов неустойчивости; поиск основных безразмерных комплексов, ответственных за устойчивость течения.

Научная новизна. Впервые экспериментально изучена линейная и нелинейная динамика жидкости в либрирующей цилиндрической полости с параллельно (антипараллельно) наклоненными торцами. Совместно с соавтором С.В. Субботиным разработана методика измерения пульсационного течения жидкости в осевом сечении вращающейся полости при наблюдениях за системой из лабораторной (невращающейся) системы отсчеты. Обнаружены три различных инерционно-волновых режима: аттрактор инерционных волн, инерционная мода и режим симметричного отражения волн от стенок полости. Впервые экспериментально получена зависимость толщины сдвиговых слоев в инерционной волне от числа Экмана. Обнаружено, что волны являются

генератором среднего азимутального течения, которое, при увеличении закачиваемой энергии в систему, испытывает неустойчивость.

Теоретическая и практическая значимость работы. Выполненные экспериментальные исследования важны для развития теории гидродинамики вращающихся систем. Выбранная геометрия полости позволяет успешно моделировать линейные и нелинейные режимы аттракторов инерционных волн и мод, которые наблюдаются в реальных гео- и астрофизических системах. Разработанная новая методика вычисления мгновенных полей скорости может применяться для любых быстровращающихся систем, когда нет технической возможности проводить съемку непосредственно во вращающейся системе отсчёта.

Результаты исследований могут использоваться в промышленности в качестве инструмента для управления тепло- и массопереносом. В частности, возбуждение инерционных колебаний жидкости предполагает генерацию интенсивных осреднённых течений, которые смогут обеспечить быстрое равномерное перемешивание, в том числе высоковязких компонентов.

Методология и методы диссертационного исследования. Решение поставленных задач осуществляется проверенным и апробированным методом PIV (Particle Image Velocimetry). Для визуализации течений в жидкость добавляются светорассеивающие частицы нейтральной плавучести, движение которых записывается на скоростную видеокамеру. Кросскорреляционная обработка полученных данных осуществляется с помощью приложения PIVlab [19]. Для исследования характеристик пульсационного течения используются методы спектрального анализа.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Структура и скорость пульсационного движения жидкости во вращающемся цилиндре определяется безразмерной частотой вносимых возмущений и

геометрией торцевых стенок.

- Механизмы возбуждения основных инерционно-волновых режимов течений: фокусировка волновой энергии на замкнутую траекторию (волновой аттрактор) связана с многократным отражением волн от границ полости, что подтверждается результатами разработанной физической модели трассировки волновых лучей; возбуждение резонансных крупномасштабных осциллирующих вихрей (инерционных мод) обусловлено совпадением частоты возмущений с собственными частотами вращающейся жидкости.
- Для измерения мгновенной скорости жидкости в осевом сечении вращающейся полости может использоваться новая методика, основанная на анализе последовательности изображений в различных фазах либраций.
- Скорость жидкости и ширина сдвиговой зоны в инерционной волне зависят от числа Экмана как $\sim \varepsilon E^{-2/5}$ и $\sim E^{1/5}$, соответственно.
- Инерционные волны индуцируют осреднённую азимутальную и меридиональную циркуляцию жидкости; механизм генерации течений связан с нелинейными эффектами в динамических пограничных слоях на стенках полости.
- Условия, при которых в полости возбуждается опережающее, либо отстающее среднее дифференциальное вращение жидкости; за скорость дифференциального вращения отвечает пульсационное число Рейнольдса Re_p .
- Потеря устойчивости осредненного азимутального течения при больших амплитудах либраций связана с развитием триадного резонанса инерционных волн. Вид безразмерного комплекса, отвечающего за развитие неустойчивости, зависит от режима пульсационного движения жидкости (волновой аттрактор или инерционная мода).
- Направление и скорость распространения осреднённых надкритических структур определяется частотами субгармоник триадного резонанса.

Достоверность результатов исследования достигается путем использования апробированного и современного метода измерения кинематических характеристик потоков жидкости и газа. Надежность измеряемых данных обеспечивается сравнением с известными результатами теоретических и численных работ. Верификация структуры инерционно-волновых режимов течений выполняется в авторской двухмерной модели [20].

Апробация диссертационной работы. Результаты исследования были представлены на следующих конференциях: VII Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Красноярск, 2020); Международный симпозиум «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2021); Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2021, 2023); Пермские гидродинамические научные чтения (Пермь, 2022, 2023); Всероссийская конференция «Теплофизика и физическая гидродинамика» (Севастополь, 2021, Сочи, 2022, Махачкала, 2023); XIII Съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023); Международная конференция "НеЗаТеГиУс-2024" (Звенигород, 2024). Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №18-71-10053, Правительства Пермского Края С-26/1191, проектов МК-1779.2021.1.1 и КРЗУ-2023-0002.

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 16 работах:

- 4 статьи [21 – 24], (индексированы в ВАК/WOS/SCOPUS);
- 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [25, 20];
- 6 статей в сборниках научных статей конференций [26 – 31] (индексированы в РИНЦ);
- 4 тезисов докладов конференций [32 – 35] (индексированы в РИНЦ).

Личный вклад автора. Экспериментальные исследования и обработка результатов выполнены лично диссертантом. Обсуждение результатов, анализ и написание научных публикаций осуществлялись совместно с научным руководителем и соавтором к.ф.-м.н. С. В. Субботиным.

Благодарности. Автор диссертационной работы благодарен научному руководителю Виктору Геннадьевичу Козлову за поставленные цели и задачи экспериментального исследования; соавтору к.ф.-м.н. Станиславу Валерьевичу Субботину, за обсуждение и анализ результатов экспериментов во время совместной работы, а также за помощь в технической реализации эксперимента; к.ф.-м.н. Наталье Дмитриевне Шмаковой, за предоставление программного комплекса для спектрального анализа нелинейных режимов инерционных волн.

Структура работы. Текст диссертационного исследования состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем выполненной работы состоит из 120 страниц основного текста, 52 фигур и списка литературы из 109 источников.

Во введении сформулированы цель, задачи, актуальность и новизна диссертационного исследования.

В первой главе представлен обзор литературы по теме научного исследования, показано место исследования среди других авторов со схожей областью интересов, обоснован выбор задачи исследования.

Во второй главе изложены результаты экспериментального исследования линейных инерционно-волновых режимов течений в неравномерно вращающейся цилиндрической полости с наклонными торцами. Получены карты течений, а также законы масштабирования толщины сдвиговых слоев в инерционной волне в зависимости от параметров либраций и числа Экмана. Представлена лучевая модель распространения волновых лучей, проведено сравнение с результатами экспериментов. Исследованы осреднённые течения, генерируемые инерционными волнами.

В третье главе представлены результаты исследования нелинейной динамики резонансных инерционных режимов. Изучены пороги неустойчивости осредненного азимутально потока в зависимости от параметров либраций и геометрии торцов полости. Рассмотрен механизм неустойчивости осредненного течения.

Заключение содержит основные выводы, соответствующие поставленным задачам исследования. Содержание списка литературы основано на научных трудах, опубликованных в рецензируемых научных журналах.

ГЛАВА 1. ГИДРОДИНАМИКА ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

1.1. Инерционно-волновые режимы в замкнутых вращающихся полостях

Вращающаяся однородная по плотности жидкость может поддерживать внутреннее колебательное движение, известное как инерционные волны [1, 36]. Существование этих волн связано с квазиупругими свойствами силы Кориолиса, которая стремится вернуть смещенные в радиальном направлении частицы жидкости в исходное положение. В отсутствие вязкости такое движение было бы эквивалентно колебаниям с круговой поляризацией. Инерционные волны характеризуются необычным дисперсионным соотношением: $\Omega_{osc} = 2\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{rot}$. Отсюда следует, что если частота колебаний Ω_{osc} не превышает удвоенное значение скорости вращения системы Ω_{rot} , частицы жидкости описывают круги в наклонных по отношению к вектору $\boldsymbol{\Omega}_{rot} = \Omega_{rot} \mathbf{z}$ плоскостях. При этом угол между нормалью к плоскостям и осью вращения определяется как $\arccos(\Omega_{osc} / 2\Omega_{rot})$.

Инерционные волны являются поперечными. Это означает, что направление групповой скорости \mathbf{c}_g относительно вектора $\boldsymbol{\Omega}_{rot}$ вращения всегда перпендикулярно фазовой, и определяется по формуле

$$\theta = \pm \arcsin(\Omega_{osc} / 2\Omega_{rot}). \quad (1.1)$$

Если жидкость неограниченна твердыми стенками полости, волны распространяются вдоль характеристических поверхностей, имеющих форму конуса с углом θ к оси вращения (рис. 1.1).

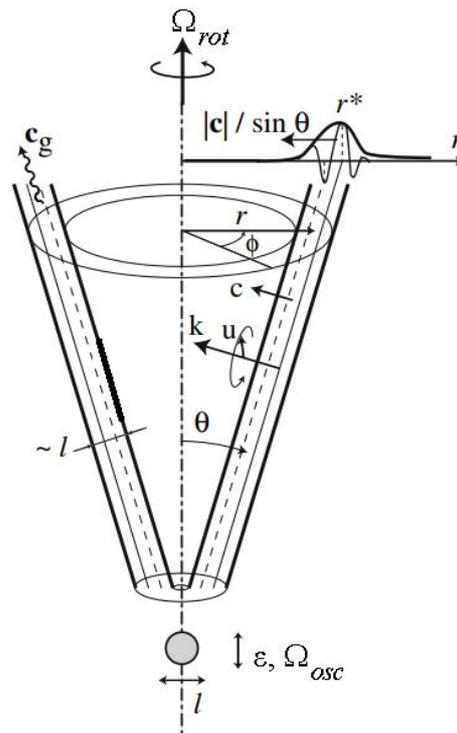


Рис. 1.1. Схема распространения инерционной волны в неограниченной среде при $\Omega_{osc} \ll 2\Omega_{rot}$ от источника длиной l , совершающего колебания с амплитудой ε и частотой Ω_{osc} . Фазовая скорость волны обозначена c , а групповая скорость c_g . Значение угла θ определяется выражением (1.1). Адаптировано из [36].

В замкнутых полостях спектр возможных инерционных режимов расширяется за счет возбуждения собственных резонансных мод [37] и волновых аттракторов [38]. Инерционные моды визуально проявляются в виде глобальных колебаний жидкости, напоминающих стоячие волны [39, 40]. Собственные частоты и волновые числа инерционных мод во многом зависят от геометрии полости [1]. Подробное исследование осесимметричных мод во вращающемся цилиндре представлено в работах [14, 12, 15]. В свою очередь, волновой аттрактор представляет собой предельный цикл, к которому «притягиваются» траектории волн после последовательных отражений от стенок полости. Важным условием является наличие, по крайней мере, одной наклонной стенки относительно оси вращения. На рис. 1.2 показан пример фокусировки инерционных волн в аттрактор. Хорошо видно, как луч, исходящий из нижнего левого угла, постепенно выходит на замкнутую траекторию. Такое поведение

лучей обязано дисперсионному соотношению $\Omega_{osc} = 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega}_{rot}$, согласно которому луч, отраженный от наклонной границы, сохраняет угол по отношению к оси вращения, а не к нормали границы [17, 41]. Стоит отметить, что волновые аттракторы существуют не только в рамках невязких моделей, но и успешно идентифицируются в экспериментах [17].

В случае сферической геометрии полости волны могут образовывать замкнутые траектории, которые не являются аттракторами. Эти режимы не являются резонансными и обязаны своим существованием симметрии распространения волновых лучей от границ полости. В этом случае энергия волны всё время закачивается вдоль одного замкнутого пути, называемого периодической орбитой [42, 43].

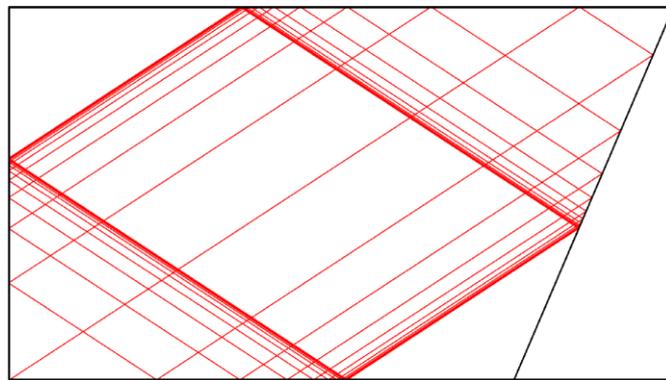


Рис. 1.2. Схема фокусировки инерционных волн в аттрактор в полости с трапециевидным сечением; ось вращения располагается горизонтально.

Другой, менее известной особенностью закона отражения инерционных волн, которая проявляется только на наклонных границах, является изменение азимутального направления волновых лучей [44]. Т.е., при отражении наблюдается азимутальный поворот луча в направлении наклона границы. Например, во вращающейся сфере волны после многократного взаимодействия с твердыми стенками собираются в плоскости меридионального сечения [45].

Свойства инерционных волн имеют много общего с внутренними волнами в стратифицированной жидкости, где роль восстанавливающей силы играет разница между силами тяжести и плавучести. Если стратифицированная по

плотности жидкость вращается, возникают инерционно-гравитационные волны [46]. Выбор сферической геометрии полости в роли модели дает возможность исследовать распространение инерционных волн в океанах, атмосфере, жидких ядрах планет и вращающихся звездах [42]. Тем не менее, основные особенности линейных и нелинейных волновых режимов могут быть изучены в более простых с геометрической точки зрения полостях. С одной стороны, это позволяет провести детальное исследование инерционных режимов пульсационного течения, а, с другой стороны, выбор постановки позволяет обнаружить новые, ранее неизвестные особенности вращающихся систем. Например, в недавней работе [47] было обнаружено, что в полости с эллиптическим сечением волновой аттрактор может захватываться в плоскости меньшей диагонали эллипса (так называемый супер-аттрактор). Также, можно отметить серию работ по исследованию течений в неравномерно вращающемся (либрирующем) кубе. Например, если ось вращения проходит через две противоположные грани, основными режимами течения являются инерционные моды [39, 48]. Если ось вращения проходит через две противоположные вершины, появляются наклонные относительно оси вращения границы, позволяющие моделировать свойства фокусировки [49]. Если ось вращения проходит через середины двух противоположных ребер, то пространственно-волновая картина становится более сложной – инерционные волны формируют разнообразные геометрические фигуры [50].

С практической точки зрения инерционные волны могут быть полезны для управления движением жидкости в промышленных процессах, например, в «мягком» биореакторе для культивирования микроводорослей [51]. Резонансные инерционные режимы в рабочей полости создают эффективное перемешивание, что приводит к переносу питательных веществ и более активному росту клеток. Помимо этого, существуют планетарные смесители в виде цилиндрического резервуара, где в результате прецессии происходит ламинарное перемешивание жидкости [52]. Здесь применяется комбинированный эффект вращения полости вокруг оси и вращения вокруг оси, удаленной от оси симметрии полости на

некоторое расстояние. Важна роль инерционных волн при проектировании вращающихся турбин [53] и топливных баков космических аппаратов. В условиях микрогравитации на первый план выходят эффекты, обусловленные инерционными колебаниями [54–57]. Во время орбитального полета стационарное гравитационное поле отсутствует, поэтому неконтролируемое ускорение платформ космических аппаратов, известное как g-джиттер, может выступать в качестве источника волн. Часто эти возмущения не носят поступательного характера, имеют малую амплитуду и обычно вызываются перемещениями экипажа, маневрами космического аппарата, колебаниями оборудования и т.д.

1.2. Нелинейные режимы инерционных волн

При гармоническом воздействии на вращающиеся системы с большими амплитудами, вязкие пограничные слои становятся неустойчивыми, становясь сами по себе источниками инерционных волн [58, 59]. В работе [60] показано, что во время ретроградной фазы либраций возникает центробежная неустойчивость в виде вихрей Гертлера в приэкваториальной области сферической полости. Схожие структуры были обнаружены экспериментально и описаны численно на боковой стенке либрирующего цилиндра [61, 62]. В нелинейном режиме в спектре возмущений помимо основной частоты проявляются дополнительные гармоники, указывающие на самопроизвольную генерацию инерционных волн. Численные расчеты в работе [14] показывают, что инерционные волны, возбуждаются вследствие турбулентного движения в пограничных слоях.

В нелинейных режимах появление дополнительных гармоник в спектре обусловлено так называемой *неустойчивостью триадного резонанса* [63, 64]. Этот механизм представляет собой перенос энергии волны с основной частотой на меньшие пространственные масштабы. При этом основная волна связана двумя новыми субгармониками путем линейной суперпозиции для частот и волновых

векторов. Если говорить об инерционной моде, её триадный резонанс обычно возбуждается с помощью прецессии [65 – 68] или вращения наклонной крышки [63]. Либрации же оказываются менее эффективным инструментом дестабилизации потока, поскольку в этом случае передача импульса частицам жидкости происходит только за счет вязкого взаимодействия в пограничных слоях. В то же время как для прецессии характерна передача энергии жидкости за счет давления границ полости. Неустойчивость триадного резонанса изучалась в том числе и в условиях волновых аттракторов [69, 70]. Можно отметить, что в сильно нелинейном режиме в спектре азимутальной скорости возникает низкочастотная гармоника, связанная с возбуждением волны Россби [71]. По-видимому, этот эффект сравним с генерацией сдвиговых мод, наблюдаемых во вращающемся наклонном кольцевом слое со свободной границей [72]. Колебания жидкости приводят к появлению осредненного азимутального потока со сложным профилем скорости, который испытывает неустойчивость сдвигового типа, это, в свою очередь, индуцирует низкочастотную баротропную сдвиговую моду. В турбулентных потоках инерционные волны почти полностью передают энергию крупномасштабным когерентным вихрям [73].

1.3. Осредненные эффекты во вращающихся системах

Изучение потоков, порождаемых гармоническим воздействием во вращающихся полостях, представляет большой интерес для прикладных задач, связанных с созданием средней циркуляции. Это связано с тем, что инерционные волны сопровождают большой спектр задач, где присутствует совместное действие вращения и вибраций [74], в том числе в неоднородных по плотности системах [75]. Колебания неоднородных по плотности частей системы являются источником волн, которые могут генерировать осредненные потоки [76, 77]. В свою очередь, осредненные потоки могут быть удобным инструментом для управления тепломассопереносом [78, 79], химической реакцией на границе

раздела двух несмешивающихся жидкостей [80], флюидизацией и транспортировкой гранулированной среды [81, 82].

Подробное описание методов возбуждения осредненных течений представлено в работе [7]. Одним из примеров являются упомянутые ранее продольные либрации. Изучение осреднённого движения жидкости, возбуждаемого в либрирующей сфере и сферическом слое, выполнено в работах [6, 83, 84, 85 86]. Асимптотический анализ зонального течения в области низких частот либраций и чисел Экмана выполнен в [6]. Вследствие нелинейных эффектов в вязких пограничных слоях Экмана в объеме жидкости возникает отстающее дифференциальное вращение, величина которого быстро уменьшается с удалением от оси вращения. В экваториальной области, наоборот, формируется интенсивное опережающее течение [83]. Поскольку глобальное вращение полости накладывает условие геострофичности, поэтому в целом структуру среднего потока можно охарактеризовать как систему вложенных концентрических сдвиговых слоев. Скорость зонального потока увеличивается пропорционально квадрату амплитуды либраций и не зависит от числа Экмана. В сферической оболочке структура потока является аналогичной и существенно не меняется, даже если неравномерно вращается вся полость [85] или только внешняя сфера [84]. В случае либрирующей цилиндрической геометрии также в объеме полости возникает отстающий зональный поток [87].

Помимо зонального течения инерционные волны оказывают влияние на меридиональную циркуляцию жидкости. В работе [15] было обнаружено, что в области отражения волн от боковой стенки вращающегося цилиндра с прямыми торцами формируется осредненные тороидальные структуры в пограничном слое Стокса. Структуры течения исследовались при помощи добавления мелких тяжелых частиц (измельченный активированный уголь). В результате осредненной циркуляции частицы образовывали систему осесимметричных колец на боковой стенке полости. В области частот возбуждения резонансных частот (собственные частоты инерционной моды) происходит усиление осредненной циркуляции [16]. Было показано, что структура осредненного течения сильно

зависит от толщины пограничного слоя Стокса $\delta_S = \sqrt{2\nu / \Omega_{lib}}$, где Ω_{lib} – угловая частота колебаний, ν – кинематическая вязкость жидкости. Если толщина пограничного слоя $\delta_S / R \ll 1$, то количество вихрей определяется только осевым волновым числом инерционной моды.

1.4. Обоснование выбора задачи исследования

Как обсуждалось ранее, основные свойства глобальных течений, наблюдающихся в реальных астро- и геофизических системах, удобно рассматривать в рамках простых геометрических моделей, таких как цилиндр [61, 58, 14] или кольцевом зазоре [40, 72]. Вместе с этим для реальных планетарных тел важно также учитывать изменение глубины полости от расстояния, отсчитываемого от оси вращения. В этом случае довольно часто применяют приближение β -плоскости, согласно которому границы полости должны иметь постоянный наклон относительно оси вращения [88]. Например, прямоугольный резервуар с одной наклонной боковой стенкой, расположенный эксцентрично на вращающемся лабораторном столе [18]. Другим примером является вращающаяся кольцеобразная область, ограниченная двумя вертикальными коаксиальными цилиндрами, с коническим дном [70, 71]. Стоит подчеркнуть, что наличие наклонных стенок внутри полости также создает благоприятные условия для фокусировки инерционных волн в аттрактор [17, 89, 10]. Именно поэтому изучение волновых аттракторов является более удобным в полости с трапециевидным поперечным сечением [17, 90] или в кубе, где наклон обусловлен выбором расположения оси вращения по отношению к границам полости [91]. Тем не менее, экспериментальных работ по исследованию свойств аттракторов мало, и те ограничиваются либо двумерной [17, 18], либо осесимметричной постановкой [70, 71]. В свою очередь, в неосесимметричных полостях лучевые модели предсказывают возникновение эффектов волнового захвата аттрактора в фиксированной меридиональной плоскости [47]. Таким

образом, одной из важнейших задач диссертационной работы является экспериментальное исследование особенностей пространственной структуры волновых аттракторов во вращающейся полости, имеющей выделенное направление. Для этого используется осесимметричный цилиндр, с двумя неосесимметричными торцами. Выбранная геометрия сохраняет приближение β -плоскости и позволяет закачать в систему существенно больше энергии, нежели в чисто осесимметричном случае, поэтому эффекты фокусировки волн и волнового захвата аттрактора в плоскости должны проявляться намного ярче. Не менее важной задачей является экспериментальная проверка законов масштабирования ширины и амплитуды скорости в волновых пучках с числом Экмана и последующее сравнение результатов с теоретическими [92] и численными [93, 43] работами. С другой стороны, наклон торцевых стенок, позволяет исследовать динамику неосесимметричных резонансных мод.

Взаимодействие инерционных волн с границами полости может приводить к генерации осредненного зонального потока. Например, во вращающейся сферической полости вблизи критических широт, на которых отражаются волны, возникает ненулевая осредненная по времени завихренность [93, 94]. В осесимметричной постановке это приводит к генерации осредненного дифференциального вращения в виде системы жидких геострофических цилиндров, вращающихся с различными угловыми скоростями. Вопрос о структуре осреднённого течения, возбуждаемой волнами в неосесимметричной постановке, является открытым.

Наконец, интерес представляет нелинейная динамика волн и их влияние на зональное течение. Известно, что переход к нелинейному режиму осуществляется через механизм триадных взаимодействий, которые хорошо изучены в условиях волнового аттрактора. При этом волновая неустойчивость сопровождается формированием осреднённого вихревого кластера [70, 71]. Исследования нелинейного отклика жидкости в условиях нелинейного режима инерционной моды не проводились. Поэтому ещё одной задачей, сохраняющей большую

актуальность и новизну, является изучение осреднённых зональных течений в нелинейном режиме волнового аттрактора и инерционной моды.

ГЛАВА 2. ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ С НАКЛОННЫМИ ТОРЦАМИ

Экспериментально исследуются инерционно-волновые режимы течений в неравномерно вращающемся (либрирующем) цилиндре. Источниками волн является области соединения торцевых и боковых стенок полости. Экспериментально найдены следующие режимы: инерционная мода (глобальные колебания), инерционно-волновой аттрактор и режим симметричного отражения волн. Несмотря на то, что последние два режима имеют визуальное сходство, их природа различна. В случае аттрактора волновые лучи после серии отражений от наклонных торцов фокусируются на предельный цикл в виде замкнутой траектории. В режиме симметричного отражения волн замкнутая траектория образована лучами, исходящими из двух диаметрально противоположных углов полости. Для верификации наблюдаемых волновых режимов разработана двухмерная лучевая модель. Исследуются осредненные течения, возбуждаемые волнами, при малых амплитудах либраций. Представляемые результаты опубликованы в следующих научных работах: [20, 22, 23, 24].

2.1. Методика эксперимента

2.1.1. Экспериментальная установка

Эксперименты проводятся в плексигласовом цилиндре длиной H и радиусом R (рис. 2.1). Торцы полости представляют собой прозрачные сплошные вставки в форме усеченного цилиндра с углом наклона секущей плоскости α . Диаметр вставок соответствует внутреннему диаметру полости; положение вставок зафиксировано при помощи прозрачного герметика. Длина H является постоянной, при этом минимальное расстояние между вставками L зависит от угла наклона α и взаимного расположения вставок. Рассматриваются следующие варианты положения наклонных вставок внутри полости: параллельный наклон

(parallel slope (PS)) (рис. 2.1а), непараллельный наклон (antiparallel slope (APS)) (рис. 2.1б).

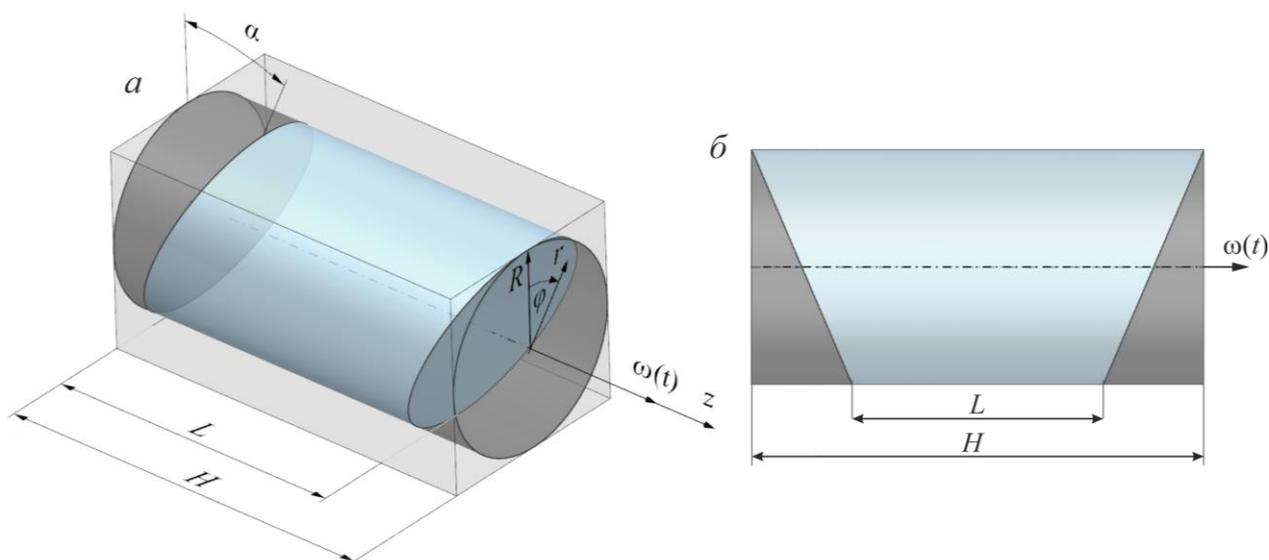


Рис. 2.1. Расположение торцов внутри полости: а – параллельный наклон (PS), б – непараллельный наклон (APS).

Таблица 2.1. Геометрические параметры полостей

| H , мм | R , мм | α , ° | L , мм | PS | APS |
|----------|----------|--------------|----------|---------|--------------------|
| | | | | R / L | $2R / (L + H)$ |
| 99.0 | 26.0 | 8.5 | 90.0 | 0.29 | не рассматривалось |
| | | 15.0 | 84.0 | 0.31 | |
| | | 23.0 | 77.0 | 0.34 | |
| | | | 55.0 | | 0.34 |

В таблице 2.1 представлены аспектные соотношения радиуса цилиндра R к средней длине боковых границ L^* . Полученные данные далее используются для определения значений собственных частот инерционных мод. Поскольку для PS длины боковых сторон являются равными, то $L^* = L$. В случае APS длины боковых сторон не равны между собой, $L^* = (L + H) / 2$.

Внутренний объем полости заполняется водоглицериновым раствором с кинематической вязкостью $\nu = 1.9 - 43.0$ сСт. Вязкость измеряется вискозиметром ВПЖ – 2 с точностью 0.1 сСт. Для визуализации течений в жидкость добавляются частицы из полиамида диаметром ~ 60 мкм и средней плотностью ~ 1.04 г/см³.

Объемная доля частиц в жидкости не превышает 10^{-4} . Для наблюдения за движением жидкости со стороны боковой поверхности цилиндрическая полость помещается в контейнер в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.1а) Пространство между контейнером и полостью заполнено водой. При помощи вертикальных металлических опор кювета крепится к неподвижному горизонтальному столу. Свободное вращение кюветы вокруг оси симметрии возможно благодаря установленным в опоры шарикоподшипников. Диаметр одного из подшипников превышает диаметр полости, что позволяет изучить азимутальное поле скорости (вид со стороны торца).

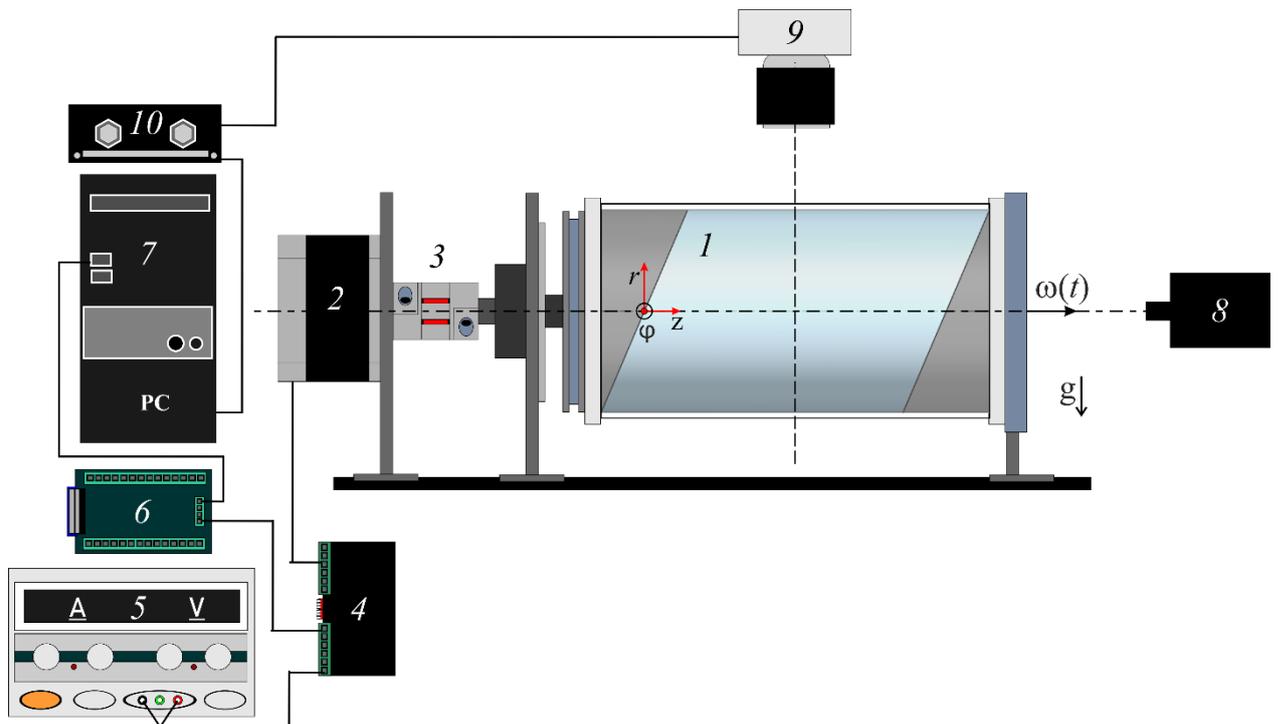


Рис. 2.2. Схема экспериментальной установки

Вращение кюветы 1 задается шаговым двигателем 2 (FL86STH118-6004A) благодаря безлюфтовой упругой муфте 3 (SJCA-30C) (рис. 2.2). Управление двигателем осуществляется с помощью драйвера 4 (SMD-9.0). Шаг двигателя варьируется от 1.8° до 0.45° . Питание двигателя поддерживается источником постоянного тока 5 (Mastech NY5005E) с выходным напряжением 50 В. Генератором сигнала является модуль АЦП/ЦАП 6 (ZET 210), управляемый через

USB порт персонального компьютера 7. В программе ZETlab устанавливается тип сигнала – частотная модуляция.

В лабораторной системе отсчета кювета совершает вращение вокруг оси симметрии по закону:

$$\omega(t) = \Omega_{rot} [1 + \varepsilon \sin(\Omega_{lib}t)], \quad (2.1)$$

где Ω_{rot} – средняя угловая скорость вращения полости, Ω_{lib} – угловая частота. Амплитуда модуляции скорости определяется как $\varepsilon = \Delta\varphi\sigma$, где $\Delta\varphi$ – угловая амплитуда либраций и $\sigma = \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$ – безразмерная частота либраций. В экспериментах величина Ω_{rot} является постоянной, в то время как значение угловой частоты либраций Ω_{lib} варьируется (таблица 2.2). Точность поддержания частот Ω_{rot} и Ω_{lib} составляет не менее 0.1 с^{-1} .

Эксперимент проводится следующим образом. Первоначально плавно задается равномерное вращение кюветы вокруг оси симметрии со скоростью Ω_{rot} . Спустя характерное вязкое время $E^{-1/2}\Omega_{rot}^{-1}$ (не более 10 сек.) [1] устанавливается твердотельное вращение жидкости. После этого для возбуждения инерционных колебаний жидкости при постоянном значении частоты Ω_{lib} , плавным образом задается амплитуда ε . Здесь $E = \nu / (\Omega_{rot} R^2)$ – число Экмана, которое является показателем отношения вязких сил к силе Кориолиса.

Таблица 2.2. Основные параметры вращения полости

| $\Omega_{rot}, \text{с}^{-1}$ | $\Omega_{lib}, \text{с}^{-1}$ | σ | ε | $\Delta\varphi, \text{рад}$ |
|-------------------------------|-------------------------------|------------|---------------|-----------------------------|
| 31.4 | 6.28 – 62.80 | 0.20 – 2.0 | 0.01 – 0.20 | 0.005 – 1.0 |
| 62.8 | 12.56 – 125.60 | | | |

Исследования динамики жидкости происходит с помощью метода PIV (Particle Image Velocimetry). Источником освещения является непрерывный лазер 8 (KLM-532/h-1000) (рис. 2.2). Наблюдение происходит за частицами визуализатора, освещенными в плоскости «светового ножа» лазера. Толщина

лазерного пучка составляет 2 мм. Регистрация положения частиц осуществляется на неподвижную в лабораторной системе отсчета скоростную камеру 9 (Optronis CamRecord CL600x2). Запись данных эксперимента происходит на видеорегистратор 10 (DVR Express Core). Частота съемки выбирается кратной частоте вращения полости $f_{rot} = \Omega_{rot} / 2\pi$ и варьируется в диапазоне 20–360 кадр/с. Разрешение кадров устанавливается 800×800 или 1000×600 пикселей. Время экспозиции варьируется от 0.2 до 0.4 мкс, что является достаточным для получения четких изображений частиц-трассеров в каждом кадре.

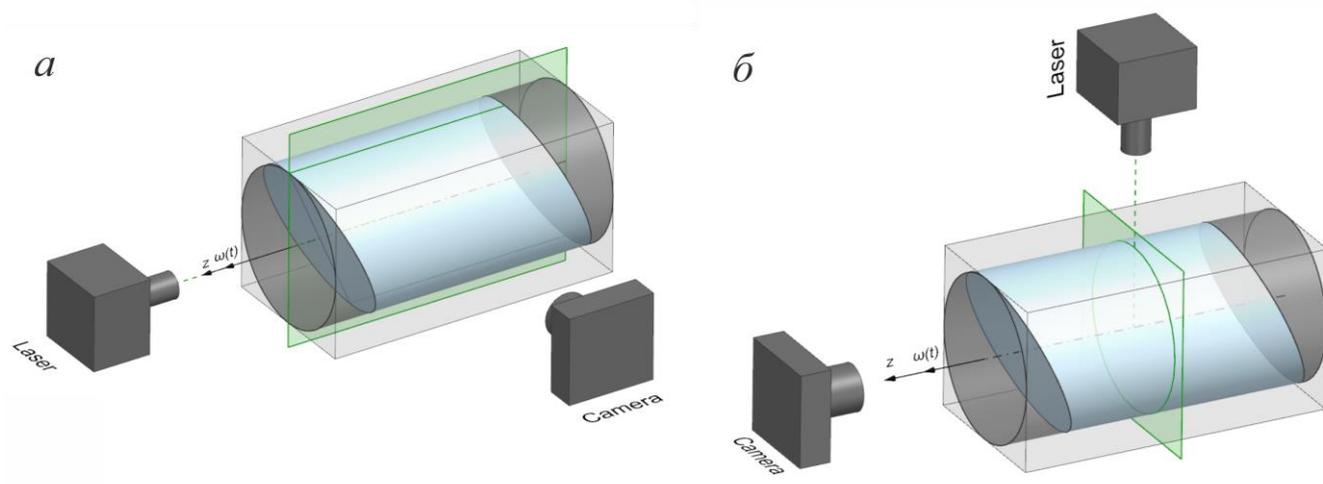


Рис. 2.3. Схема расположения лазера и скоростной камеры в методе PIV для изучения динамики жидкости: *а* – вдоль оси вращения, *б* – поперек оси вращения полости. Область «светового ножа» лазера показана в виде плоскости зеленого цвета.

Движение жидкости исследуется как в осевом, так и поперечном сечении (рис. 2.3). В первом случае камера устанавливается таким образом, чтобы среднее положение грани кюветы было перпендикулярно оптической оси камеры (рис. 2.3*а*). Во втором случае камера располагается со стороны торца соосно с осью вращения полости (рис. 2.3*б*). Плоскость «лазерного ножа» для каждого из случаев перпендикулярна оптической оси камеры. Для удобства со стороны торца располагается метка соответствующая положению максимального острого угла между боковой стенкой и торцом полости. Задача рассматривается в

цилиндрических координатах (r, φ, z) . Вращение полости происходит по часовой стрелке при наблюдении со стороны прозрачного торца; начало отсчета φ показано на рис. 2.1, что соответствует положению острого угла в плоскости, проходящей вдоль линии наклона торцов.

2.1.2. Методика вычисления скорости пульсационного течения

В лабораторной системе отсчета при либрационном воздействии угловая координата полости изменяется со временем по закону:

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi = \Omega_{rot}t + \Delta\varphi \cos(\Omega_{lib}t), \quad (2.2)$$

где $\Omega_{rot}t$ – угол поворота, связанный с равномерным вращением, $\Delta\varphi \cos(\Omega_{lib}t)$ – периодическое изменение угловой координаты. Для вычисления характеристик пульсационного течения в осевом сечении выбираются пары кадров с интервалом времени, кратным периоду вращения $\tilde{n}T_{rot} = 2\pi\tilde{n} / \Omega_{rot}$, где \tilde{n} – целое число. Поскольку вращение полости является неравномерным, то два последовательных угловых положения полости, полученные с интервалом времени $\tilde{n}T_{rot}$, не будут совпадать. На рис. 2.4 схематично представлено положение полости относительно оптической оси камеры, где δl – перемещение боковой стенки полости, $\delta\varphi_{\tau} = |\varphi_0 - \delta\varphi|$ – угол поворота полости через один период вращения T_{rot} .

Следует отметить, что при наклоне боковой границы полости изображение осевого сечения, во-первых, смещается по вертикали, а, во-вторых, сжимается в вертикальном направлении. Для устранения вертикальных «колебаний» использовался авторский программный код, написанный на платформе MATLAB. В алгоритме вычисляется пространственное преобразование центров масс области боковой границы полости для всей последовательности кадров. В результате обработки, вертикальная координата границы полости остается постоянной на протяжении всей серии кадров. Оценка показала, что для амплитуд либраций $\varepsilon \leq 0.16$ относительное изменение поперечного размера полости не превышает $\Delta R / R \leq 0.02$.

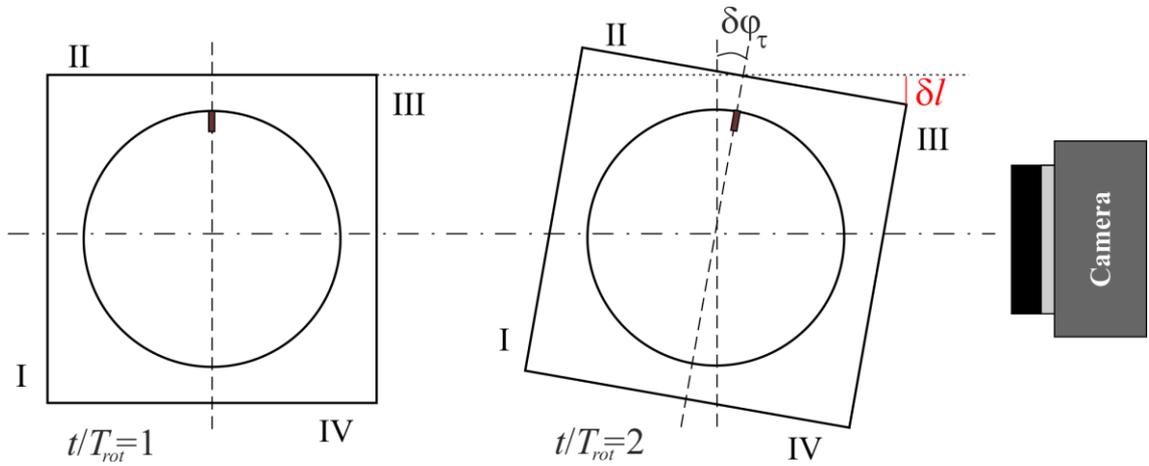


Рис. 2.4. Положение полости со стороны торца в лабораторной системе отсчета через период вращения T_{rot} . Римскими цифрами обозначены границы полости.

Фазы поворота полости и съемки выбираются таким образом, чтобы среднее положение боковой границы было всегда перпендикулярно оптической оси камеры. Временной интервал между двумя последовательными фазами может быть определен как

$$\Delta\tau_p = \tilde{n}T_{rot} - \tilde{m}T_{lib}, \quad (2.3)$$

где \tilde{m} – целое число периодов либраций. Критерием для отбора значений $\Delta\tau_p$ из (2.3) является:

$$0.05 \leq |\Delta\tau_p| / T_{lib} \leq 0.25, \quad (2.4)$$

Минимальная граница неравенства (2.4) получена экспериментально: для $|\Delta\tau_p| / T_{lib} < 0.05$ смещение частиц визуализатора, связанное с пульсационным течением, становится сравнимым со смещением из-за осреднённого движения. При $|\Delta\tau_p| / T_{lib} > 0.25$ на один период либраций приходится менее 4-х кадров, чего недостаточно для хорошего разрешения структуры пульсационного течения. Выбор значений \tilde{n} и \tilde{m} осуществляется следующим образом. При $\tilde{n} = 1$ методом подбора определяется минимальное возможное \tilde{m} , удовлетворяющее условию (2.4). В ином случае \tilde{n} увеличивается на единицу и снова вычисляется \tilde{m} . Это выполняется до тех пор, пока $\Delta\tau_p$ не будет найден.

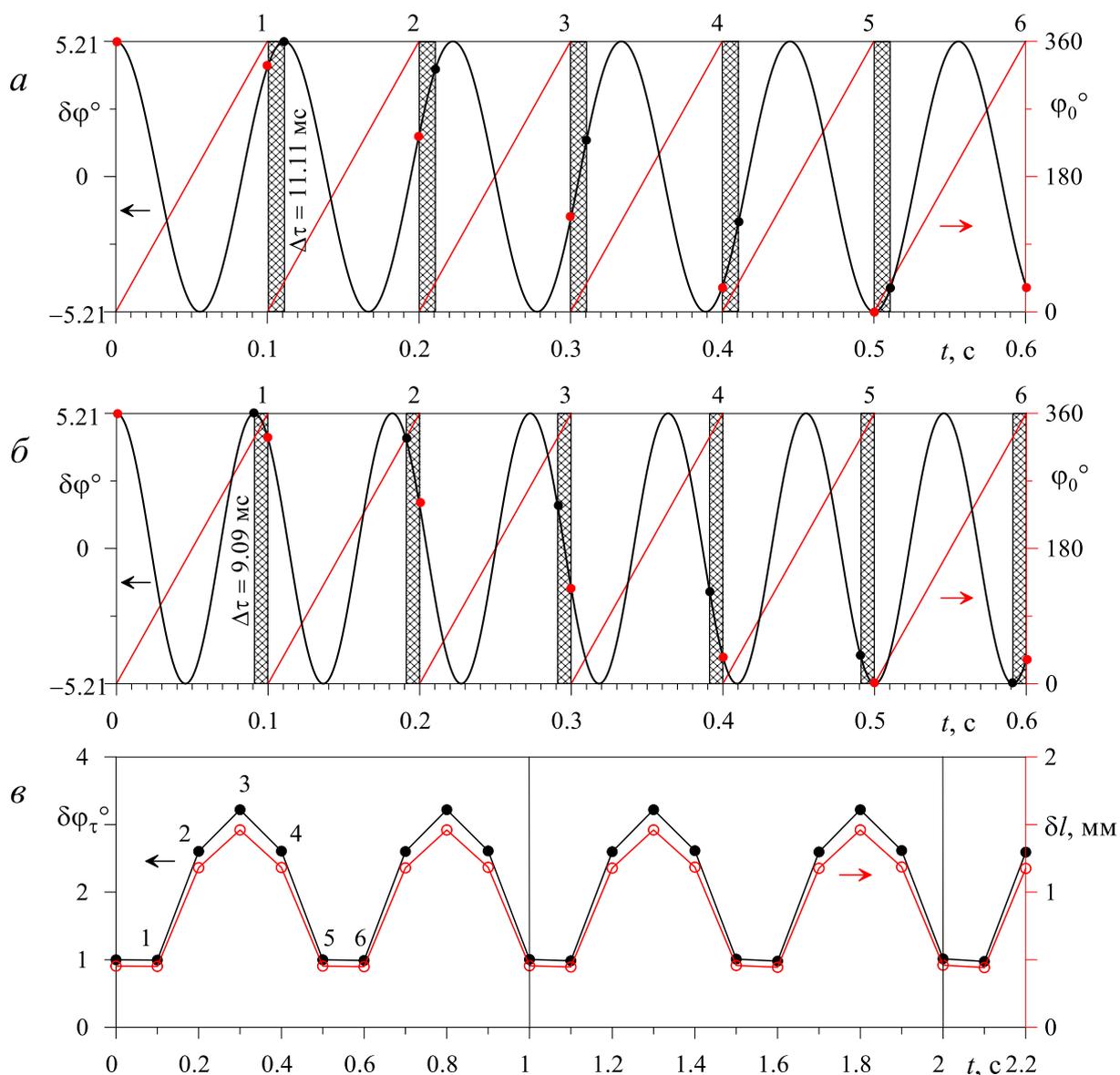


Рис. 2.5. Временная зависимость либрационной $\delta\varphi = \Delta\varphi \cos(\Omega_{lib}t)$ (черные линии) и равномерной φ_0 (красные наклонные линии) компонент угла поворота полости при $\varepsilon = 0.10$ и частоте либраций $\sigma = 0.90$ (а) и 1.10 (б). Заштрихованные области соответствуют разности фаз $\delta\varphi_\tau = |\varphi_0 - \delta\varphi|$ за один полный оборот полости. Временная зависимость $\delta\varphi_\tau$ между двумя последовательными положениями полости за T_{rot} (черные точки) и одновременное вертикальное перемещение боковой стенки δl (красные точки) (в) соответствуют параметрам на фрагменте (б). Цифрами обозначена нумерация последовательных оборотов полости.

На рис. 2.5 представлена временная зависимость изменения фазы либраций $\delta\varphi$ и равномерного вращения φ_0 . При $\sigma = 0.90$ фаза колебаний полости запаздывает по отношению к фазе равномерного вращения полости на

$|\Delta\tau_p|=11.11$ мс (заштрихованные области на рис. 2.5а). В случае $\sigma=1.10$ наблюдается противоположная ситуация, фаза колебаний опережает среднее равномерное вращение на величину $|\Delta\tau_p|=9.09$ мс (рис. 2.5б). На фрагменте (рис. 2.5в) показано угловое отклонение полости от среднего положения $\delta\varphi_\tau = |\varphi_0 - \delta\varphi|$. Оценки показывают, что в большинстве экспериментах $\delta\varphi_\tau < 3.5^\circ$, что позволяет сделать вывод о том, что большинство частиц визуализатора, находясь даже на периферии полости, остаются в плоскости «светового ножа». Это предположение является справедливым для малых амплитуд модуляции скорости, характерных для линейных режимов пульсационного течения.

Обработка последовательных кадров происходит в программе PIVlab в среде MATLAB [19]. Средний статистический размер области обработки соответствует 50×50 , 40×40 , 22×22 и 12×12 пикселей. Сдвиг расчетной области составляет $1/2$ от размера области обработки. Анализ данных осуществляется согласно алгоритму БПФ (быстрое преобразование Фурье), результатом которого является поля скорости и завихренности.

Для получения достоверных характеристик мгновенных течений для каждой фазы либраций осуществляется дополнительное осреднение по следующей схеме:

$$\frac{1}{\tilde{m}} \sum_{j=0}^{\tilde{m}} (jN + 1), \quad (2.5)$$

где N – количество кадров, приходящееся на один период либраций T_{lib} , j – номер кадра (одна фаза колебаний). Осреднение по одной фазе (2.5) происходит для $\tilde{m} \geq 4$. Например, при частоте $\sigma=1.10$ полный период либраций разрешается $N=10$ кадрами. Соответственно для осреднения по первой фазе либраций выбирается пары кадров с номерами 1, 11, 21, 31, 41, для второй фазы 2, 12, 22, 32, 42 и т.д.

Для исследования пульсационного течения в поперечном сечении (наблюдение происходит со стороны торца) частота съемки составляет $f_s = 360$ кадр/с. Для перехода во вращающуюся систему отсчета с частотой

$f_{rot} = \Omega_{rot} / 2\pi$ вся последовательность кадров поворачивается относительно оси вращения в направлении противоположном вращению на величину, необходимую для их совмещения. Величина времени между парами кадров рассчитывается как $\Delta\tau_p = 1 / f_s$.

2.1.3. Методика исследования осредненных потоков

Для исследования осредненных потоков выбираются кадры, время между которыми определяется как: $\Delta\tau_{os} = \tilde{n}T_{rot}$, где \tilde{n} – целое число. Осреднение осуществляется не менее, чем по 10 периодам либраций T_{lib} . Результатом являются осреднённые поля скорости $\langle u \rangle$ и завихренности $\langle \xi \rangle$. При этом важно отметить, что выбор начальной фазы либраций не влияет на результат осреднения. Кросскорреляционный анализ также осуществляется с помощью программы [19].

2.2. Полость с параллельным наклоном торцов

2.2.1. Пульсационное течение

В диапазоне частот $0 < \sigma < 2$ существуют различные пульсационные режимы течений, связанные с распространением инерционных волн. Пространственное распределение энергии волн в объеме жидкости определяется частотой σ и амплитудой либраций ε . В качестве характеристики интенсивности пульсационного течения используется средняя по пространству (в осевом сечении) скорость:

$$u = \frac{1}{S} \sum \sqrt{u_r^2 + u_z^2} \Delta s, \quad (2.6)$$

где u_r и u_z – радиальная и осевая компоненты скорости, S – общая площадь сечения, проходящая через ось вращения, а Δs – площадь, определяемая шагом

векторного поля. Типичные временные зависимости $u(t/T_{lib})$ для частоты либраций $\sigma=1.06$ и амплитуды $\varepsilon=0.06$ в двух взаимно перпендикулярных плоскостях показаны на рис. 2.6. Обе зависимости являются гармоническими и смещены по фазе относительно друг относительно друга на $\pi/2$. Несмотря на то, что амплитудные значения пульсационного течения в двух плоскостях различны, средние по времени скорости $\langle u \rangle = \frac{1}{T_{lib}} \int u dt$ имеют близкие значения. Видно,

что за один период либраций скорость жидкости дважды достигает максимального и минимального значений, что связано с периодическим изменением ускорения полости и перестройкой течения. Осреднение скорости $\langle u \rangle$ осуществляется для не менее, чем десяти периодам либраций T_{lib} .

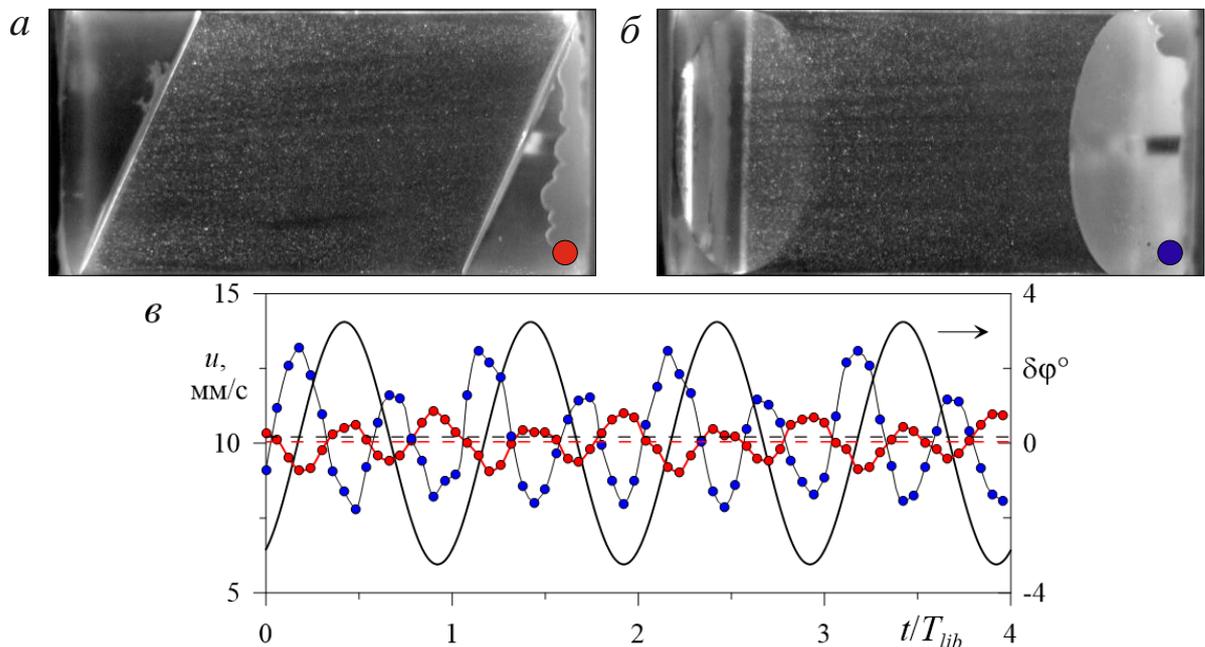


Рис. 2.6. Фотографии кюветы для $\alpha = 23.0^\circ$ в осевом сечении в двух взаимно перпендикулярных плоскостях: параллелограмм (а) и прямоугольник (б). На нижнем фрагменте показана временная зависимость осредненной по пространству пульсационной компоненты скорости в осевом сечении при $\sigma = 1.06$, $\varepsilon = 0.06$ и $E = 1.4 \cdot 10^{-4}$ (в); красные и синие точки соответствуют данным, полученным в плоскостях (а) и (б), соответственно. Горизонтальные пунктирными линиями показаны осредненные по времени значения скорости $\langle u \rangle$. Черной сплошной кривой показана либрационную компонента угловой координаты полости $\delta\varphi$.

Эксперименты показывают, что подобная временная динамика характерна для всего диапазона частот либраций, поэтому далее все характеристики потока будут приведены только для сечения в виде параллелограмма (рис. 2.6а).

С увеличением амплитуды модуляции скорости ε интенсивность пульсационного течения возрастает. В линейном режиме (малые амплитуды колебаний) при фиксированной частоте σ скорость $\langle u \rangle \sim \varepsilon$ (рис. 2.7). Изменение частоты либраций приводит к смене структуры инерционного режима, при этом линейная зависимость сохраняется. Для характеристики полного динамического отклика жидкости в линейном режиме средняя скорость пульсаций $\langle u \rangle$ нормируется на амплитуду колебаний жидкости вблизи боковой границы:

$$\langle U \rangle = \frac{\langle u \rangle}{\Delta\varphi\Omega_{lib}R}. \quad (2.7)$$

Такая нормировка позволяет сравнивать результаты экспериментов, полученных при различных параметрах либрационного воздействия.

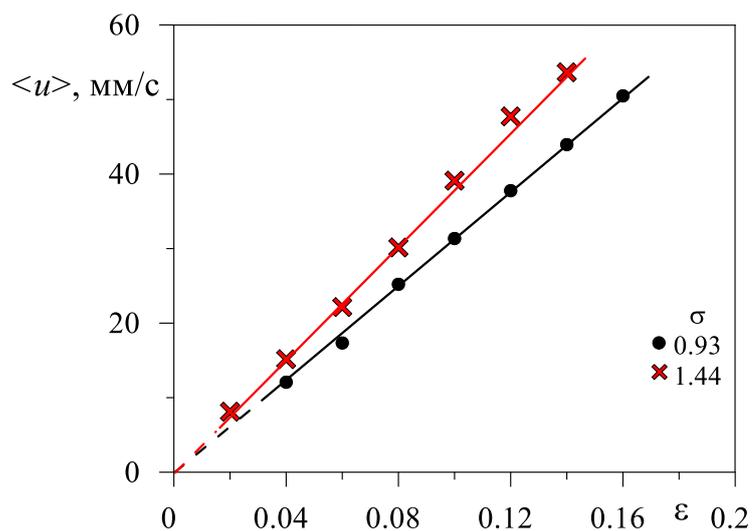


Рис. 2.7. Зависимость осредненной по времени пульсационной компоненты скорости в осевом сечении полости от амплитуды модуляции скорости ε при $\alpha = 15.0^\circ$ и $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$.

2.2.1.1. Пространственная структура волновых режимов

На рис. 2.8 представлена карта режимов пульсационного течения, полученная в осевом сечении полости с углом наклона торцов $\alpha = 23.0^\circ$. Видно, что зависимость имеет немонотонный вид с серией ярко выраженных экстремумов, соответствующих резонансному возбуждению различных инерционных режимов. Наиболее интенсивное течение наблюдается при частоте $\sigma = 0.65$. При данной частоте в полости возникает одновихревое течение, преимущественно ориентированное вдоль большей диагонали осевого сечения (рис. 2.9б). Направление закрутки в вихре периодически меняется, сопровождаясь вращательными колебаниями с амплитудой $\sim \pi/2$ [96]. Этот режим напоминает собой стоячую волну – инерционную моду $M(n, m, k)$, где буквы в скобках означают осевое, радиальное и азимутальное волновые числа соответственно.

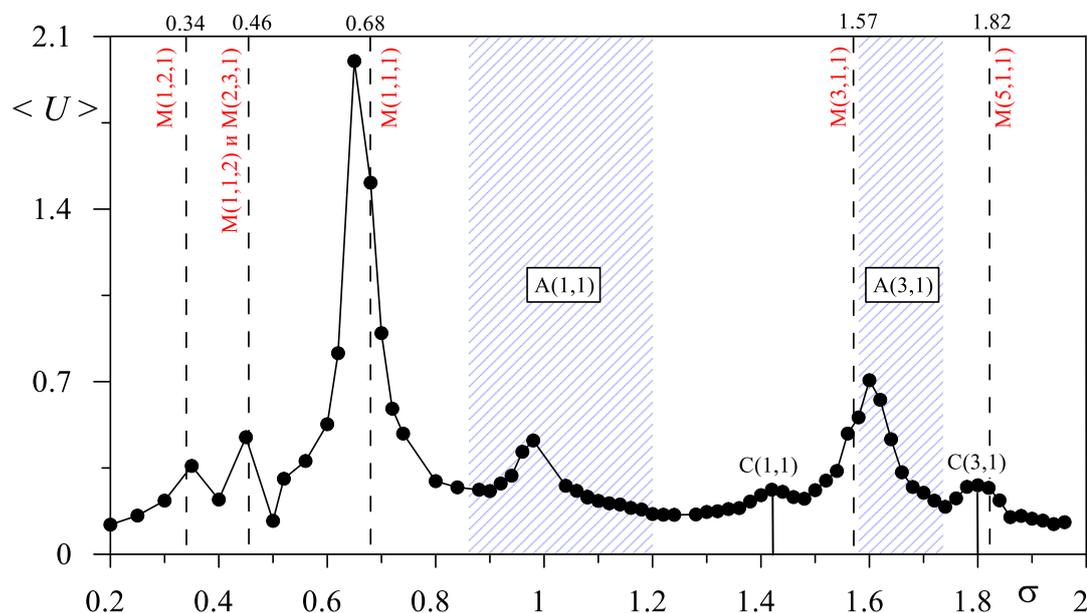


Рис. 2.8. Интенсивность пульсационного течения в зависимости от частоты либраций σ при $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$. Заштрихованные синие области соответствуют аттрактору $A(n, m)$; сплошными линиями показан режим симметричного отражения волн $C(n, m)$. Собственные значения инерционных мод обозначены вертикальными штриховыми линиями.

Наблюдения показывают, что инерционные моды $M(n, m, k)$ преобладают во всем диапазоне частот при небольших значениях угла наклона торцов, $\alpha = 8.5^\circ$ и 15.0° (см. раздел 2.2.1.2).

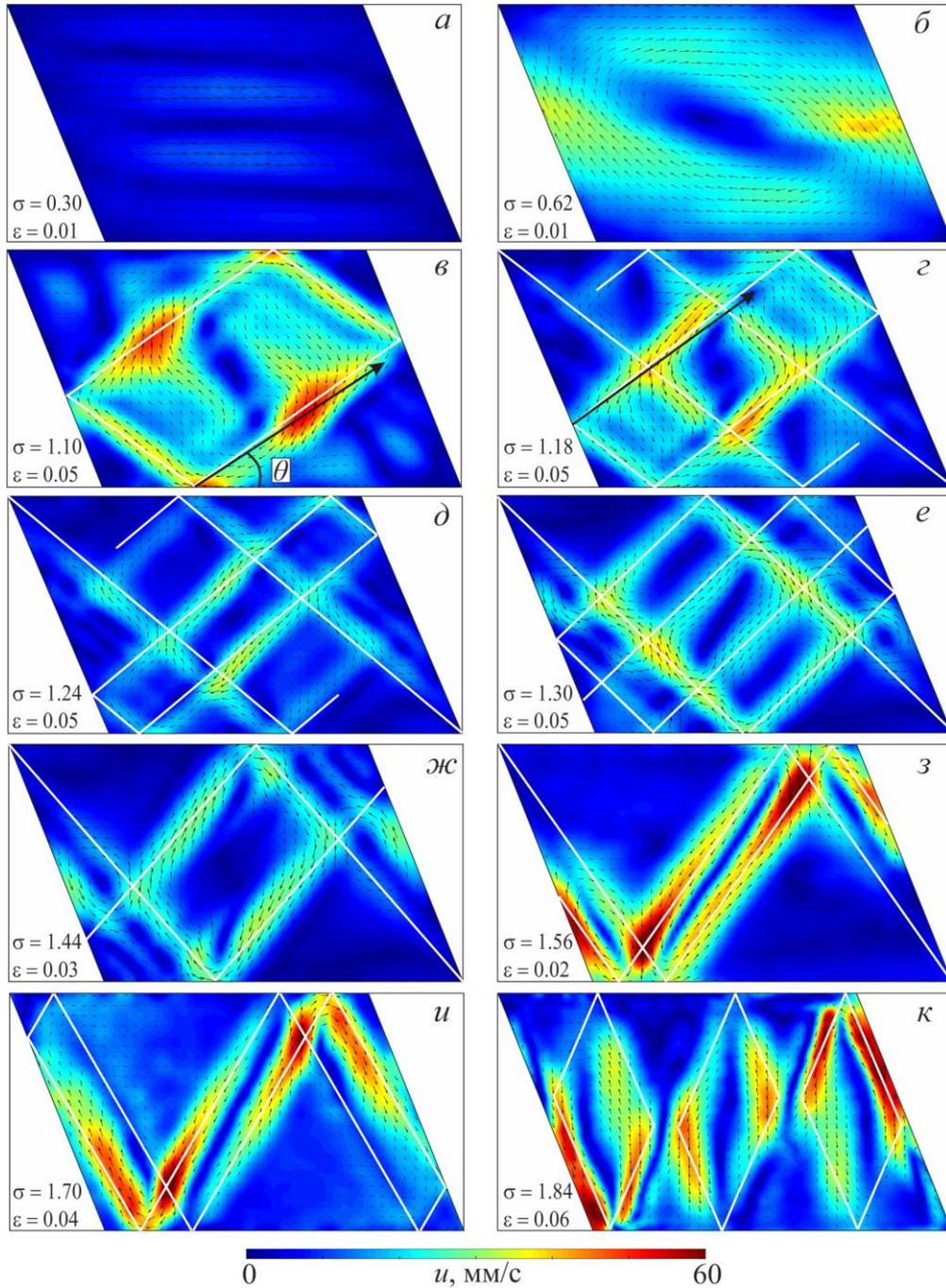


Рис. 2.9. Мгновенные поля скорости при различных значениях σ при $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$ в фазах $\Omega_{lib}t = 0$ (а, б, в, д, е, ж) и $\Omega_{lib}t = \pi$ (з, з, и, к). Белыми линиями показана траектория распространения волн; черные стрелки соответствуют теоретическому предсказанному направлению волновых лучей.

Значения собственных частот невязких инерционных мод для цилиндра с прямыми торцами можно вычислить по формуле [1]:

$$\sigma^2 = \frac{4n^2\pi^2}{n^2\pi^2 + \xi_{nmk}^2 / a^2}, \quad (2.8)$$

где $a = R/L$ – аспектное отношение, ξ_{nmk} характеризует m -ое положительное решение трансцендентного уравнения:

$$\xi \frac{d}{d\xi} J_{|k|}(\xi) + k \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{n^2\pi^2 a^2}} J_{|k|}(\xi) = 0, \quad (2.9)$$

где $J_{|k|}(\xi)$ – функция Бесселя первого рода порядка $|k|$.

Рассчитанные значения собственных частот невязких неосесимметричных мод ($k > 0$) для $a = 0.34$ представлены в таблице 2.3. Незначительное изменение частоты σ приводит к выходу системы из резонансной области, что сопровождается резким уменьшением значения параметра $\langle U \rangle$. В области низких частот наблюдаются инерционные моды с большими радиальными числами m . Так, при $\sigma = 0.35$ возбуждается мода $M(1, 2, 1)$ (рис. 2.9а), состоящая из двух радиально вложенных друг в друга вихрей. Частота $\sigma = 0.45$ соответствует одновременно двум модам $M(1, 1, 2)$ и $M(2, 3, 1)$, тем не менее, в экспериментах визуально проявляется только мода $M(2, 3, 1)$.

Таблица 2.3. Собственные значения невязких инерционных мод для $a = 0.34$

| n | m | k | $\sigma_{\text{теория}}$ | $\sigma_{\text{эксп}}$ |
|-----|-----|-----|--------------------------|------------------------|
| 1 | 1 | 1 | 0.679 | 0.65 |
| 1 | 1 | 2 | 0.447 | 0.45 |
| 1 | 2 | 1 | 0.339 | 0.35 |
| 2 | 3 | 1 | 0.459 | 0.45 |
| 3 | 1 | 1 | 1.570 | 1.60, А (3, 1) |
| 5 | 1 | 1 | 1.816 | 1.80, С (3, 1) |

С повышением частоты либраций на смену инерционным модам приходят принципиально другие режимы. Вместо крупномасштабных колебаний осцилляций наблюдаются отдельные волновые лучи, которые в диапазоне частот

$0.8 < \sigma < 1.2$ фокусируются на замкнутые траектории в виде параллелограмма (рис. 2.9в, з). Подобная конфигурация соответствует аттрактору $A(1,1)$. Белыми линиями показаны пути волновых лучей, соответствующие фазам либраций $\Omega_{lib} t = 0$. Конечная толщина ветвей аттрактора в эксперименте объясняется балансом между эффектами фокусировки и вязкой диссипацией. При частоте $\sigma \approx 1$ аттрактор имеет вид квадрата, симметрия сторон которого нарушается при изменении частоты либраций. Максимальная фокусировка волн наблюдается в крайних угловых положениях полости (в равномерно вращающейся системе отсчета со скоростью Ω_{rot}). Черные линии показывают теоретическое направление групповой скорости волны под углом $\theta = \pm \arcsin(\sigma/2)$ [1], где θ отсчитывается от оси вращения полости. Для частоты $\sigma = 1.10$ (рис. 2.9в) волны должны распространяться под углом $\theta = 33.4^\circ$. Однако в эксперименте частота волн соответствует более высокой частоте $\sigma \approx 1.16$. Возможно, расхождение обусловлено нелинейными эффектами, связанными с осредненным дифференциальным вращением жидкости, которое будет обсуждаться в разделе 2.2.2.

Дальнейшее повышение частоты либраций приводит к усилению интенсивности течения вдоль волновых лучей, испускаемых из острых углов полости (рис. 2.9г, д). Структура пульсационного течения становится более сложной и при частоте $\sigma = 1.24$ проявляются уже две замкнутые траектории. Первая траектория связана с аттрактором, который ориентирован вдоль меньшей диагонали полости; вторая связана исключительно с симметрией распространения волновых лучей из углов. На первый взгляд такая структура напоминает бигармонический аттрактор [97], в котором две волны распространяются одновременно с разными, но близкими по значениям частотами, фокусируясь на двух предельных циклах. В этой работе частота всех волн одинакова, поэтому механизм формирования второй замкнутой траектории другой.

При частоте $\sigma = 1.30$ аттрактор (рис. 2.9е) становится менее заметным, в то время как энергия волн, испускаемых из острых углов полости, значительно

увеличивается. Внутри внешней траектории отчетливо видны два волновых пучка, которые напоминают след аттрактора $A(1,1)$. При $\sigma = 1.44$ (рис. 2.9ж) можно наблюдать только одну замкнутую траекторию, исходящую из острых углов. Во вращающемся сферическом слое этот режим аналогичен случаю периодических орбит, которые не являются аттракторами [42, 43]. Видно, что почти вся кинетическая энергия распределена в узких сдвиговых слоях, которые образуют замкнутую траекторию. При этом вблизи наклонных границ образуется пара вихрей, направление вращения жидкости в которых противоположно направлению циркуляции вдоль основного волнового пути. По аналогии с режимом периодических орбит [43] данный режим обозначен как $C(1,1)$ и назван режимом симметричного отражения инерционных волн.

При дальнейшем увеличении частоты либраций замкнутая траектория сжимается в поперечном направлении. Вихревые структуры, расположенные вблизи наклонных границ, смещаются к тупым углам (рис. 2.9з). При $\sigma = 1.60$ волновые пучки снова фокусируются на замкнутую траекторию, которая напоминает аттрактор $A(3,1)$ (рис. 2.9и). На это указывает согласованное движение жидкости в сдвиговых слоях, образующих три параллелограмма. При $\sigma = 1.80$ пространственная структура принимает вид $C(3,1)$ (рис. 2.9к). В данном случае структура течения представляет собой три замкнутые траектории с одинаковым знаком завихренности. Следует отметить, что описанные мгновенные поля скорости наблюдаются только в определенные фазы колебаний. В остальное время структура течения изменяется, следовательно, в определённые моменты инерционные волны могут не образовывать замкнутых траекторий.

На рис. 2.10 представлена полная пространственная структура режимов аттрактора $A(n,1)$, где $n = 1, 3$, и симметричного отражения волн $C(1,1)$ в фазе $\Omega_{lib}t = 0$. При изменении радиальной координаты волновые лучи в целом сохраняют свое первоначальное положение (рис. 2.10 а-в, д-ж, и-л). На частоте $\sigma = 1.10$ при $r/R = 0.31$ можно визуальнo различить волны, исходящие из острых углов полости, которые ранее не проявлялись в осевом сечении $r/R = 0$. При

этом интенсивность таких волн возрастает при приближении к $r/R = 0.62$. Азимутальное поле скорости в поперечном сечении $z/L = 0.50$ представляет собой пару вихрей, смещенных по часовой стрелке относительно плоскости $\varphi = 0$ (рис. 2.10г). Положение этих вихрей соответствует двум ветвям замкнутой траектории $A(1,1)$, проходящим через поперечное сечение. В течение периода либраций вихри перемещаются на периферию полости и затухают, на смену им приходят вихри с противоположным знаком завихренности. В то же время наблюдения показывают, что отдельные частицы жидкости совершают антициклоническое вращение по круговой траектории. Таким образом, волновой аттрактор $A(1,1)$ имеет тенденцию к двумерности в плоскости наклоненной относительно осевого сечения.

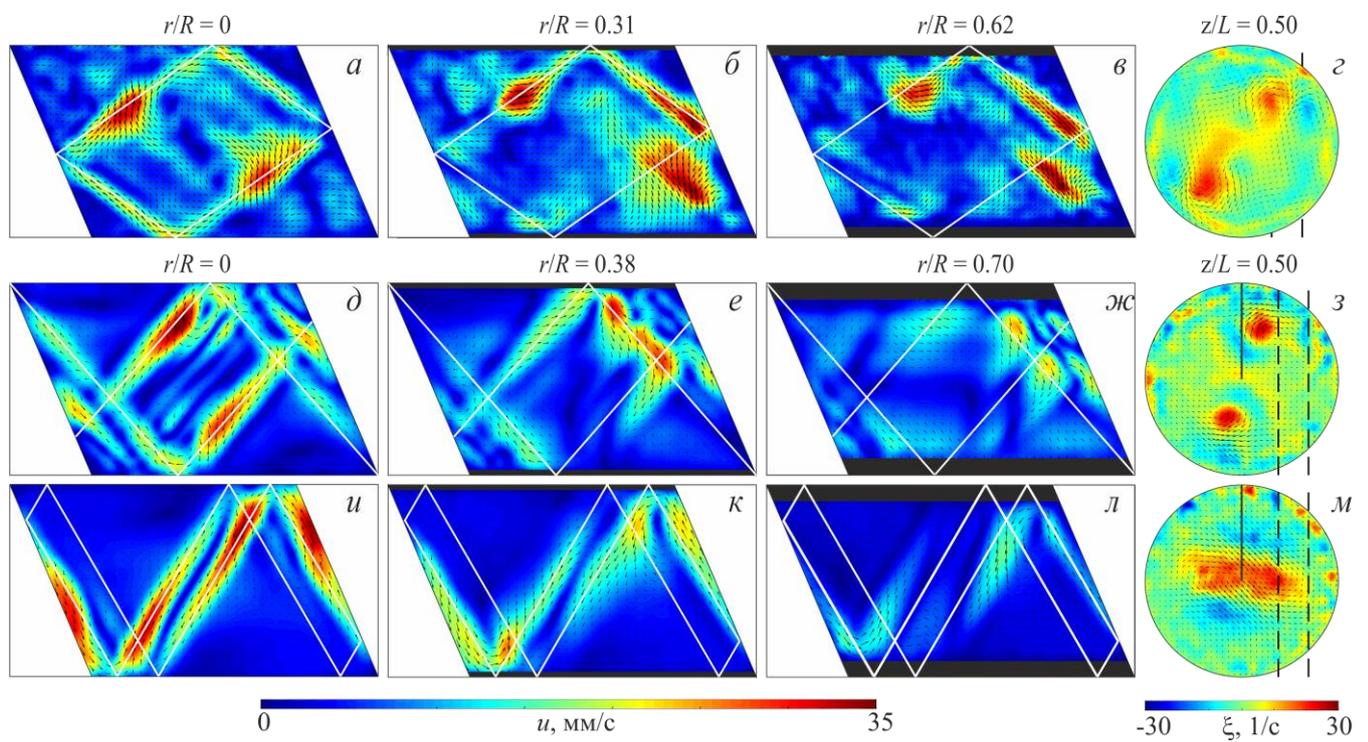


Рис. 2.10. Мгновенные поля скорости при $\sigma = 1.10$, $\varepsilon = 0.03$ (а–в); $\sigma = 1.44$, $\varepsilon = 0.02$ (д–ж); $\sigma = 1.64$, $\varepsilon = 0.01$ (и–л) для различных r/R в фазе $\Omega_{lib}t = 0$ и $E = 4.7 \cdot 10^{-5}$. В правом столбце (z, з, м) показаны мгновенные поля скорости в поперечном сечении $z/L = 0.50$. Вертикальная черная линия указывает направление $\varphi = 0$, пунктирные красные линии соответствуют сечениям r/R , представленным во втором и третьем столбцах. Направление вращения полости по часовой стрелке.

Аналогичная пространственная структура характерна для режима симметричного отражения инерционных волн $C(1,1)$ при частоте $\sigma=1.44$ (рис. 2.10*д-ж*). В этом случае волны, исходящие из острых углов и видимые при $r/R=0$ (рис. 2.10*д*), не проявляются при $r/R=0.38$ и 0.70 (рис. 2.10*е, ж*). Это указывает на то, что закачка энергии в замкнутую траекторию реализуется по-другому. Распределение пульсационной скорости в поперечном сечении (рис. 2.10*з*) аналогично режиму $A(1,1)$ (рис. 2.9*з*). Тем не менее, плоскость, проходящая через вихри, имеет меньший наклон по отношению $\varphi=0$.

При частоте $\sigma=1.64$, соответствующей $A(3,1)$, ветви аттрактора в центральной части полости располагаются на более близком расстоянии друг от друга (рис. 2.10*и,к*). В результате в поперечном сечении $z/L=0.50$ вблизи оси вращения формируется вихрь, направление вращения которого изменяется каждые $\sim \pi/2$ (рис. 2.10*м*). При этом в сечении $r/R=0.38$ структура потока остается симметричной относительно $z/L=0.50$ (рис. 2.10*к*), что сильно отличается от режимов, описанных выше при $\sigma=1.10$ и 1.44 . При дальнейшем изменении радиальной координаты ($r/R=0.70$) скорость жидкости в центральной части сечения значительно уменьшается, волновые пучки отчетливо видны вблизи тупых углов полости (рис. 2.10*л*).

Таким образом, инерционные волны помимо эффектов фокусировки (тенденция к стягиванию на одну траекторию с последовательным уменьшением толщины волнового пучка) ориентируются в фиксированной меридиональной плоскости. Можно предположить, что эффект «захвата» связан с влиянием наклона торцевых стенок на азимутальное направление волновых лучей. С одной стороны, при отражении лучей от наклонной стенки угол относительно оси вращения θ сохраняется. Но, с другой стороны, азимутальные углы падающего и отражённого лучей должны отличаться и сильно зависеть от величины угла наклонной стенки α [44, 98, 47]. Благодаря этому эффекту в длинных каналах с трапецевидным поперечным сечением аттрактор $A(1,1)$ оказывается в своеобразной ловушке, расположенной в плоскости перпендикулярной наклонной

границе [98]. Если накачка энергии в систему исходит от одной стенки, то волновая энергия распределяется неравномерно по длине канала: ветви аттрактора четко проявляются только в зоне $\sim 1/4$ от общей длины канала. Эффекты «захвата» наблюдаются в самых разных постановках задач. Например, в работе [99] изучалось взаимодействие внутренних волн с подводной возвышенностью. После отражения плоского волнового фронта от конического дна, происходит «захват» волны в фиксированной плоскости. В случае сферического слоя волновые аттракторы подвергаются меридиональному «захвату» после серии отражений от границ полости [45]. В рассматриваемом случае асимметрия торцов приводит к нарушению азимутальной однородности излучаемых волн. При этом, «конический веер» волн, падающих на наклонную стенку, как бы собирается и поворачивается в направлении наклона. Этот вывод подтверждается квазидвумерной формой режимов $A(1,1)$ и $C(1,1)$. Детальное исследование этого эффекта выходит за рамки диссертационной работы.

На рис. 2.11 показана серия мгновенных полей скорости для $\sigma = 1.44$ в различные фазы колебаний. Видно, что волны (рис. 2.11*a-z*), генерируемые вблизи острых углов, со временем параллельно смещаются к оси вращения, в то время как замкнутая траектория сжимается в поперечном размере. В фазе $\Omega_{lib}t = \pi$ структура потока аналогична рис. 2.10*a*, но направление движения жидкости вдоль замкнутой траектории противоположно. В прямоугольном сечении, повернутом относительно сечения с наклонными торцами на угол $\varphi = \pi/2$ (рис. 2.11*d,e*). Поля скорости отображают «вид сверху» рис. 2.11*a*. Энергия волн в основном сосредоточена вблизи наклонных торцов, а направление излучения волн хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями (белые линии) описанным в [1]. При этом волны не проникают глубоко в объем жидкости, а замыкаются на расстоянии $1/3$ от длины полости. В фазе $\Omega_{lib}t = \pi/2$ (рис. 2.11*e*) скорость потока в прямоугольном сечении очень мала, но можно различить отдельные волновые пучки. Таким образом, можно сделать вывод о том, что замкнутая траектория

наблюдается только вблизи плоскости, проходящей вдоль наклона торцевых стенок.

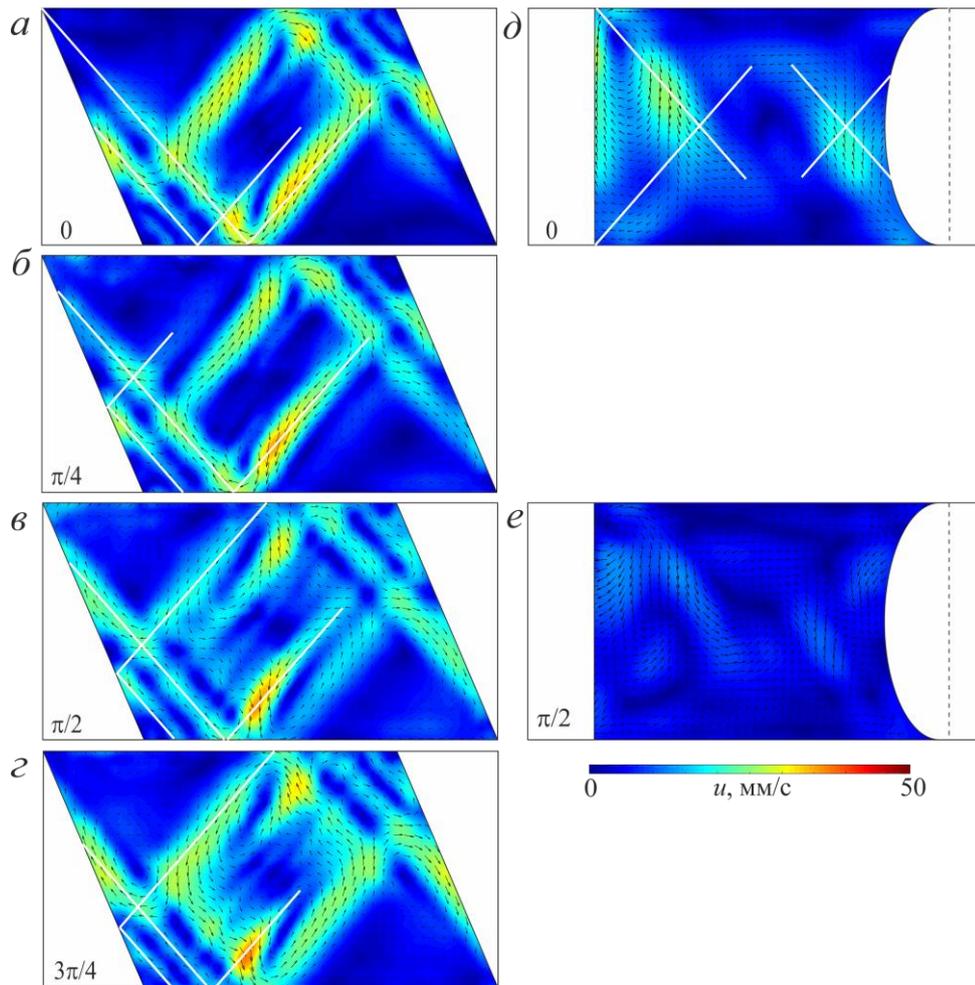


Рис. 2.11. Мгновенные поля скорости для разных фаз либраций $\Omega_{lib}t$ в осевом сечении при $\sigma = 1.44$ $\varepsilon = 0.03$ (а-г) и $\varepsilon = 0.04$ (д, е), $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$. Угол наклона торцов составляет $\alpha = 23.0^\circ$. Белые линии соответствуют теоретическому предсказанию направления распространения волн.

Мгновенные поля завихренности вблизи торцов (рис. 2.12а,б) и в центре полости (рис. 2.10з) качественно отличаются друг от друга. В сечении $z/L = 0.50$ наблюдается пара вихрей, расположенных на одинаковом расстоянии от оси вращения. В то время как при $z/L = 0.34$ вихри локализованы вблизи тупых углов и вытянуты по горизонтали. Такая форма обусловлена особенностями переноса энергии волны от торцов в объем полости (рис. 2.11д). Со временем вихри поднимаются вдоль наклонного торца и затухают, а на их месте появляются вихри противоположного направления закрутки (рис. 2.12в). В то же

время интенсивность пульсационного движения уменьшается при дальнейшем смещении координаты z/L к острому углу полости (рис. 2.12б).

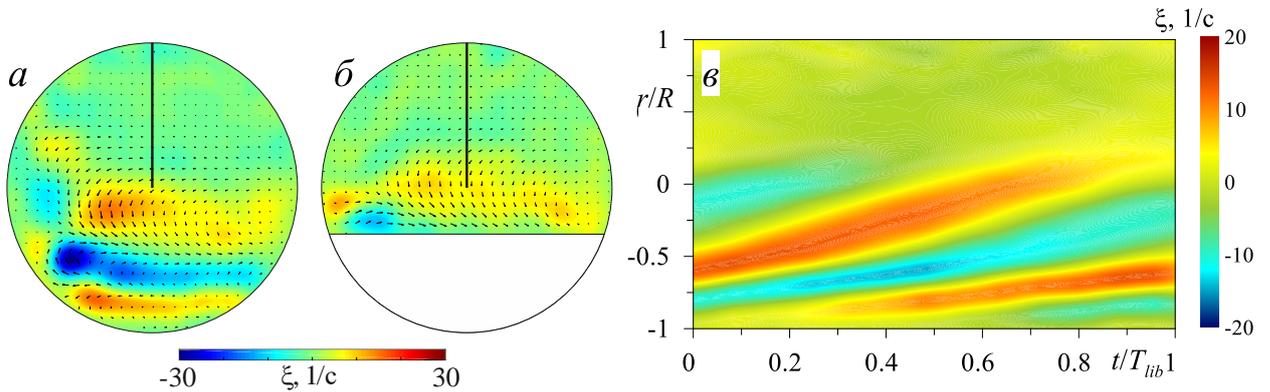


Рис. 2.12. Мгновенные поля завихренности ξ при $\sigma = 1.44$ и $\varepsilon = 0.04$ в поперечном сечении в зависимости от координаты $z/L = 0.34$ (а) и 0.22 (б). На фрагменте в показано как меняется распределение мгновенной завихренности в осевом сечении $\varphi = 0^\circ$ со временем (черная вертикальная линия на а, б). Число Экмана $E = 4.7 \cdot 10^{-5}$, угол наклона торцов $\alpha = 23.0^\circ$.

2.2.1.2. Влияние угла наклона торцов

Инерционный отклик жидкости для различных значений α в диапазоне частот $\sigma = 0.2 - 2.0$ показан на рис. 2.13. Представленные зависимости имеют немонотонный вид и характеризуется наличием ярко выраженных экстремумов. Каждому пику соответствует резонансный режим, характеризующийся определённым пространственным распределением кинетической энергии. Для угла наклона $\alpha = 8.5^\circ$ в полости основным типом резонанса является режим инерционной моды $M(n, m, k)$. Во вращающихся полостях различной геометрии режим инерционной моды сопровождается наличием крупномасштабных колебаний жидкости [39, 48, 16] (рис. 2.13). Собственные значения инерционных мод для $\alpha = 8.5^\circ$ и 15.0° представлены в таблице 2.4, для $\alpha = 23.0^\circ$ в таблице 2.3. Анализируя полученные карты течений можно заметить, что с увеличением α максимумы скорости смещаются в область более высоких частот либраций, что связано с уменьшением длины полости.

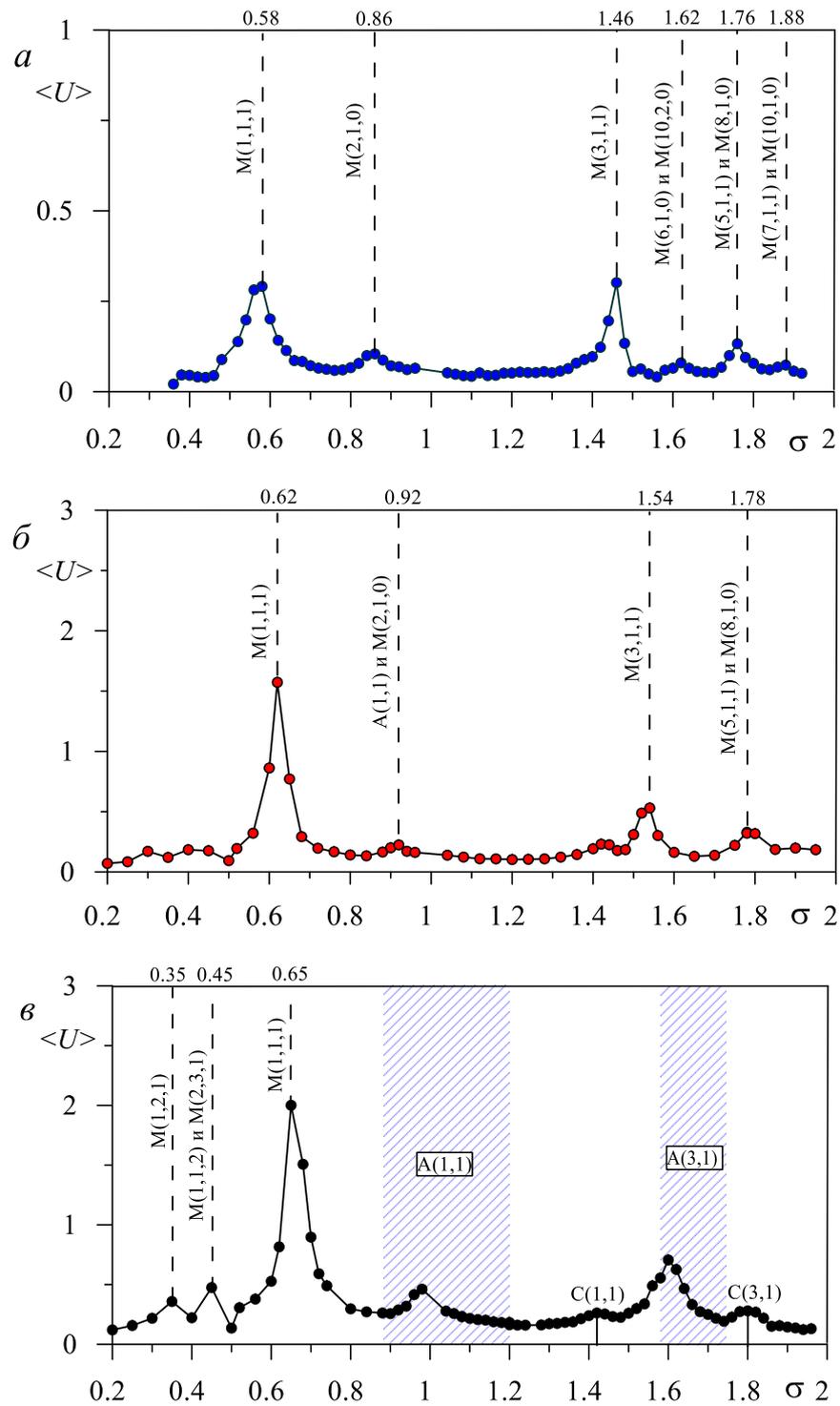


Рис. 2.13. Интенсивность пульсационного потока в зависимости от σ для: (а) $\alpha = 8.5^\circ$, $E = 2.0 \cdot 10^{-3}$; (б) $\alpha = 15.0^\circ$, $E = 2.4 \cdot 10^{-4}$; (в) $\alpha = 23.0^\circ$, $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$. Заштрихованные области на (в) соответствуют аттрактору $A(n,m)$; сплошными линиями обозначен режим симметричного отражения волн $C(n,m)$. Пунктирными линиями показаны собственные значения инерционных мод $M(n,m,k)$, полученные экспериментально.

Таблица 2.4. Собственные значения инерционных мод при различных a

| $\alpha, ^\circ$ | $a = R / L$ | n | m | k | $\sigma_{\text{теория}}$ | $\sigma_{\text{эксп}}$ |
|------------------|-------------|------|------|-----|--------------------------|------------------------|
| 8.5 | 0.29 | 1 | 1 | 1 | 0.574 | 0.58 |
| | | 2 | 1 | 0 | 0.857 | 0.86 |
| | | 3 | 1 | 1 | 1.461 | 1.46 |
| | | 5 | 1 | 1 | 1.758 | 1.76 |
| | | 6 | 1 | 0 | 1.636 | 1.62 |
| | | 7 | 1 | 1 | 1.868 | 1.88 |
| | | 8 | 1 | 0 | 1.769 | 1.76 |
| | | 10 | 1 | 0 | 1.844 | 1.88 |
| | | 10 | 2 | 0 | 1.582 | 1.62 |
| | | 15.0 | 0.31 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | | | 0 | 0.906 | 0.92, A (1,1) |
| 3 | 1 | | | 1 | 1.511 | 1.54 |
| 5 | 1 | | | 1 | 1.786 | 1.78 |
| 8 | 1 | | | 0 | 1.794 | 1.78 |

Для детального исследования влияния геометрии полости на структуру течения рассмотрим диапазон частот, характерный для режима аттрактора A(1,1) (рис. 2.14). При $\alpha = 8.5^\circ$ структура течения представляет собой систему тороидальных вихрей с осевым волновым числом $n = 2$ (рис. 2.15г). Значение собственной частоты невязкой инерционной моды соответствует экстремуму $\sigma_{2,1,0}^* = 0.86$, показанному пунктирной линией на рис. 2.14. На рис. 2.15г видно, что зеркальная симметрия тороидальных потоков нарушена выделенным направлением вдоль большей диагонали. Это движение имеет сходство с одновихревым течением на рис. 2.15а, характерным для моды M(1,1,1). При этом структура моды M(1,1,1) с увеличением угла наклона α остается неизменной (рис. 2.15б, в).

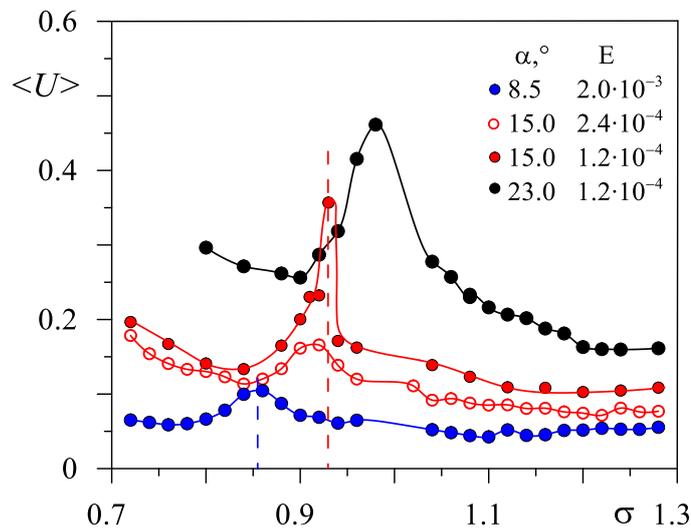


Рис. 2.14. Зависимость интенсивности пульсационного течения в осевом сечении с наклонными торцами от безразмерной частоты σ для различных углов α и чисел Экмана E . Пунктирные линии соответствуют собственным значениям инерционной моды $\sigma_{2,1,0}^*$.

С увеличением угла α инерционная мода $M(2, 1, 0)$ постепенно затухает, а эффекты фокусировки проявляются сильнее (рис. 2.15*д, е*). Так, при $\alpha = 15.0^\circ$ в осевом сечении можно одновременно идентифицировать две замкнутые траектории (рис. 2.15*д*). Внешняя траектория имеет вид параллелограмма и визуально напоминает аттрактор $A(1, 1)$. В то же время стороны внутреннего параллелограмма образованы волновыми лучами, исходящими из острых углов полости. В противоположной фазе либраций направление циркуляции жидкости вдоль сторон параллелограмма противоположное. Наконец, при $\alpha = 23.0^\circ$ траектория сфокусированных лучей аттрактора $A(1, 1)$ проявляется наиболее ярко (рис. 2.15*е*). Схожий результат можно увидеть для моды $M(3, 1, 1)$ (рис. 2.15*ж*). С увеличением угла наклона торцов наблюдается вырождение моды $M(3, 1, 1)$ в аттрактор $A(3, 1)$ (рис. 2.15*з, и*).

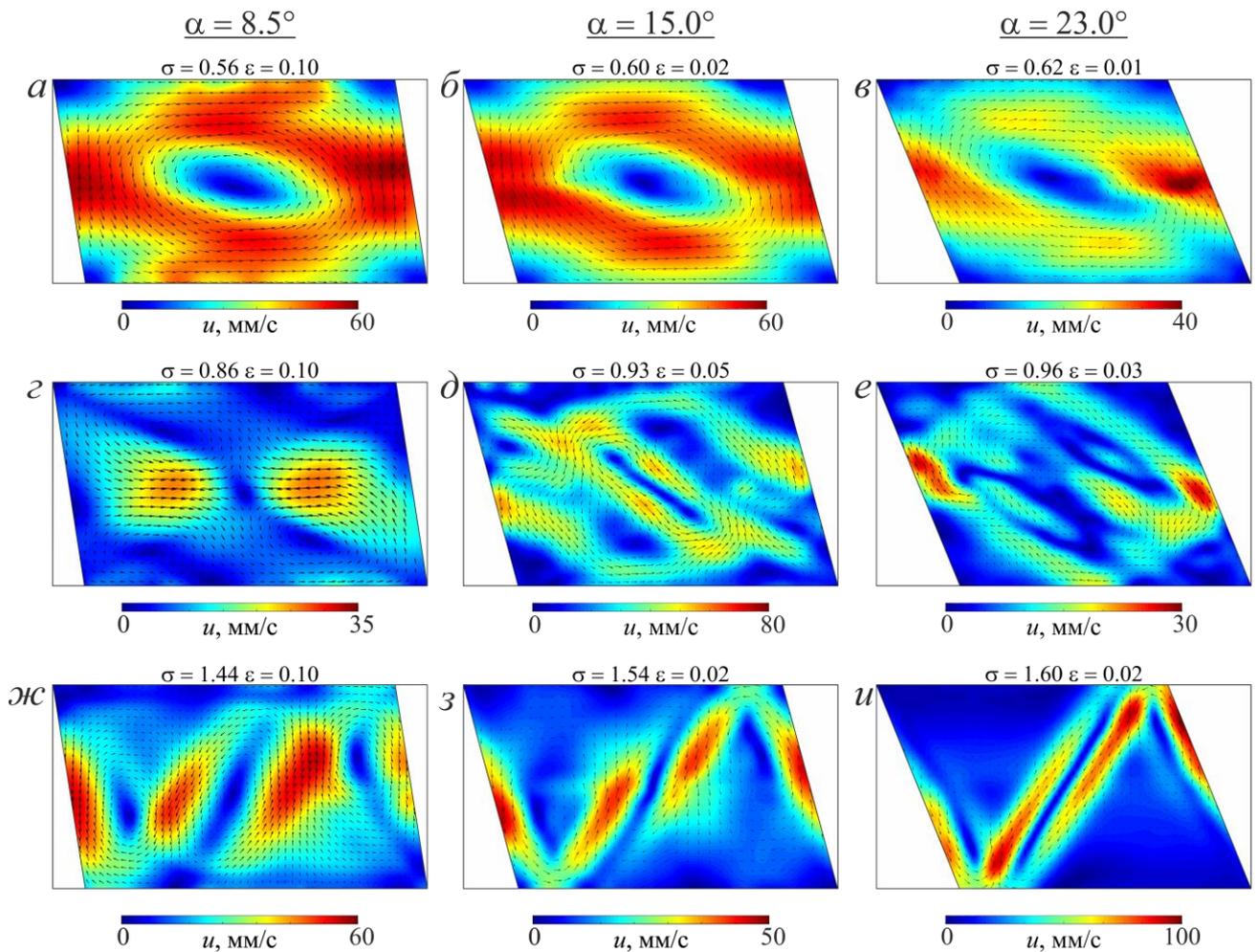


Рис. 2.15. Мгновенные поля скорости в осевом сечении для различных углов наклона торцов, полученные вблизи экстремумов на рис. 2.13. Фрагменты (в, е, ж) получены в фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$, (а, г, б, д, з, и) – $\Omega_{lib}t = \pi$.

2.2.1.3. Временная динамика инерционных волн

Рассмотрим временную динамику инерционных волн в различных режимах. Поскольку инерционные волны являются поперечными, частицы жидкости совершают антициклоническое круговое движение с частотой σ в плоскостях, лежащих под углами $\pm\theta$ относительно оси вращения. При этом осевая завихренность $\xi = \text{rot}_\varphi u$, касательная к волновым лучам, определяет фазу волны. За пределами области пространственного резонанса фаза волны распространяется перпендикулярно волновым лучам со скоростью v_φ и направлена к боковой стенке полости (рис. 2.16а–в). Временная диаграмма фазы (рис. 2.16в) получена

вдоль среза l (рис. 2.16а) и является асимметричной по отношению к торцевым стенкам. Это означает, что волновые лучи со стороны двух противоположных тупых углов полости работают синфазно, а создаваемые ими завихренности складываются. Поэтому при перемещении фазы к боковой стенке полости завихренность ξ со стороны острых углов гасится быстрее. Динамика распространения фазы сильно зависит от значения угла θ , а, следовательно, и от частоты либраций σ . Здесь следует заметить, что движение жидкости относительно правого и левого торца является симметричным, поэтому для обработки данных можно рассматривать как верхнюю, так и нижнюю часть кюветы относительно оси вращения.

Резонансный режим с одной пространственной структурой $M(3,1,1)$ напоминает стоячую волну (рис. 2.16г–е). Если в фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$ хорошо различимы отдельные волновые лучи, исходящие из углов полости, то при $\Omega_{lib}t = \pi$ возбуждается инерционная мода с осевым волновым числом $n = 3$ (рис. 2.16д). В течение периода либраций закрутка жидкости в вихрях меняется на противоположную, при этом максимумы завихренностей сохраняют свое положение (рис. 2.16е). Стоит отметить, что внешние контуры вихревых структур могут быть описаны волновыми лучами, испущенными из любых двух противоположных углов полости. Похожие режимы стоячих волн, но с четными значениями n , наблюдались в либрирующем цилиндре с прямыми торцами [16], а также либрирующем кубе [39].

Более сложная волновая динамика наблюдается в комбинационных режимах, когда на одной частоте в разные моменты времени возбуждаются инерционные моды с различными волновыми числами. Так, при частоте $\sigma = 1.62$ (рис. 2.16ж–и) попеременно возникают две симметричные моды $M(6,1,0)$ и $M(10,2,0)$. Первая, доминантная мода, наиболее ярко проявляется в фазах либраций $\Omega_{lib}t = \pi / 2$ и $\Omega_{lib}t = 3\pi / 2$. При этом асимметрия кюветы способствует деформации пространственной структуры моды вблизи торцов полости: величина завихренности около тупых углов существенно выше, чем вблизи острых

(рис. 2.16з). Это указывает на то, что тупые углы закачивают в систему больше энергии по сравнению с острыми. Вторая мода, более высокого порядка, проявляется слабее и хорошо различима в фазах $\Omega_{lib}t = 0, \pi$. Фазовая диаграмма волнового движения показывает, что вблизи тупого угла сохраняется режим стоячих волн, при котором происходит периодическое изменение знака завихренности (рис. 2.16и). Вблизи острого угла, где пространственный резонанс проявляется слабее, преобладает режим бегущих волн.

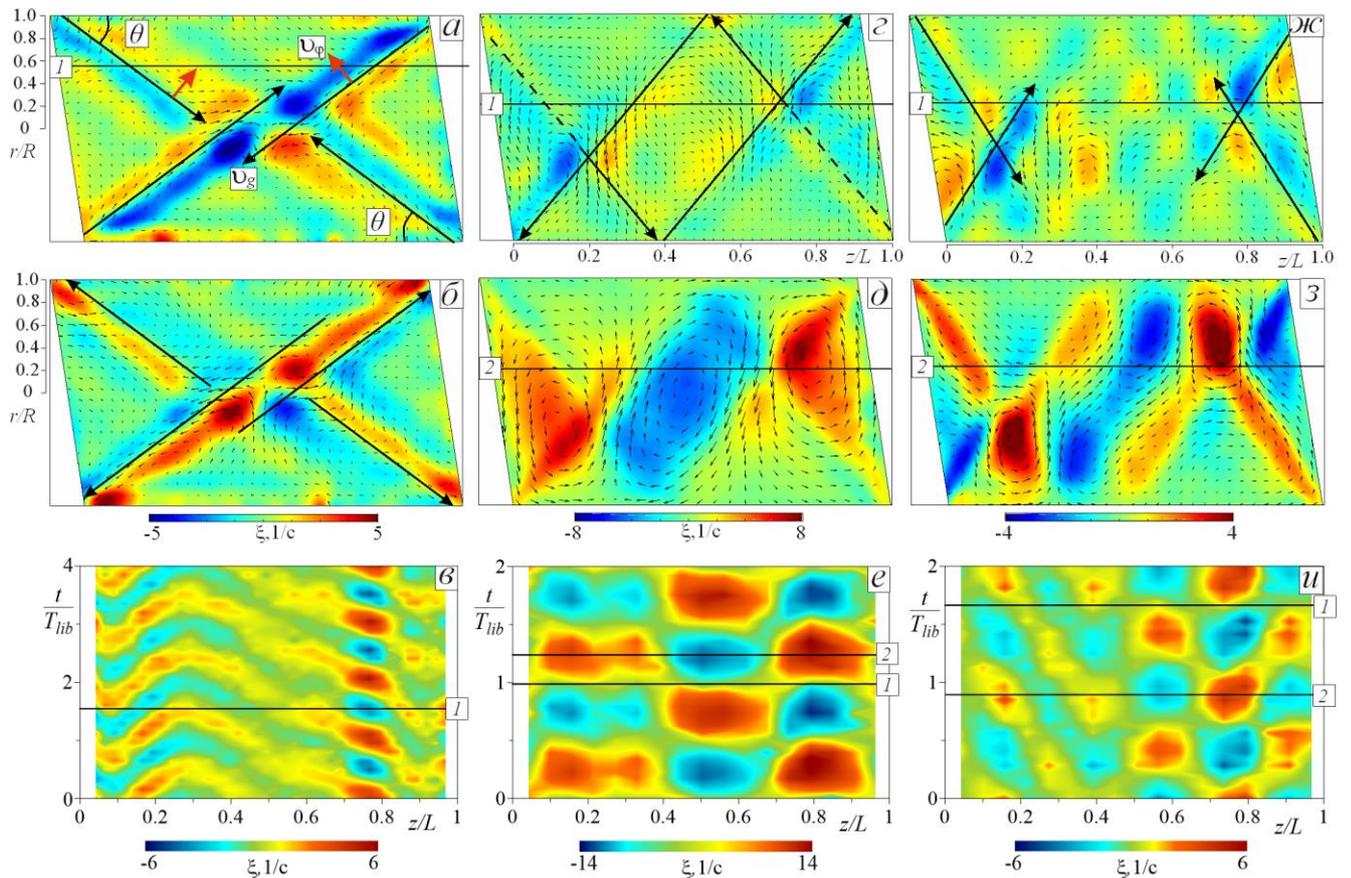


Рис. 2.16. Мгновенное поле завихренности в осевом сечении полости при частотах либраций $\sigma = 1.08$ (а, б) $\sigma = 1.46$ (в, д) и $\sigma = 1.62$ (ж, з) для угла наклона торцов $\alpha = 8.5^\circ$; черными стрелками показано направление групповой скорости инерционных волн v_g , красные стрелки соответствуют фазовой скорости $-v_\phi$. В нижнем ряду (в, е, и) представлены соответствующие временные диаграммы завихренности ξ вдоль направлений, обозначенных горизонтальными черными линиями на верхних фрагментах в моменты времени 1 и 2; направление оси z/L отсчитывается от левого торца. Положительные значения ξ соответствуют направлению закрутки против часовой стрелки. Амплитуда либраций $\varepsilon = 0.10$, число Экмана $E = 2.0 \cdot 10^{-3}$.

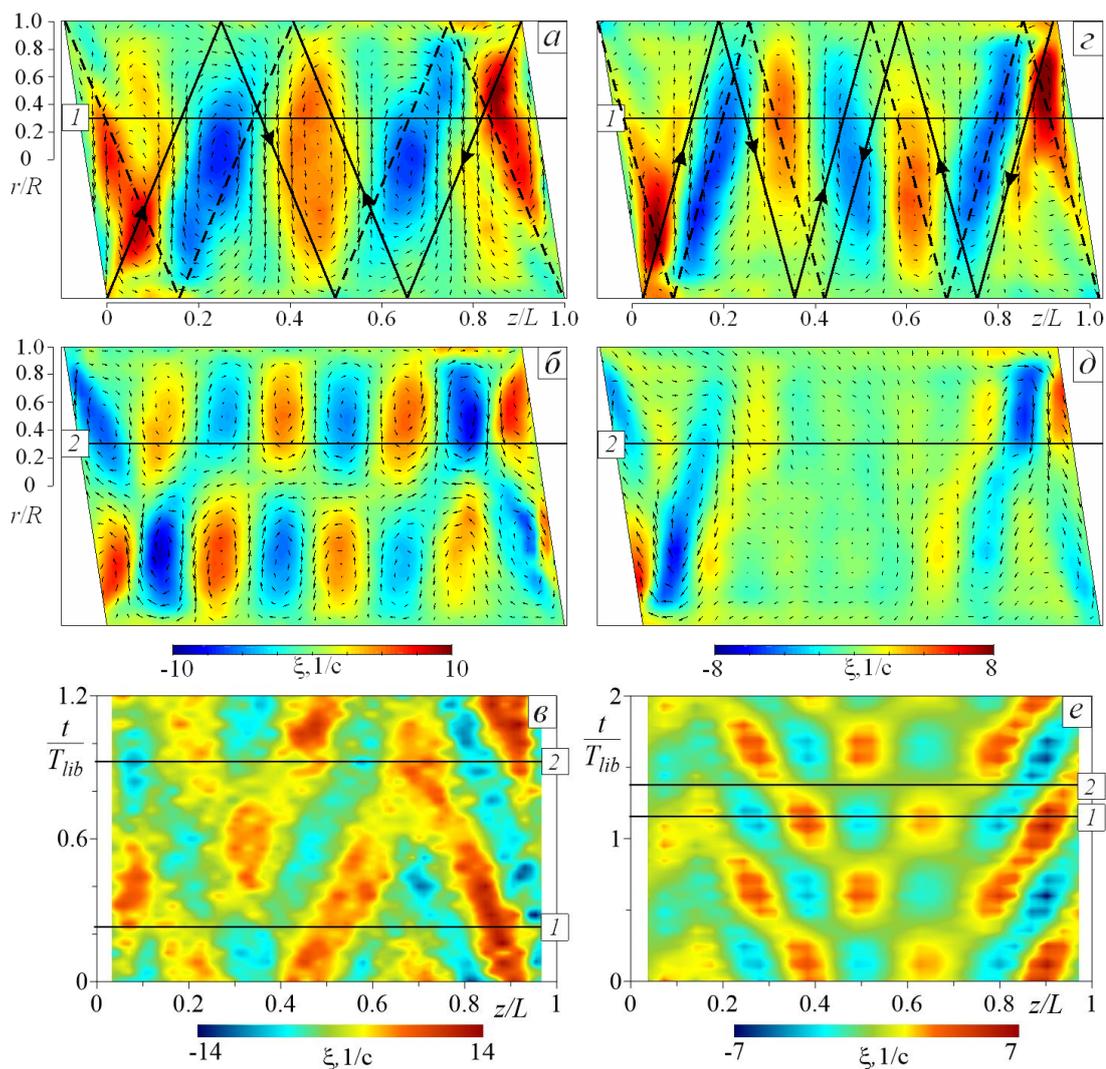


Рис. 2.17. Мгновенное поле завихренности в осевом сечении полости при частотах либраций $\sigma=1.76$ (а, б) и $\sigma=1.88$ (в, д), $\varepsilon=0.10$ и $E=2.0 \cdot 10^{-3}$. В нижнем ряду (е, е) представлены соответствующие временные диаграммы завихренности ξ вдоль направлений 1 и 2, обозначенных горизонтальными линиями на фрагментах (а, б, в, д).

Случаи попеременного возбуждения осесимметричной и неосесимметричной моды представлены на рис. 2.17. При частоте $\sigma=1.76$ наблюдается моды $M(5,1,1)$ и $M(8,1,0)$, переключение между которыми происходит в режиме бегущих волн (рис. 2.17а–в). В отличие от предыдущего случая завихренность ξ более равномерно распределена вдоль координаты z/L . В целом пространственно-волновую картину можно представить как две пары волн, одна из которых сходится вблизи точки $z/L=0.7$, а вторая расходится из

точки $z/L = 0.35$. Наконец, при частоте $\sigma = 1.88$ возбуждаются моды $M(7,1,1)$ и $M(10,1,0)$. В данном случае наибольшей кинетической энергией обладает неосесимметричная мода, в то время как осесимметричная проявляется только вблизи торцов полости и быстро диссипирует с расстоянием вдоль осевой координаты (рис. 2.17*г-е*). В центральной части полости колебательный режим больше напоминает стоячую волну. Аналогичная волновая динамика характерна для случая $M(3,1,1)$, когда в отсутствие дополнительного возмущения со стороны другой моды положение центров завихренности не менялось со временем (рис. 2.15*г-е*). В то же время вблизи торцов полости, где обе моды взаимодействуют между собой, наблюдается режим бегущих волн.

2.2.1.4. Влияние числа Экмана на волновые процессы

Для исследования влияния числа Экмана на толщину сдвиговых слоев в инерционной волне были выбраны частоты $\sigma = 1.44$ и 1.56 , характерные для режимов $C(1,1)$ и $A(3,1)$. Сравниваются мгновенные профили скорости в одной и той же фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$. В этом случае траектория волны в осевом сечении полости образует параллелограмм (рис. 2.18*а*). Измерение скорости жидкости осуществляется вдоль красной линии, проходящей перпендикулярно направлению распространения инерционных волн. В области малых чисел Экмана $E \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ профиль скорости представляет собой две противоположно направленные струи, которые соответствуют волновым пучкам, отраженным от боковой стенки полости. С увеличением числа Экмана ширина струй заметно увеличивается, и при $E = 7.1 \cdot 10^{-4}$, волны образуют единый сдвиговый слой (рис. 2.18*б*). Одновременно с увеличением числа Экмана наблюдается уменьшение поперечной скорости жидкости u_{\perp} в сдвиговых слоях. Поскольку законы масштабирования исследуются в линейном режиме, поперечная скорость нормирована на амплитуду либраций и линейную скорость на боковой границе $\varepsilon \Omega_{rot} R$.

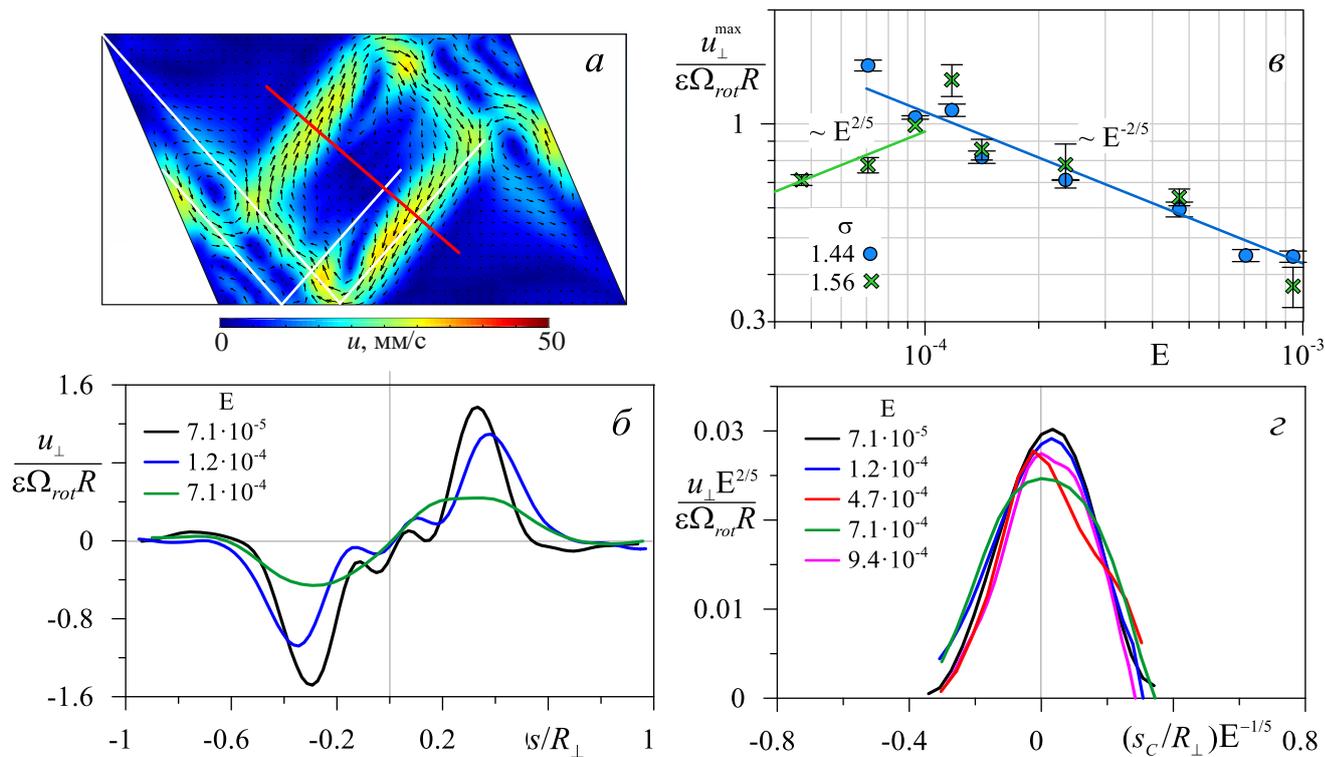


Рис. 2.18. Мгновенное поле скорости в фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$ в осевом сечении при $\sigma = 1.44$, $\varepsilon = 0.03$ и $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$ (а). Профили безразмерной скорости (вдоль красной линия (а)) при различных числах Экмана (б). Максимальное значение скорости в волновом пучке от числа Экмана для $\sigma = 1.44$ и 1.56 (в). На фрагменте (г) показана зависимость нормированных профилей скорости в пучке на $\varepsilon E^{-2/5}$ от локальной координаты s_c / R_{\perp} нормированной на $E^{1/5}$.

На рис. 2.18в показано амплитудное значение скорости в волновом пучке. Видно, что в диапазоне чисел Экмана $E = 10^{-4} - 10^{-3}$ скорость жидкости уменьшается по закону $\sim \varepsilon E^{-2/5}$. Полученный закон хорошо описывает результаты, полученные для различных частот либраций. Однако, уже при $E < 10^{-4}$ наблюдается противоположная зависимость – скорость $u_{\perp} / (\varepsilon \Omega_{rot} R)$ увеличивается с числом Экмана по закону $\sim \varepsilon E^{2/5}$. Для исследования влияния числа Экмана на толщину волновых пучков осуществлялся переход в систему отсчета сдвигового слоя. Первоначально вычисляется модуль профиля скорости представленного на рис. 2.18б, который в последствие осредняется вблизи максимума скорости. Следующим шагом профили полученные для разных чисел Экмана совмещаются друг с другом. Для этой цели вводится локальная

координата s_C / R_{\perp} , где s_C - координата экстремума скорости в профиле. Важно отметить, что для разных чисел Экмана положение точки $s_C / R_{\perp} = 0$ будет различным. На рис. 2.18г показано, что данные хорошо согласуются между собой, в случае нормировки ширины пучка на $E^{1/5}$, а скорость внутри пучка на $\varepsilon E^{-2/5}$.

Прямое сравнение результатов экспериментов с известными численными и теоретическими результатами является затруднительным, поскольку обычно в качестве характеристики потока используется азимутальная скорость. Тем не менее, качественные оценки законов масштабирования провести можно. В работе [92] теоретически исследовалась динамика жидкости в неравномерно вращающемся сферическом слое. В этом случае инерционные волны рождались на критических широтах внешней (вогнутые границы) и внутренней (выпуклые границы) сферического слоя. Ширина волновых пучков, рождённых внешними широтами, масштабировалась как $E^{1/5}$, в то время как для волн от внутренних широт был получен закон $E^{1/3}$. Аналогичный результат был получен в теории [43] и численных исследованиях [95] и [93] для диапазона чисел Экмана $E = 10^{-7} - 10^{-5}$. Для удобства рассматривался случай так называемых периодических орбит, когда инерционная волна образует замкнутую траекторию, не являющуюся аттрактором. Это соответствует режиму $C(1,1)$, когда инерционные волны генерируются вблизи острых углов полости и образуют замкнутую траекторию. Таким образом, полученные результаты $s_C / R_{\perp} \sim E^{1/5}$ хорошо согласуются для волн, возбуждаемых вогнутыми границами.

Из асимптотической теории [92] следует, что азимутальная скорость в сдвиговых слоях зависит от числа Экмана по закону $u_{\phi} \sim \varepsilon E^{3/10}$. Это означает, что по мере уменьшения ширины сдвигового слоя (уменьшения числа Экмана) инерционный отклик жидкости уменьшается. В настоящей работе данные были получены за пределами асимптотического предела малых чисел Экмана. Тем не менее, уже при $E < 10^{-4}$ для частоты $\sigma = 1.56$ скорость u_{\perp} также уменьшается с понижением E , что качественно согласуется с теоретическими предсказаниями. Подобный результат был получен в численных экспериментах [93] для диапазона

$E = 10^{-7} - 10^{-5}$, при этом закон сильно зависел от того, где генерируются волны. Если источником являлась внешняя сфера, т.е. вогнутая граница, азимутальная скорость изменялась как $u_\varphi \sim \varepsilon E^{1/5}$. В другом случае, когда внешняя сфера вращалась равномерно, а либрации совершала внутренняя сфера, $u_\varphi \sim \varepsilon E^{1/12}$.

2.2.2. Осредненные течения, генерируемые инерционными волнами

В отсутствие либраций полость и жидкость совершают твердотельное вращение. Периодические изменения скорости приводят к появлению пульсационного движения в вязких пограничных слоях Экмана на торцевых стенках полости. В результате в объеме жидкости возникает отстающее осреднённое дифференциальное вращение (рис. 2.19а). Как было показано ранее в ряде теоретических [99, 100] и экспериментальных [61, 15] работ скорость осреднённого течения пропорциональна квадрату амплитуды либраций. В связи с этим, в дальнейшем результаты измерений будут нормироваться на величину ε^2 .

На рис. 2.19б показаны профили угловой скорости $\Delta\Omega / (\Omega\varepsilon^2)$ в поперечном сечении, проходящем через центр полости и на расстоянии $z/L = 0.15$. Визуально профили полностью аналогичны тем, которые наблюдаются в либрирующем цилиндре с прямыми торцами [61, 14]. Исключением является область вблизи углов, где возникает сильное опережающее течение. В цилиндре с прямыми торцами этот поток является осесимметричным [16] и связан с образованием осреднённых угловых вихрей (рис. 2.19б). Однако в случае симметрично наклонных торцов наблюдается нарушение осевой симметрии азимутального течения вблизи боковой границы полости. На рис. 2.19в цифрой 2 показан профиль скорости азимутального течения в сечении $z/L = 0.15$. В осевом сечении координата $z/L = 0.15$ (рис. 2.19б, цифра 2) располагается вблизи тупого угла полости.

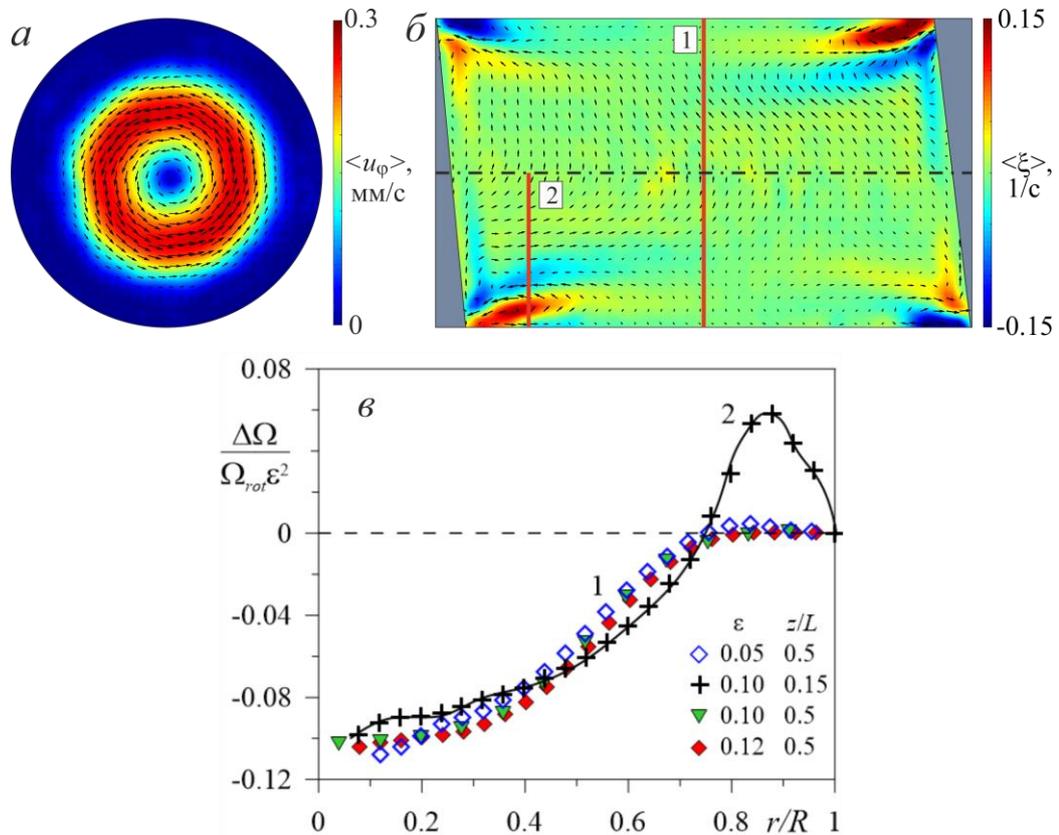


Рис. 2.19. Осредненные поля скорости $\langle u_\varphi \rangle$ в поперечном сечении (а) и завихренности $\langle \xi \rangle$ в осевом сечении (б) при $\sigma = 2.0$ и $\varepsilon = 0.12$. Фрагмент (а) представлен для $z/L = 0.50$, что соответствует (1) на (б). Красные линии (1) и (2) на (б) соответствуют координате z/L , вдоль которой располагается «световой нож» лазера. На фрагменте (в) показаны профили безразмерной азимутальной скорости, полученные вдоль линий (1) и (2). Результаты представлены для $\alpha = 8.5^\circ$ и $E = 2.0 \cdot 10^{-3}$.

В диапазоне частот $0 < \sigma < 2$ инерционные волны при отражении от боковой стенки цилиндра возбуждают пульсационное движение жидкости в пограничном слое Стокса. На этом фоне возникает стационарная меридиональная циркуляция, структура которой сильно зависит от режима пульсационного течения. На рис. 2.20 представлено осредненное поле скорости вблизи боковой стенки полости, распределение завихренности и фазовая диаграмма пульсационного течения в трех различных режимах: нерезонансный режим бегущей волны (а–в); резонансный режим стоячей волны (г–е); резонансный режим бегущей волны (ж–и).

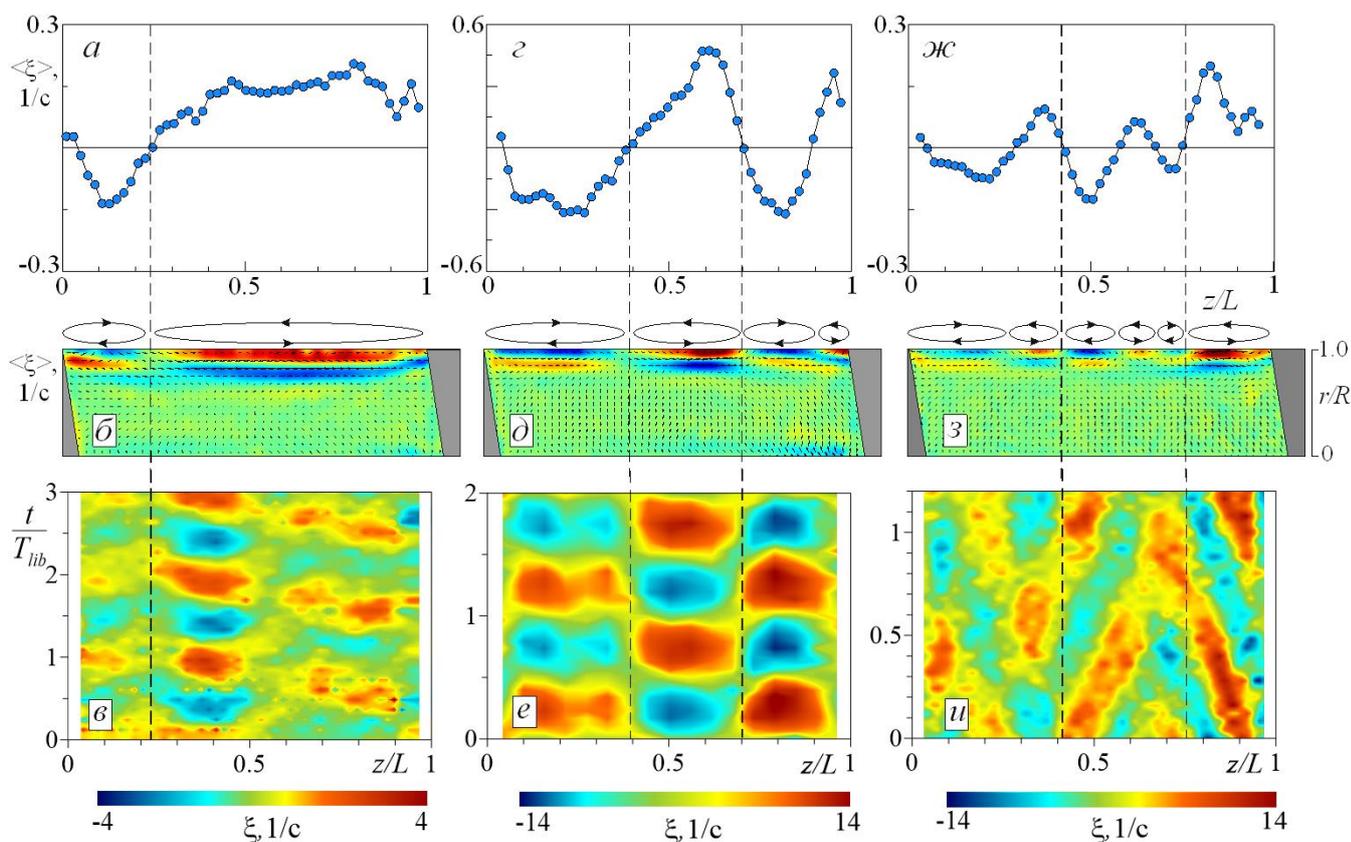


Рис. 2.20. Зависимость завихренности $\langle \xi \rangle$ осредненного течения вблизи боковой границы полости ($r/R \approx 0.9$) от координаты z/L при $\sigma = 0.72$ (а); 1.46(з); 1.76(ж). Во втором ряду представлена схема циркуляции жидкости для σ : 0.72(б); 1.46(д); 1.76(з). В нижнем ряду (в, е, и) показаны временные диаграммы распространения фазы волн для этих же частот (см. рис. 2.16, рис. 2.17).

На частоте $\sigma = 0.72$, в нерезонансном режиме, фаза инерционной волны широким фронтом распространяется со стороны тупого угла к острому (рис. 2.20в). Как видно, это приводит к возникновению осредненного вихревого течения вблизи боковой границы полости, локализованного в пределах $z/L = 0.2 - 1.0$. Направление циркуляции жидкости в вихре является циклоническим. Важно отметить, что это совпадает с направлением распространения фазы волны. Продольный размер вихря также совпадает с шириной фронта бегущей волны. При этом его поперечный размер ограничивается несколькими толщинами пограничного слоя Стокса $\delta_s = \sqrt{2\nu / \Omega_{lib}}$. Бегущая волна со стороны острого угла возбуждает антициклоническое вихревое течение, локализованное в пределах $z/L = 0.2 - 1.0$.

Можно отметить, что в рассматриваемом случае направление осредненной циркуляции, возбуждаемой инерционными волнами и угловыми колебаниями полости (рис. 2.20а) совпадают и усиливают друг друга. В нижней половине полости, которая не показана на рис. 2.20б, осреднённое движение жидкости относительно тупого и острого угла аналогичное. Это означает, что осреднённое течение не является осесимметричным.

В резонансном режиме стоячей волны при частоте $\sigma = 1.46$ структура осредненного течения имеет вид системы вихрей, количество и продольный размер которых согласуется с пространственными характеристиками инерционной моды $M(3,1,1)$ (рис. 2.20г–е). В диапазоне $z/L = 0.4 - 0.7$ осредненная завихренность циклоническая, в то время как при $z/L = 0 - 0.4$ и $z/L = 0.7 - 0.9$ антициклоническая. Вблизи мест соединения боковой и торцевой стенок полости, структура осредненного течения, возбуждаемого инерционной модой, осложняется присутствием угловых вихрей. Если вблизи острого угла циркуляция жидкости, возбуждаемая обоими эффектами, согласуется и усиливается, то вблизи тупого угла ситуация противоположная. Судя по тому, что угловой циклонический вихрь деформирован и прижат к торцевой стенке, интенсивность антициклонического вихря от инерционной моды существенно выше. Подобная структура осредненного течения возникает в либрирующем цилиндре с прямыми торцами [16]. В отличие от рассматриваемого случая вихри имели осесимметричную тороидальную форму с осевым волновым числом $n + 2$.

В резонансном режиме бегущей волны структура течения более сложная ($\sigma = 1.76$, рис. 2.20ж–и). Две волны, сходящиеся в точку с координатой $z/L = 0.7$, индуцируют пару согласованно вращающихся осредненных вихрей. Как и в нерезонансном режиме, направление циркуляции жидкости определяется направлением распространения фазы волны. В точке с координатой $z/L = 0.35$ расходящиеся волны также генерируют пару вихрей, но уже с противоположной закруткой. Важно отметить, что течение вблизи тупого угла усиливается бегущей волной. В то же время интенсивность антициклонического вихревого движения вблизи острого угла ослабляется волной. При частоте $\sigma = 1.88$, где попеременно

возбуждаются моды $M(7,1,1)$ и $M(10,1,0)$ эффект менее выражен из-за вязкой диссипации волнового движения в пограничном слое Стокса. Таким образом, инерционные волны оказывают сильное влияние на структуру осреднённого течения вблизи боковой стенки полости. При этом направление осреднённой циркуляции в значительной мере зависит от направления распространения фазы волны.

Влияние инерционных волн на зональное течение наиболее заметно при угле наклона $\alpha = 23.0^\circ$. На рис. 2.21 (левый столбец) показана серия мгновенных полей аттрактора инерционных волн $A(1,1)$, соответствующих различным частотам σ . Фокусировка волн сопровождается появлением системы осреднённых азимутальных вихрей, радиальное положение которых не меняется со временем и зависит только от σ (рис. 2.21, средний столбец). Эксперименты проведенные в различных поперечных сечениях z/L (рис. 2.22) показывают, что вихри являются практически двумерными.

При $\sigma = 0.90$ вблизи мест отражения ветвей аттрактора от торцевых стенок возникает пара осреднённых вихрей, совершающих антициклоническое вращение (рис. 2.21*а, е*). При увеличении частоты до $\sigma = 0.95$ (рис. 2.21*б, ж*) положение точек отражения аттрактора от наклонной границы полости смещается к оси вращения. В свою очередь, антициклонические вихри уплотняются вдоль линии наклона торцов и прижимаются к оси вращения полости. В то же время формируется вторая пара вихрей с циклонической закруткой.

При частоте $\sigma = 1.06$ (рис. 2.21*в, з*) отражение ветвей аттрактора происходит практически от оси вращения, при этом образуется цилиндрическое опережающе вращающееся ядро. Можно отметить, что зональная структура течения неосесимметрична с азимутальным волновым числом $k = 2$. Дальнейшее увеличение частоты либраций сопровождается смещением точки отражения инерционных волн на наклонных границах с оси вращения в сторону тупых углов (рис. 2.21*г, и*). В результате внутреннее ядро меняет свою форму, и вдоль линии наклона торцов появляется пара антициклонических вихрей (рис. 2.21*д, к*).

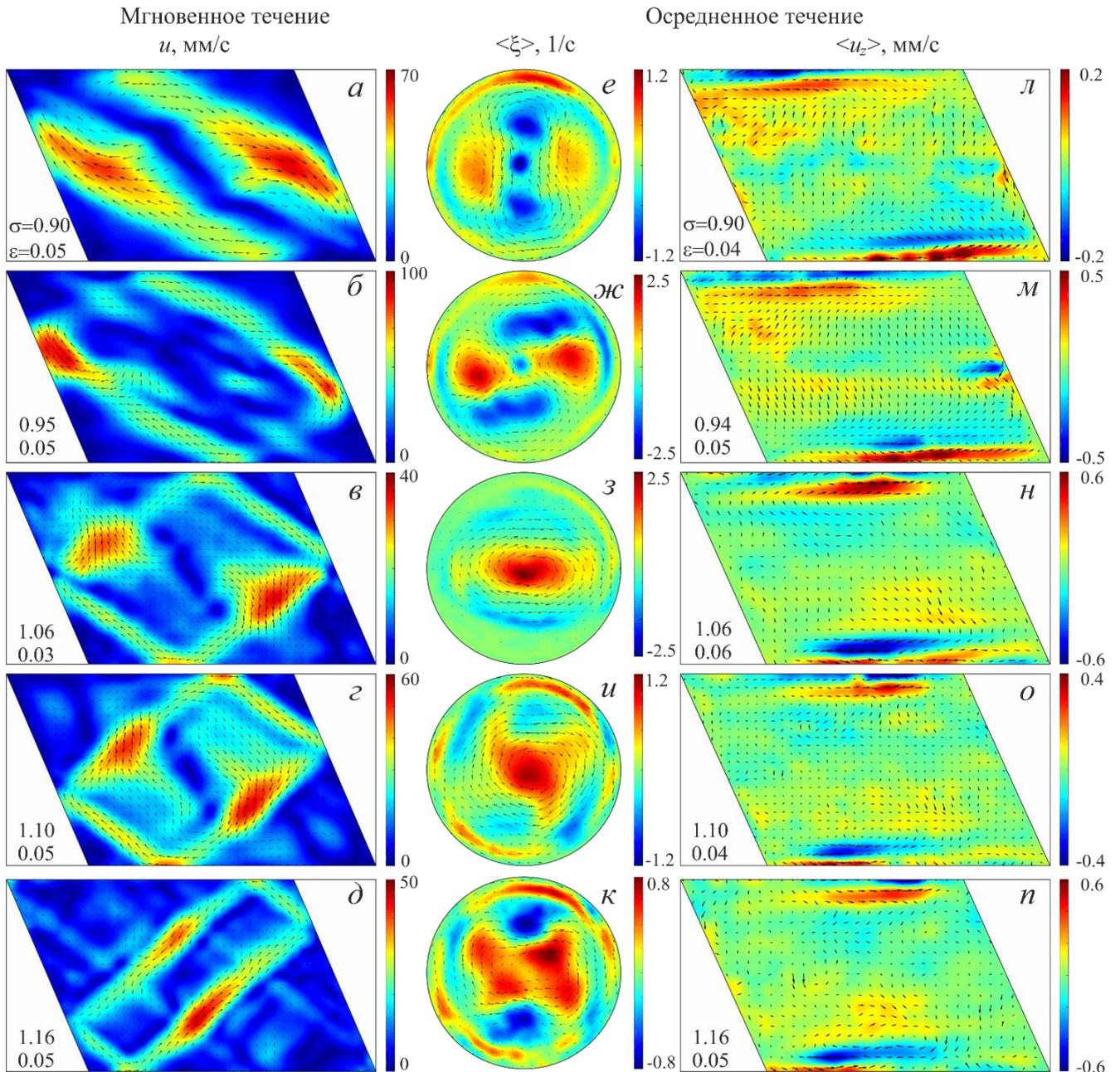


Рис. 2.21. Мгновенные поля скорости в осевом сечении в фазах $\Omega_{lib}t = 0$ (a-e) и $\Omega_{lib}t = \pi$ (д). В среднем столбце показаны соответствующие осредненные поля скорости в поперечном сечении при $z/L = 0.50$; цветом показана z – компонента завихренности; вращение полости происходит по часовой стрелке. В правом столбце показаны осредненные поля скорости в осевом сечении; цветом – горизонтальная компонента скорости $\langle u_z \rangle$, $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$.

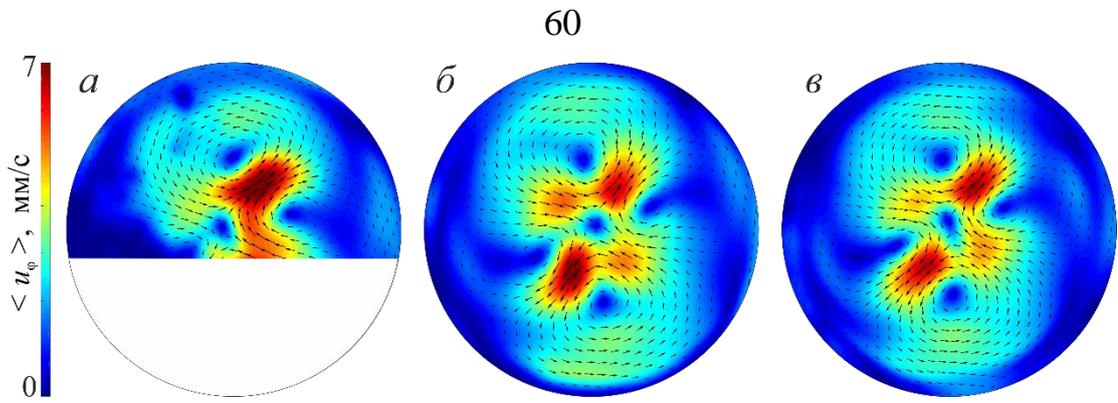


Рис. 2.22. Осредненные по периоду либраций поля азимутальной скорости при $\sigma = 1.0$, $\varepsilon = 0.08$ и $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$ для $\alpha = 23.0^\circ$ в различных z/L : 0.20 (а), 0.30 (б) и 0.50 (в). Координата z/L отсчитывается от острого угла полости. Белая область на фрагменте (а) показывает сечение наклонного торца.

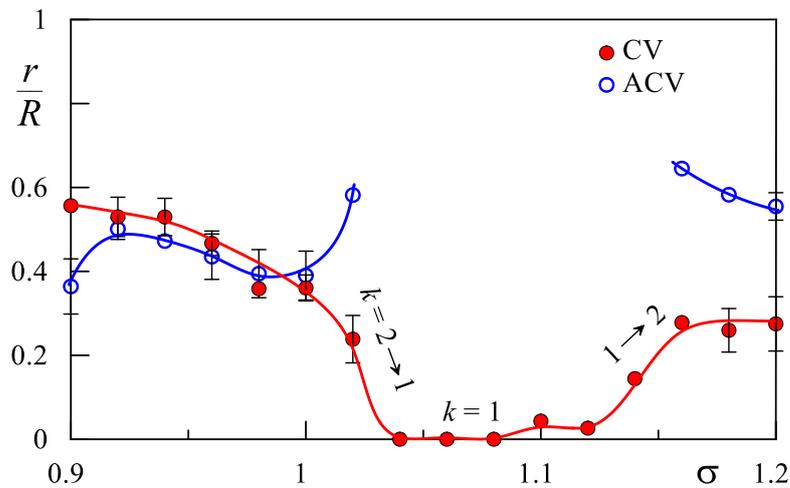


Рис. 2.23 Положение центров осредненных азимутальных вихрей в зависимости от частоты либраций σ для $z/L = 0.50$, $\varepsilon = 0.05$ и $E = 2.4 \cdot 10^{-4}$. Красными символами обозначены циклонические вихри (CV), синими – антициклонические (ACV).

Положение центров вихрей не меняется со временем и сильно зависит от частоты либраций (рис. 2.23). Так, для $\sigma = 0.90$ в поперечном сечении можно выделить две пары вихрей: циклонические вихри (CV – cyclonic vortices) на расстоянии $r/R \sim 0.5$ и антициклонические вихри (ACV – anticyclonic vortices) на расстоянии $r/R \sim 0.4$. С увеличением частоты либраций CV и ACV постепенно перемещаются к оси вращения полости. При $\sigma > 1.0$ на оси вращения начинает формироваться вихрь CV, вытесняя на периферию вихри ACV. В диапазоне частот $\sigma = 1.04 - 1.12$ структура течения представляет собой опережающее

азимутальное течение, а ACV не идентифицируются PIV-методом (рис. 2.22з). Направление зонального потока противоположно тому, которое наблюдается в отсутствие инерционных волн (рис. 2.19в). При $\sigma = 1.14$ центры CV смещаются от оси вращения, что связано с появлением ACV на расстоянии $r/R \sim 0.6$ (рис. 2.23). В диапазоне частот $\sigma = 1.14 - 1.20$ наблюдается постепенное смещение центров ACV к оси вращения полости.

Настоящие эксперименты показывают, что вблизи точек отражения волн от боковых стенок также возникает осреднённая циркуляция (рис. 2.21, правый столбец). Направление циркуляции таково, что вдоль боковой стенки жидкость движется к острым углам полости. С увеличением частоты либраций точки отражения ветвей аттрактора смещаются к тупым углам полости. При $\sigma = 1.06$ (рис. 2.21в, з, н) ветви аттрактора располагаются практически симметрично, поэтому осреднённые вихри располагаются друг под другим. Дальнейшее увеличение частоты σ приводит к смещению осреднённых вихрей к тупым углам полости (рис. 2.21п).

Для характеристики интенсивности осредненного азимутального потока, используется максимальная скорость жидкости в вихрях в сечении $z/L = 0.50$. Например, на рис. 2.22в жидкость имеет максимальную скорость $\langle u_\phi^{\max} \rangle$ на пересечении CV и ACV. При изменении структуры течения измерение скорости проводится в пределах одного и того же вихря. Если имеется несколько максимумов, то полученные данные осредняются по каждому из них. На рис. 2.22в средняя скорость рассчитана для двух максимумов, которые представляют собой направленные из центра полости струи. С увеличением амплитуды колебаний ε интенсивность осреднённой циркуляции возрастает. При постоянной частоте либрации σ скорость $\langle u_\phi^{\max} \rangle$ пропорциональна квадрату амплитуды $\sim \varepsilon^2$ (рис. 2.24). Этот результат полностью согласуется с экспериментами в отсутствие инерционных волн, когда $\sigma \geq 2$ (рис. 2.19в).

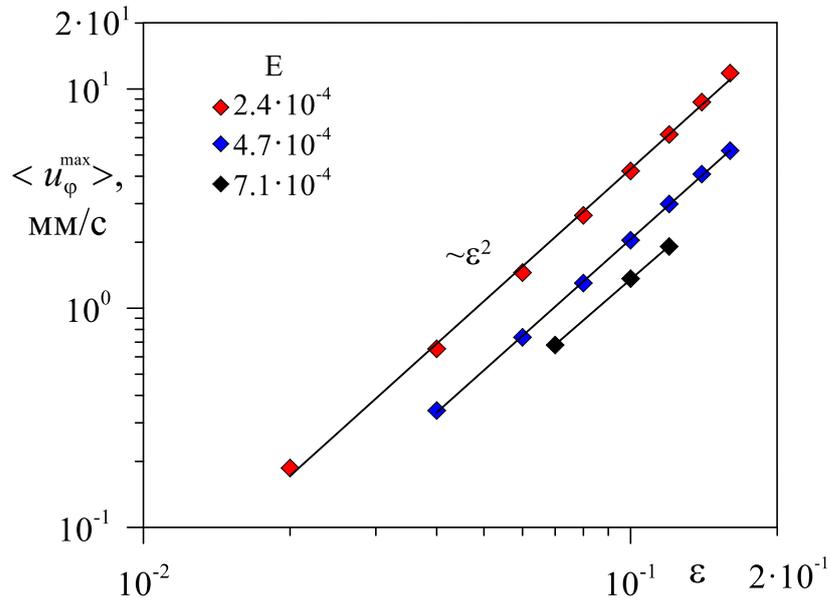


Рис. 2.24. Максимальная скорость осредненного течения в стационарных вихрях в зависимости от амплитуды либрации ε при $\sigma = 1.06$, $z/L = 0.50$, $\alpha = 23.0^\circ$.

В качестве характеристики интенсивности зонального потока будем использовать величину

$$\langle U_\varphi^{\max} \rangle = \frac{\langle u_\varphi^{\max} \rangle}{\varepsilon^2 \Omega_{rot} R}, \quad (2.10)$$

где $\Omega_{rot} R$ – линейная скорость жидкости вблизи боковой стенки полости. Скорость $\langle U_\varphi^{\max} \rangle$ немонотонно изменяется с частотой либрации σ (рис. 2.26a). Наиболее интенсивный азимутальный поток наблюдается при частоте $\sigma = 0.98$. Это значение соответствует частоте σ_1 , при которой наблюдается экстремум в пульсационном течении (рис. 2.8). Этот результат указывает на ключевую роль инерционных колебаний жидкости в генерации осреднённого зонального потока. Даже незначительное изменение частоты σ приводит к выходу системы из области резонанса и уменьшению средней азимутальной скорости (см. рис. 2.25a). Следующий максимум наблюдается вблизи частоты $\sigma_2 = 1.05$, когда аттрактор $A(1,1)$ принимает симметричную форму (рис. 2.21в). На этой частоте формируется интенсивное опережающее дифференциальное вращение. Резкое уменьшение безразмерной скорости $\langle U_\varphi^{\max} \rangle$ между двумя экстремумами объясняется

изменением структуры азимутального потока: внутреннее циклоническое ядро увеличивается в поперечном размере (рис. 2.21з).

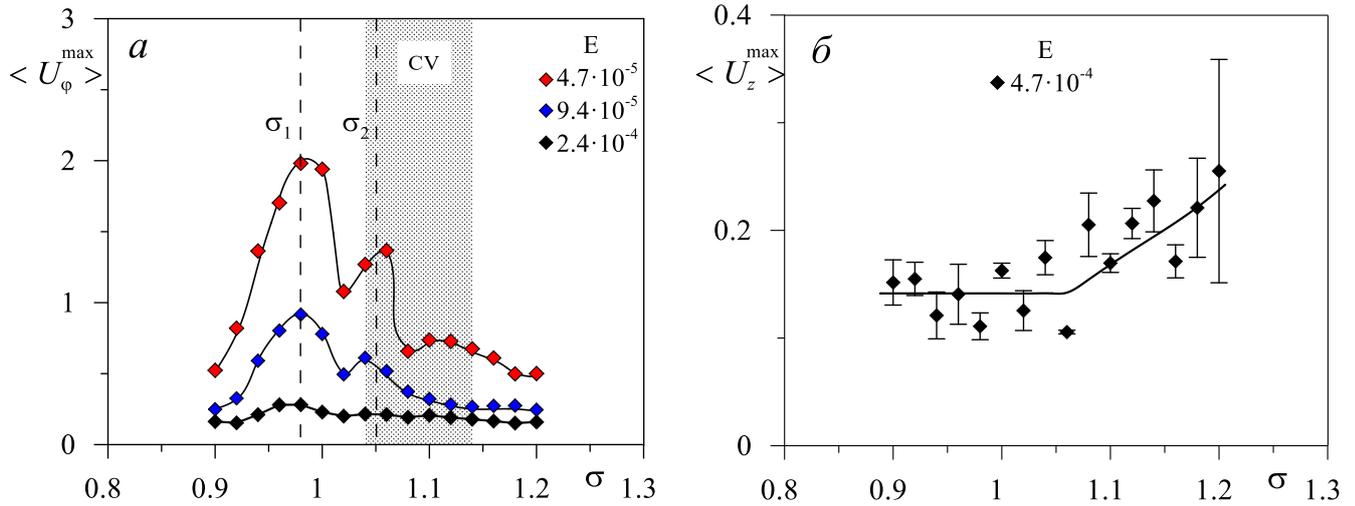


Рис. 2.25. Максимальная скорость осредненного потока в поперечном (а) и осевом (б) сечениях при $\alpha = 23.0^\circ$. Заштрихованная область на фрагменте (а) соответствует области существования опережающего дифференциального вращения.

Аналогичным образом введем безразмерную осреднённую скорость жидкости вдоль боковой границы:

$$\langle U_z^{\max} \rangle = \frac{\langle u_z^{\max} \rangle}{\varepsilon^2 \Omega_{rot} R}, \quad (2.11)$$

На рис. 2.25б показана зависимость максимальной скорости осредненного потока в осевом сечении от частоты либраций σ . Падающий на боковую стенку волновой пучок возбуждает осреднённое тангенциальное движение в пограничном слое (рис. 2.21, правый столбец). Оценки показывают, что в большинстве экспериментов толщина слоя Стокса не превышает:

$$\frac{\delta_S}{R} = \frac{\sqrt{2\nu / \Omega_{lib}}}{R} < 0.05. \quad (2.12)$$

Этот результат согласуется с результатами экспериментов. Поперечная ширина струй, расположенных вдоль боковой стенки полости, не превышает нескольких толщин δ_S . В диапазоне частот $\sigma = 0.90 - 1.05$ максимальное значение скорости в струях $\langle U_z^{\max} \rangle \approx 0.15$ и практически не изменяется с частотой либраций σ

(рис. 2.25б). При $\sigma > 1.05$ скорость осредненного течения монотонно возрастает по линейному закону. По-видимому, это происходит из-за взаимодействия потока, генерируемого аттрактором, с осредненным угловым потоком (рис. 2.19б), генерируемым угловыми колебаниями полости. Измерения показывают, что при частоте либраций $\sigma = 2.0$ и числе Экмана $E = 4.7 \cdot 10^{-4}$ максимальная горизонтальная скорость в тупых углах полости $\langle U_z^{\max} \rangle \approx 0.04$. Таким образом, осредненный поток, создаваемый аттрактором, намного сильнее, чем угловой поток. Тем не менее, при взаимодействии обоих течений разной природы вполне возможно усиление эффекта.

Динамика жидкости вблизи торцевых стенок имеет иной характер. Вследствие наклона торцов в пограничном слое Экмана на частицы жидкости действует сила Кориолиса, которая обеспечивает наличие z – компоненты завихренности. Обнаруженная взаимосвязь между положением CV и ACV валов с пространственно-волновой структурой подтверждает это.

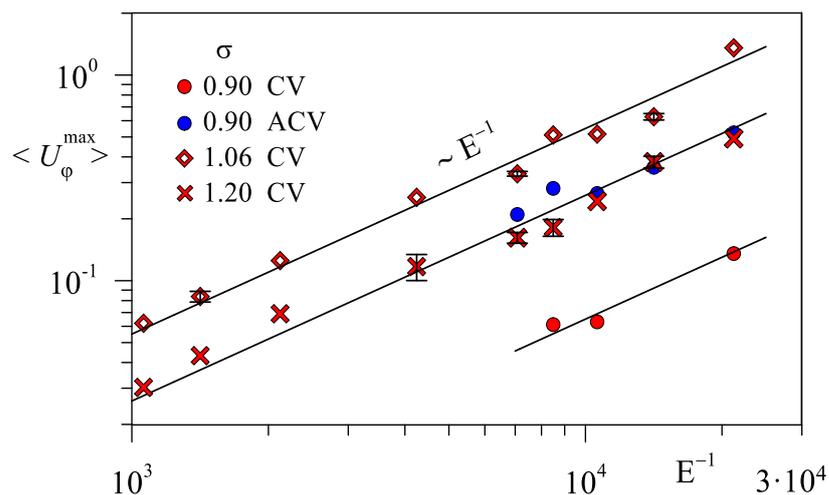


Рис. 2.26. Скорость азимутальной циркуляции в стационарных вихрях в зависимости от числа Экмана E^{-1} .

Зависимость скорости осредненного течения в валах от обратного числа Экмана E^{-1} показана на рис. 2.26. Экспериментальные точки, полученные для различных частот σ , хорошо описываются зависимостью:

$$\langle U_{\varphi}^{\max} \rangle = \frac{\langle u_{\varphi}^{\max} \rangle}{\varepsilon^2 \Omega_{rot} R} \sim E^{-1}. \quad (2.13)$$

Если амплитуда пульсационной скорости вблизи боковой стенки определяется как $\Delta\varphi\Omega_{lib}R = \tilde{u}$, а амплитуда либраций $\varepsilon = \Delta\varphi\sigma$, то скорость осредненного течения может быть определена параметром

$$\frac{\langle u_{\varphi}^{\max} \rangle}{\tilde{u}} \sim Re_p, \quad (2.14)$$

где $Re_p = \frac{\Delta\varphi\Omega_{lib}R^2}{\nu}$ – пульсационное число Рейнольдса.

2.3. Полость с непараллельным наклоном торцов

2.3.1. Режимы пульсационного течения

На рис. 2.27 представлена осредненная по пространству скорость пульсационного течения как функция частоты колебаний σ . Подробная методика расчета скорости пульсационного течения описана в разделе 2.1.2. Здесь также можно выделить серию пиков: $\sigma = 0.72, 1.28, 1.52$ и 1.70 . Наиболее сильный отклик наблюдается при частоте $\sigma = 1.28$. Визуализация мгновенного поля скорости с применением PIV – метода показывает, что структура потока в фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$ имеет форму двух глобальных вихрей с противоположной закруткой (рис. 2.28а). Вихри имеют зеркально-симметричный наклон относительно друг друга, а их центры смещены от оси вращения к тупым углам сечения полости. Со временем происходит периодическое изменение направления движения жидкости в вихрях, и в фазе либраций $\Omega_{lib}t = \pi$ завихренности имеют противоположный знак. При частоте $\sigma = 0.72$ возбуждается система из шести вихрей (рис. 2.28б). Наблюдения показывают, что положение вихрей в трапецевидном сечении не меняется со временем, при этом знак завихренности изменяется в течении периода либраций. При этом в прямоугольном сечении положение центров завихренности смещается со

временем в радиальном направлении. Таким образом, эти режимы также напоминают стоячие волны – инерционные моды $M(n,m,k)$. Благодаря непараллельному наклону в данной геометрии возможно существование только неосесимметричных инерционных мод с азимутальным волновым числом $k=1$ и четными осевыми волновыми числами $n=2, 4, \dots$ и т.д.

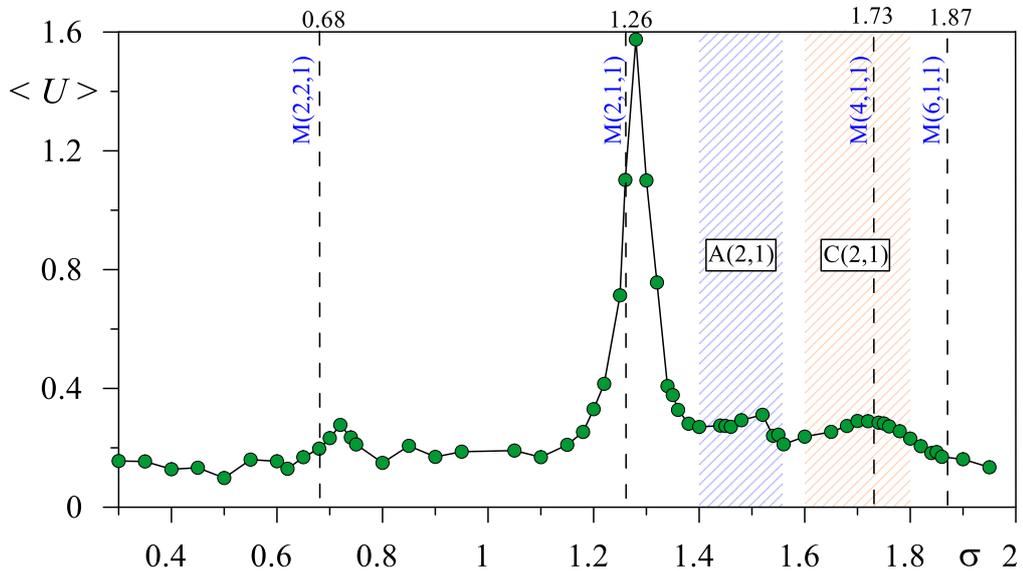


Рис. 2.27 Интенсивность пульсационного течения в зависимости от частоты либраций σ ; угол наклона торцов $\alpha = 23.0^\circ$. Заштрихованные области соответствуют режимам волнового аттрактора $A(2,1)$ и симметричного отражения волн $C(2,1)$. Вертикальные пунктирные линии показывают собственные значения частот инерционных мод.

Таблица 2.5. Собственные значения инерционных мод для $a = 0.34$ ($\alpha = 23.0^\circ$)

| n | m | k | $\sigma_{\text{теор}}$ |
|-----|-----|-----|------------------------|
| 2 | 2 | 1 | 0.684 |
| 2 | 1 | 1 | 1.260 |
| 4 | 1 | 1 | 1.728 |
| 6 | 1 | 1 | 1.868 |

В работе [1] представлен расчет собственных значений частот инерционных мод для случая цилиндра с прямыми торцами. Следовательно, чтобы оценить теоретические значения частот $\sigma_{\text{теор}}$ для цилиндрической геометрии с непараллельно наклоненными торцами, вводится среднее аспектное соотношение

как $a = 2R / (H + L)$. Полученное значение a используется для расчета собственных значений инерционных мод (таблица 2.5). Видно, что рассчитанные значения инерционных мод хорошо согласуются с положением резонансных пиков в эксперименте (рис. 2.27).

Другой экстремум наблюдается на частоте $\sigma = 1.73$, что соответствует режиму $M(4, 1, 1)$. В этом случае структура пульсационного течения состоит из четырех осциллирующих вихрей, ориентированных под углом $\theta = \pm \arcsin(\sigma / 2)$ относительно оси вращения.

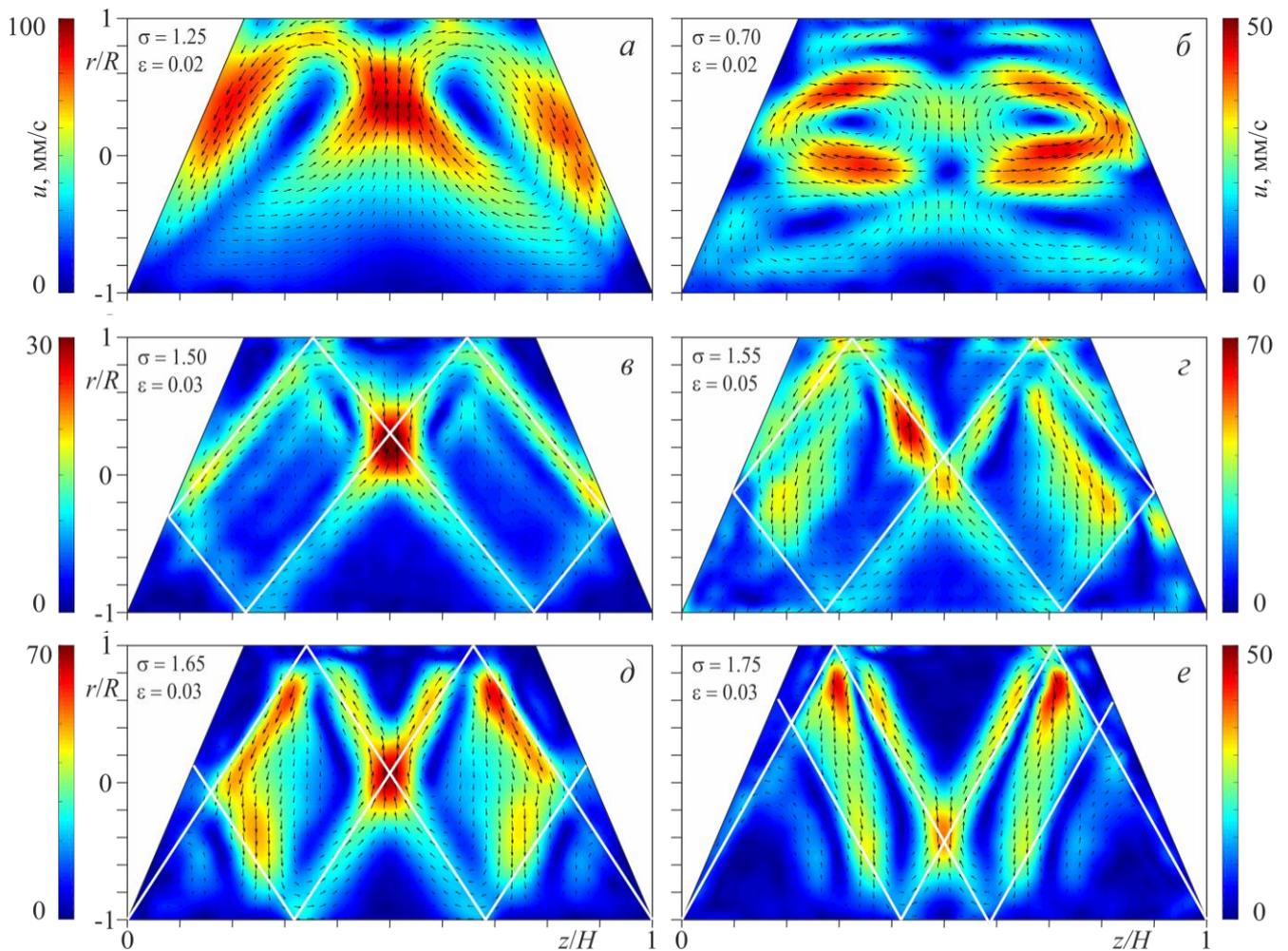


Рис. 2.28 Мгновенные поля скорости для различных режимов в фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$: инерционные моды $M(2, 1, 1)$ (а) и $M(2, 2, 1)$ (б); аттрактор $A(2, 1)$ (в, г); симметричное отражение волновых пучков $C(2, 1)$ (д, е). Цветом показана величина скорости; белыми линиями показаны направления волновых пучков.

Эффекты фокусировки в аттрактор $A(2,1)$ наблюдаются в диапазоне частот $\sigma = 1.4 - 1.55$. В этом случае волновые пучки распространяются по траектории, состоящей из двух параллелограммов (рис. 2.28*в, г*). На первый взгляд траектория напоминает инерционный режим $M(2,1,1)$. Тем не менее, пространственное распределение энергии волны иное: жидкость совершает колебания вдоль относительно узких сдвиговых слоев.

В диапазоне частот $\sigma = 1.6 - 1.8$ форма траектории также напоминает аттрактор $A(2,1)$ (рис. 2.28*д, е*). Однако эффекта фокусировки замкнутой траектории не происходит. В данном случае, также как и при параллельном наклоне торцов замкнутая траектория обусловлена особенностями геометрии полости и симметрией расположения точек излучения. Таким образом, в указанном диапазоне частот возможно существование режима симметричного отражения волн $C(n, m)$. Возбуждение этого режима сопровождается локальным усилением пульсационного течения (рис. 2.27), частота которого близка к значению собственной частоты инерционной моды $M(4, 1, 1)$.

2.3.2. Осредненное течение жидкости

Колебания жидкости, возбуждаемые либрациями, приводят к появлению устойчивого азимутального течения. В отсутствие инерционных волн структура зонального потока аналогична той, что наблюдалась в случае с параллельным наклоном торцов. При этом вблизи углов осевая симметрия азимутального течения нарушается. В рассматриваемом случае, благодаря антипараллельному наклону торцов, трехмерные эффекты усиливаются. При частоте $\sigma = 1.28$ (мода $M(2, 1, 1)$) структура потока в поперечном сечении представляет собой один осредненный вихрь, расположенный на расстоянии $r/R = 0.5$ и под углом $\varphi = 180^\circ$ (рис. 2.29*а*). Полость совершает вращение по часовой стрелке, в то время как направление вращения жидкости в вихре антициклоническое (синий цвет). Наблюдения показывают, что положение вихря и величина завихренности не

изменяются со временем (рис. 2.29б). Об этом свидетельствует скользящее среднее для завихренности с шагом $t/T_{lib} = 3$ вдоль кольца радиуса $r/R = 0.5$ (рис. 2.29а): азимутальное положение максимума осредненной завихренности отсается постоянным на протяжении всего времени эксперимента. Важно отметить, что аналогичная структура течения характерна для центральной части полости $z/H = 0.5$, при этом вблизи торцевых стенок двухмерность нарушается. В случае инерционно-волнового аттрактора возникает циклонический вихрь с максимальной завихренностью на расстоянии $r/R = 0.24$ и азимутальном угле $\varphi = 20^\circ$ (рис. 2.29в). При $\varphi = 180^\circ$ образуется второй вихрь с антициклоническим завихрением и значительно меньшей интенсивностью. На рис. 2.29г показано, что в линейном режиме аттрактора $A(2,1)$ азимутальное распределение осредненной завихренности не изменяется с течением времени.

Рассмотрим подробнее механизм генерации зонального потока. Место взаимодействия инерционной волны с наклонными стенками (торцами) определяет положение осредненных вихрей. Фокусировочное отражение аттрактора $A(2,1)$ расположено при $r/R = 0.30$ и смещено к острым углам сечения полости (рис. 2.28в). Это соответствует угловой координате $\varphi = 0$ на рис. 2.29в, что в целом согласуется с визуальными наблюдениями положения вихря. В случае инерционной моды $M(2,1,1)$ области отражения волн смещены к тупым углам и более «размыты» вдоль наклонных границ полости (рис. 2.28б). Поскольку точная координата точки отражения не может быть определена, оценивается среднее радиальное положение точек взаимодействия как $r/R \approx 0.5$. В этом случае положение зоны отражения соответствует угловой координате $\varphi = \pi$, что также согласуется с положением вихря на рис. 2.29а. Таким образом, можно сделать вывод, что пространственная структура инерционной волны определяется структурой зонального потока. По-видимому это объясняется нелинейными эффектами в вязких пограничных слоях, где происходит смешивание углового момента из-за отражения волны от границ полости. Интересно, что генерация циклонического потока происходит в области $270^\circ < \varphi < 90^\circ$ (близко к острым

углам полости), в то время как антициклонический поток в области $90^\circ < \varphi < 270^\circ$ (близко к тупым углам полости). Таким образом, если глубина жидкости увеличивается (уменьшается) с увеличением радиуса, то образуется циклонический (антициклонический) поток.

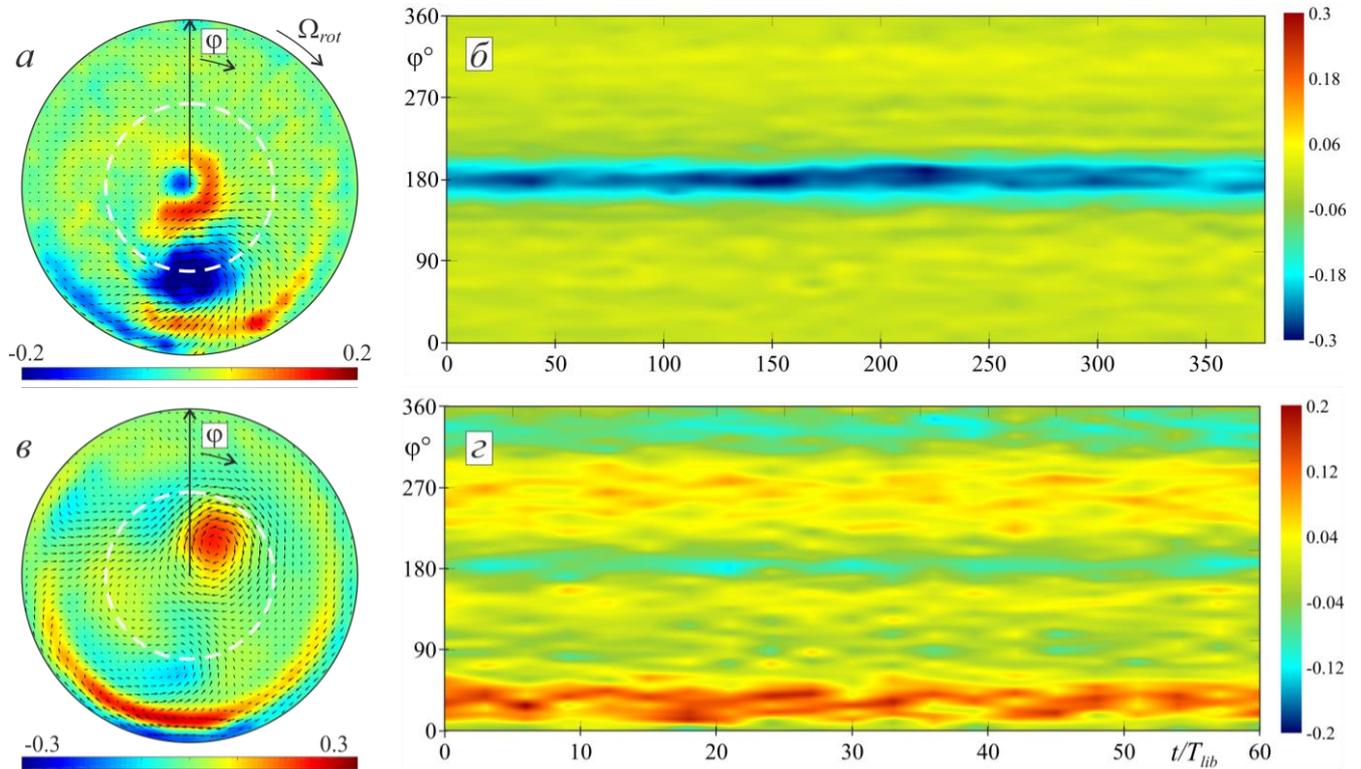


Рис. 2.29 Осредненные азимутальные поля скорости в сечении $z/H = 0.50$: (a) $\sigma = 1.28, \epsilon = 0.01$; (б) $\sigma = 1.50, \epsilon = 0.02$. Направление вращения полости происходит по часовой стрелке; цветом показана z – компонента завихренности $\langle \xi \rangle$ (положительные значения соответствуют циклоническому вращению, отрицательные – антициклоническому); вертикальная сплошная линия показывает положение $\varphi = 0$. На фрагментах (б, д) представлена временная зависимость осредненной завихренности вдоль кольца (белая пунктирная линия) радиуса $r/R = 0.5$ из (a, б)

Аналогичная генерация средних вихревых течений была обнаружена в либрирующем цилиндре с параллельными наклонными торцами, описанном в разделе 2.2.2. Циклонический поток в виде цилиндрического ядра возникал при отражении ветвей аттрактора $A(1,1)$ от оси вращения. Изменение формы аттрактора и соответствующее смещение точек отражения от оси вращения

сопровождались образованием системы стационарных циклонических и антициклонических вихрей.

2.4. Анализ результатов экспериментов

Для верификации волновых режимов разработана двухмерная модель трассировки инерционных волн в осевом сечении цилиндрической полости с одним или двумя наклонными торцевыми стенками. Поскольку в модели мы интересуемся чисто геометрическими свойствами распространения волн, последние аппроксимируются лучами, исходящими из углов полости; жидкость считается идеальной. Направление лучей определяется из соотношения $\theta = \pm \arcsin(\sigma / 2)$, где угол θ отсчитывается от оси вращения. При отражении лучей от наклонных границ полости сохраняется значение угла θ относительно оси вращения. Это продемонстрировано на рис. 2.30 в точке F . Трассировка лучей осуществляется в двумерной постановке в плоскости осевого сечения Z, Y . Такой подход можно считать оправданным, поскольку эффекты фокусировки проявляются в плоскости, повернутой в азимутальном направлении на угол $\varphi \sim 20^\circ$ относительно плоскости, проходящей вдоль линии наклона торцов [21, 23].

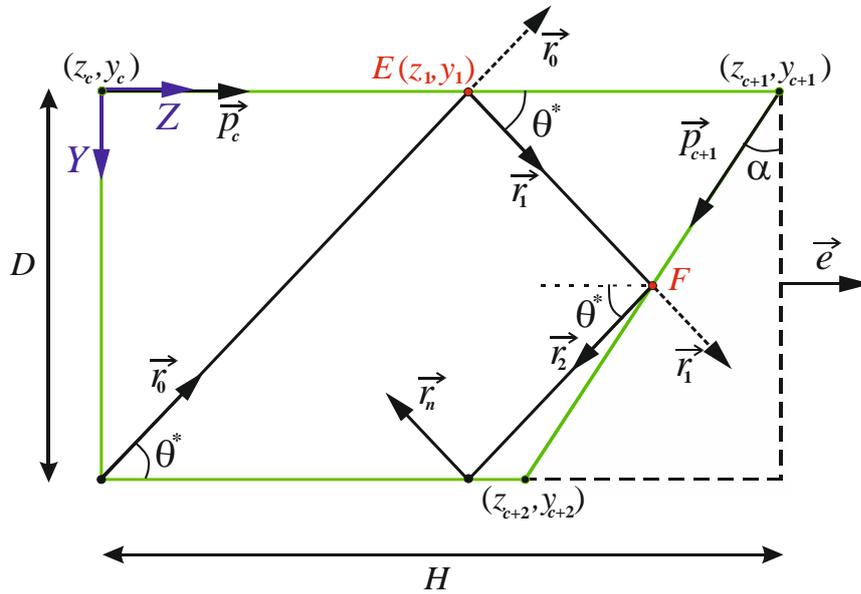


Рис. 2.30. Схема распространения инерционных волн в контейнере.

Луч на плоскости обозначается вектором \vec{r}_n , где n – количество отражений луча от границы. Первоначальный вектор \vec{r}_0 определяется как поворот вектора \vec{e} на угол θ^* методом углов Эйлера: $\vec{r}_0 = d_{0y}\vec{j} + d_{0z}\vec{k}$, где d_{0z} и d_{0y} находятся из соотношения:

$$\begin{cases} d_{0y} = e_z \sin \theta^* - e_y \cos \theta^* \\ d_{0z} = e_z \cos \theta^* + e_y \sin \theta^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_{0y} = e_z \sin \theta^* \\ d_{0z} = e_z \cos \theta^* \end{cases}. \quad (2.16)$$

Поскольку вектор \vec{r}_0 может исходить из любого угла полости, значение θ^* задается таким образом, чтобы вектор \vec{r}_0 был всегда направлен внутрь контейнера. Правило для определения θ^* основано на пересечении луча с границами контейнера. Проверяются следующие значения θ^* до тех пор, пока не будет найдено пересечение с одной из стенок: $\theta^* = \theta$, $\theta^* = -\theta$, $\theta^* = \pi + \theta$ и $\theta^* = \pi - \theta$. Две прямые имеют точку пересечения тогда, когда они не являются коллинеарными. Проверка коллинеарности осуществляется с помощью векторного произведения:

$$[\vec{p}_c \times \vec{r}_n] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & b_{cy} & b_{cz} \\ 0 & d_{ny} & d_{nz} \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

Рассматриваются такие решения, где длина вектора $[[\vec{p}_c \times \vec{r}_n]] > 0$ и выполняется условие $b_{cz}d_{ny} \neq d_{nz}b_{cy}$.

Точка пересечения n -луча и c -границы, вычисляется через решение системы уравнений, составленной из уравнений прямых в параметрическом виде:

$$\begin{cases} y = y_n + d_{ny}t_1 \\ z = z_n + d_{nz}t_1 \\ y = y_c + b_{cy}t_2 \\ z = z_c + b_{cz}t_2 \end{cases}. \quad (2.18)$$

Решение системы уравнений (2.18) существует всегда, так как выполняется условие неколлинеарности прямых (2.17). В зависимости от направляющего вектора $\vec{r}_n(d_{nz}, d_{ny})$ решение находится двумя способами:

1) В случае $d_{nz} \neq 0$:

$$t_2 = \frac{\Delta z d_{ny} - \Delta y d_{nz}}{d_{nz} b_{cy} - d_{ny} b_{cz}}, \quad \text{где } \begin{cases} \Delta z = z_c - z_n \\ \Delta y = y_c - y_n \end{cases}. \quad (2.19)$$

$$t_1 = \frac{\Delta z + b_{cz}t_2}{d_{nz}}$$

2) В случае $d_{ny} \neq 0$:

$$t_1 = \frac{\Delta y d_{nz} - \Delta z d_{ny}}{d_{ny} b_{cz} - d_{nz} b_{cy}}, \quad t_2 = \frac{\Delta y + b_{cy}t_1}{d_{ny}}. \quad (2.20)$$

Из уравнений (2.19) или (2.20) находится точка пересечения двух прямых. Найденное решение должно находиться вдоль направления \vec{r}_n луча и принадлежать отрезку границы. Для этого рассматриваются только те решения, при которых параметр $t_1 > 0$. Например, луч с направлением \vec{r}_0 пересекает c -границу в точке $E(z_1, y_1)$. В этом случае для отрезка c -границы вычисляется параметр t_2^* из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = y_c + b_{cy} t_2^* \\ z = z_c + b_{cz} t_2^* \end{cases}. \quad (2.21)$$

В начальной точке (z_c, y_c) получаем $t_2^* = 0$, в конечной точке (z_{c+1}, y_{c+1}) :

$$t_2^* = \frac{y_{c+1} - y_c}{b_{cy}}, b_{cy} \neq 0 \text{ или } t_2^* = \frac{z_{c+1} - z_c}{b_{cz}}, b_{cz} \neq 0. \quad (2.22)$$

В итоге диапазон значений для параметра t_2^* имеет вид:

$$t_2^* \in \left(0; \frac{y_{c+1} - y_c}{b_{cy}} \right) \text{ или } \left(0; \frac{z_{c+1} - z_c}{b_{cz}} \right). \quad (2.23)$$

Точка пересечения лежит на отрезке в том случае, когда параметр t_2 , полученный из формулы (2.19) или (2.20), принадлежит множеству значений t_2^* (2.23). В точке $E: t_2 \in t_2^*$.

При описании отражения луча от границы угол θ^* , отсчитываемый от оси вращения \vec{e} , должен сохраняться. Вектор отраженного луча $\vec{r}_n(d_{nz}, d_{ny})$ вычисляется как:

$$\begin{cases} d_{ny} = e_z \sin \beta - e_y \cos \beta \\ d_{nz} = e_z \cos \beta + e_y \sin \beta \end{cases}. \quad (2.24)$$

Поворот вектора \vec{r}_n в точке происходит по часовой стрелке. Угол β определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta &= 2\theta^* \text{ при } \vec{p}_c \uparrow \downarrow \vec{e} \\ \beta &= \pi - 2\theta^* \text{ при } \vec{p}_c \uparrow \uparrow \vec{e}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Результатом работы алгоритма является построение траектории волны в полости заданной геометрии, а, следовательно, и прогнозирование диапазона частот σ , в котором будут наблюдаться эффекты фокусировки лучей на замкнутую траекторию. Для этой цели было разработано приложение, позволяющее произвольно задавать геометрические параметры контейнера (H, D, α), первоначальную точку излучения волн и количество последующих отражений [20]. Впервые данный алгоритм был применен для сферического слоя,

где источником волновых лучей являлось сферическое ядро, расположенное в центре сферы [25]. Программа позволяет не только визуально пронаблюдать траекторию волновых лучей, но и получить полную информацию о положении точек фокусирующего отражения аттрактора от любой границы.

На рис. 2.31 показаны результаты расчета траектории волновых лучей в полостях различной конфигурации: сечение в виде прямоугольной трапеции (OS – one slope) (рис. 2.31а), параллелограмма (PS) (рис. 2.31б) и равнобедренной трапеции (APS) (рис. 2.31д). При построении границ в модели геометрические размеры полости (D и H , рис. 2.30) являются постоянными и не зависят от положения и наклона торцевых стенок. Пространственная структура аттрактора может быть охарактеризована двумя целыми числами (n, m) , которые отвечают за количество симметричных пар отражений ветвей аттрактора от горизонтальных и вертикальных или наклонных стенок (именуемых осевым и радиальным волновыми числами). Согласно результатам модели на некоторых частотах σ видно, как лучи, испущенные из различных углов полости, после серии последовательных отражений фокусируются на одну замкнутую траекторию (см. рис. 2.31а, б, д). Так, в геометриях OS и PS при частоте $\sigma = 1.08$ возникает аттрактор $A(1,1)$, а в APS при $\sigma = 1.46$ – аттрактор $A(2,1)$. Количество итераций для достижения эффекта фокусировки зависит как от геометрии полости, так и частоты σ . На рис. 2.31б, г, е показано распределение точек отражения инерционных волн от нижней границы полости, так называемая диаграмма Пуанкаре. На диаграмме показаны последние 50 последовательных отражений из 500. Практически равномерное распределение с высокой концентрацией точек вдоль координаты z/L соответствует сложным волновым режимам, в то время как локализация точек в узких областях пространства, разделенных пустотой, указывает на фокусировку лучей в виде замкнутой траектории. Можно отметить, что в геометрии OS осевое волновое число аттрактора принимает значения $n = 1, 2, 3, \dots$. Для PS симметрия полости навязывает аттракторы только с нечетными $n = 1, 3, 5, \dots$, а для APS – только с четными $n = 2, 4, 6, \dots$.

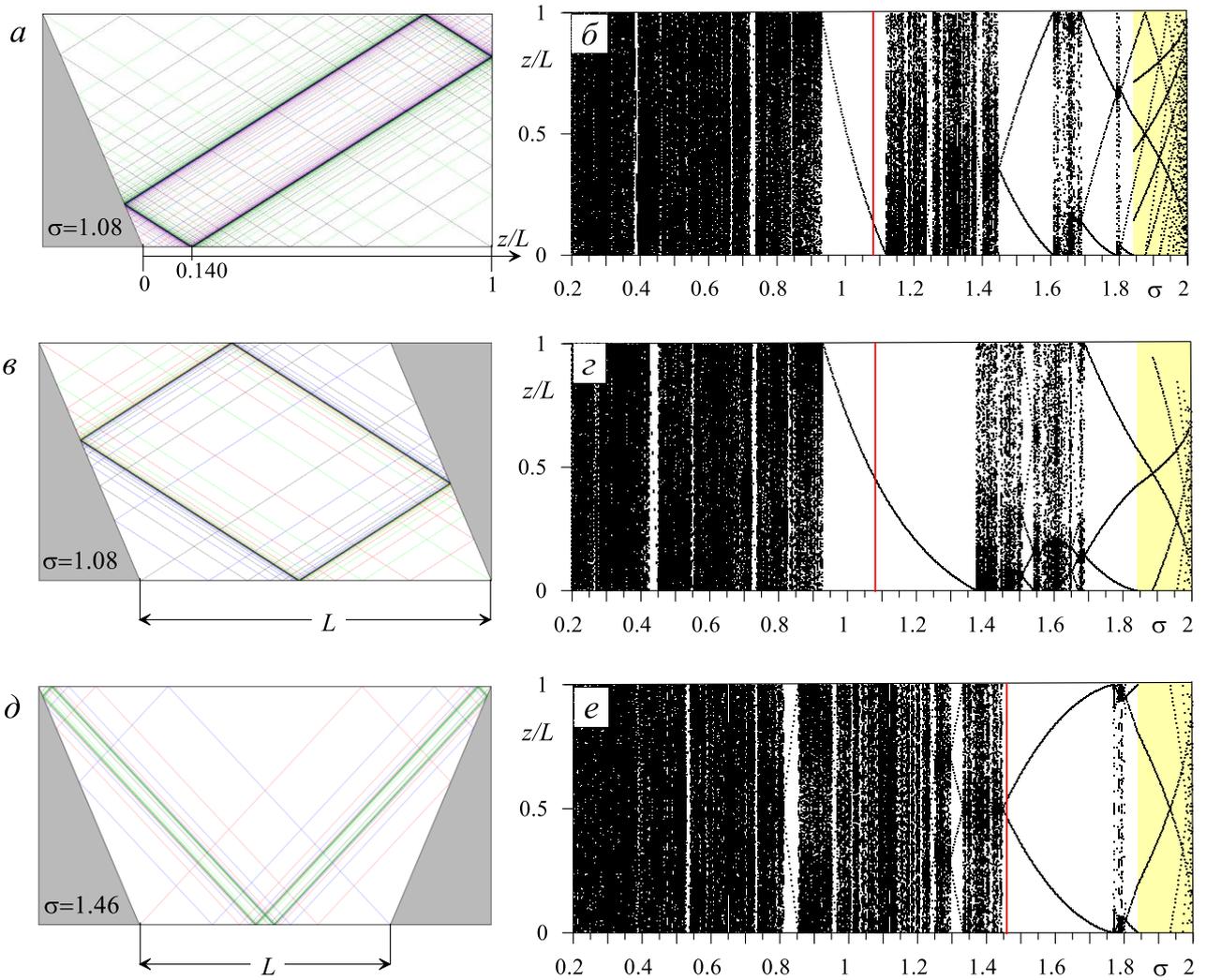


Рис. 2.31. Фокусировка инерционных волн в зависимости от расположения наклонных стенок контейнера и координаты точки излучения при $\sigma = 1.08$ (*a*, *в*) и 1.46 (*д*). Угол наклона в каждом случае составляет $\alpha = 23^\circ$. На фрагментах *б*, *г*, *е* представлены соответствующие данной геометрии полости диаграммы Пуанкаре для диапазона частот $\sigma = 0.2 - 2.0$. Точками показаны положения 50 последних отражений инерционных волн от боковой границы. Координата z/L отсчитывается от тупого угла; разрешение по частоте составляет $\Delta\sigma = 0.002$. Красными вертикальными линиями обозначены частоты, для которых приведены рисунки в левом столбце.

На рис. 2.32 представлены диаграммы Пуанкаре в случае PS с углами наклона торцевых стенок $\alpha = 8.5^\circ$ и 15.0° . Видно, что с увеличением угла α в диапазоне частот $\sigma = 0.2 - 2.0$ осевое волновое число n сохраняется, при этом расширяется диапазон частот, при которых проявляются эффекты фокусировки. При достижении критических значений σ^* (желтые области, рис. 2.31*б*, *г*, *е* и

рис. 2.32), где угол наклона торцов α равен (или превышает) углу θ , волновые лучи, выпускаемые из острых углов полости, не существуют. В этом случае источниками волн являются только тупые углы полости.

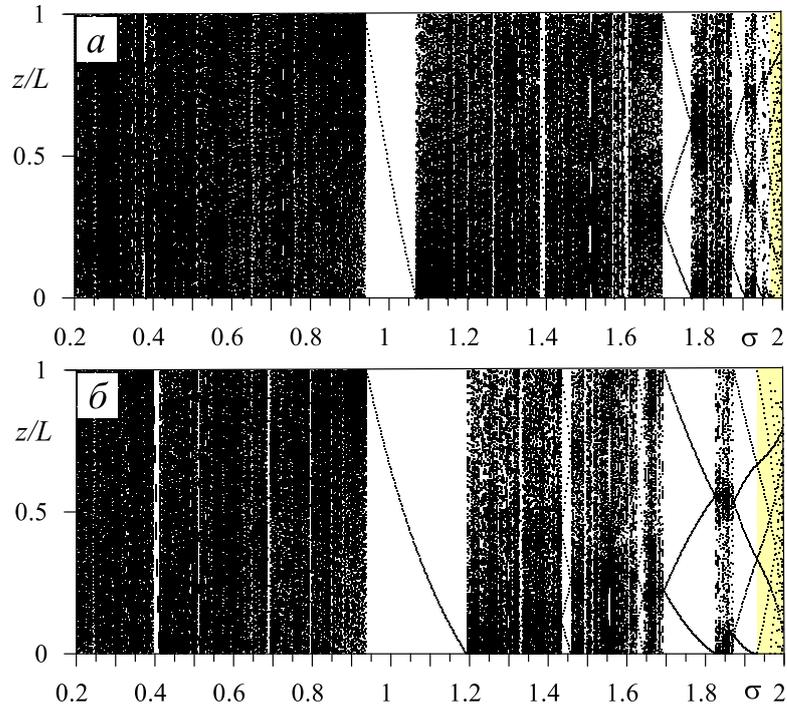


Рис. 2.32. Диаграмма Пуанкаре в случае PS для углов наклона торцов $\alpha = 8.5^\circ$ (а) и 15.0° (б). Точками показаны положения 50 последних отражений инерционных волн от боковой границы. Координата z/L отсчитывается от тупого угла; разрешение по частоте составляет $\Delta\sigma = 0.002$. Выделенные желтым цветом области частот показывают, что торцы образующие острый угол с боковой стенкой полости, не являются генераторами инерционных волн.

Для проверки корректности работы модели проводится сравнение с результатами двухмерной модели [101], где координаты точек отражения волн для аттрактора $A(n, 1)$ вычисляются методом отображений. В качестве геометрии рассматривается прямоугольная трапеция (OS), эквивалентная рис. 2.31а. Задача решается в общем виде, причем координаты точек z и y рассчитываются через следующие параметры [8]:

$$d = 1 - \frac{2D}{H} \tan \alpha, \quad \tau = \frac{2D}{H} \sqrt{\left(\frac{2}{\sigma}\right)^2 - 1}. \quad (2.26)$$

Здесь $d \in [-1; 1]$ – это параметр формы полости, где значение -1 соответствует прямоугольному треугольнику, а значение $+1$ соответствует прямоугольнику. Вторым параметром τ отвечает за период инерционной волны.

Вычисление координат на горизонтальной и вертикальной стенках зависит от соотношения между номером последовательного отражения k и осевым волновым числом n :

1) если $k = 1..n$, то

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{-n\tau^2 + 2\tau}{1-d} - (k-n)\tau - 1 \\ y_k &= \frac{(-1)^{k+1} + 1}{2} \tau \end{aligned} \quad (2.27)$$

2) если $k = n + 2..2n + 1$, то

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{n\tau^2 - 2\tau}{1-d} + (k-n-1)\tau - 1 \\ y_k &= \frac{(-1)^k + 1}{2} \tau \end{aligned} \quad (2.28)$$

Причем на наклонной стенке $k=0$, а начало перебора точек осуществляется против хода часовой стрелки.

В таблице 2.6 представлены данные расчетов по алгоритму [101] для аттрактора (1,1) в прямоугольной трапеции, стенка которой наклонена на угол $\alpha = 23.0^\circ$. Отметим, что в данном случае начало отсчета находится в центре прямоугольника, описывающего трапецию, поэтому необходимо сделать переход к удобным для нас координатам по формулам $L = 1 + d$ и $z = d - z_k$. Полученное значение $z/L = 0.143$ хорошо согласуется с результатом авторской модели [20], где $z/L = 0.140$ (см. рис. 2.31a).

Таблица 2.6. Вычисление координаты z/L

| σ | d | τ | k | z_k | y_k | $L = 1 + d$ | $z = d - z_k$ | z/L |
|----------|-------|--------|-----|-------|-------|-------------|---------------|-------|
| 1.080 | 0.554 | 1.637 | 1 | 0.332 | 1.637 | 1.554 | 0.222 | 0.143 |

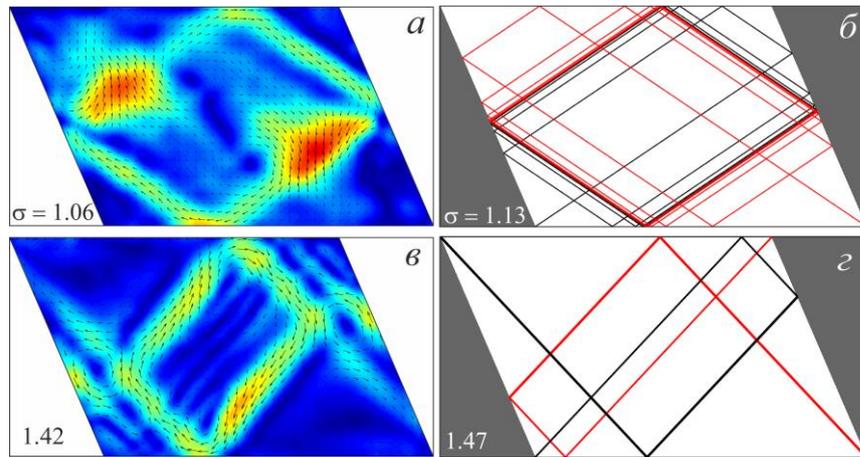


Рис. 2.33. Мгновенные поля скорости при различных σ (левый столбец) в фазе $\Omega_{lib}t = 0$ (а, б). В правом столбце показаны траектории распространения инерционных волн, полученные в двухмерной модели [20].

Сравнение результатов экспериментов с предсказаниями лучевой модели (на примере случая PS для $\alpha = 23.0^\circ$) приведено на рис. 2.33. Например, при $\sigma = 1.06$ согласно теории волновые лучи должны распространяться под углом $\theta_{теор} = 32^\circ$, в то время как в эксперименте наблюдается угол $\theta_{эсп} \approx 34^\circ$, что соответствует $\sigma = 1.13$. Незначительные расхождения обусловлены тем, что в теории рассматриваются волны в невязкой жидкости в отсутствии нелинейных эффектов типа среднего азимутального вращения жидкости. Детальное исследование структуры течения в режиме симметричного отражения волн (рис. 2.33в, з) показало, что возникновение замкнутых траекторий связано с быстрой диссипацией энергии инерционных волн после первых двух отражений. Результаты авторской модели, позволяют однозначно верифицировать режимы течений, обусловленных эффектами фокусировки волновых лучей. В целом, экспериментальные результаты имеют хорошее согласие с данными модели, представленными на диаграмме Пуанкаре.

2.5. Основные выводы по главе

Во второй главе изучена динамика жидкости в неравномерно вращающейся (либрирующей) цилиндрической полости с наклонными торцами. Результаты получены в диапазоне частот существования инерционных волн при малых амплитудах модуляции скорости. Благодаря наклонным торцам созданы условия фокусировки инерционных волн в волновой аттрактор. Формирование замкнутой траектории происходит на долю периода либраций в фазах крайнего углового положения полости (во вращающейся системе отсчета). Эффекты фокусировки усиливаются с увеличением угла наклона торцов α . Для подтверждения правильной интерпретации наблюдаемых резонансных режимов используется авторская модель трассировки волновых лучей. Помимо фокусировки, наблюдается азимутального захвата волновых лучей, что обусловлено наличием выделенного направления вдоль линии наклона торцов. В режиме замкнутой траектории получены зависимости толщины и скорости сдвиговых слоев в зависимости от числа Экмана; показано, что с увеличением толщины сдвигового слоя величина инерционного отклика жидкости уменьшается.

Наиболее сильному динамическому отклику жидкости на либрации соответствуют режимы инерционных мод. При параллельном наклоне торцов преобладают инерционно-волновые режимы с нечетными осевыми волновыми числами, в то время как при непараллельном наклоне ярко выражены режимы с четными осевыми волновыми числами. В случае малого наклона торцов возможно существование комбинационных режимов, для которых характерно попеременное возбуждение инерционных мод (как осесимметричных, так и неосесимметричных) с различными волновыми числами.

Обнаружено, что инерционные волны генерируют осреднённую азимутальную и меридиональную циркуляцию, величина которой пропорциональна квадрату амплитуды либраций. Осреднённое азимутальное течение имеет вид вытянутых вдоль оси вращения стационарных валов. Радиальное и азимутальное положение валов определяется положением зоны

отражения волновых лучей от наклонных границ полости. Показано, что скорость движения жидкости в валах определяется пульсационным числом Рейнольдса. Осреднённая меридиональная циркуляция является неосесимметричной и локализована в пределах динамических пограничных слоёв Стокса на боковой стенке цилиндра и определяется режимом пульсационного течения.

ГЛАВА 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ОСРЕДНЁННЫХ ТЕЧЕНИЙ И НАДКРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

Экспериментально изучается устойчивость осредненного азимутального потока в неравномерно вращающейся цилиндрической полости с наклонными торцами. Рассматриваются ситуации параллельного и непараллельного наклона торцов. Обнаружено, что при достижении критического значения амплитуды модуляции скорости доселе стационарные вытянутые вдоль оси вращения валы дестабилизируются. Этот процесс сопровождается появлением новых центров осреднённой завихренности, которые с течением времени дрейфуют в азимутальном направлении. Исследованы пороги неустойчивости в зависимости от частоты либраций и числа Экмана. Для определения механизма неустойчивости проводится спектральный анализ пульсационной скорости в поперечном сечении. Представленные результаты экспериментов опубликованы в работах [24, 23, 21].

3.1. Полость с параллельным наклоном торцов

3.1.1. Пороги устойчивости осредненного течения

С увеличением амплитуды модуляции скорости ε развивается нелинейный режим инерционных волн. В этом случае исследование полей скорости в осевом сечении с использованием PIV-метода становится затруднительным из-за появления сильной азимутальной составляющей среднего зонального потока. Поэтому основное внимание в этом разделе будет уделено анализу азимутального течения. На рис. 3.1*a-в* приведены фотографии визуализации течений PIV-частицами при фиксированной частоте $\sigma = 0.96$ и различных амплитудах ε . В нижнем ряду (рис. 3.1*г-е*) показаны соответствующие осреднённые по времени

поля скорости. При малых амплитудах либраций ($\varepsilon = 0.04$, до порога неустойчивости) частицы визуализатора увлекаются осреднёнными вихревыми структурами. При этом области с повышенной концентрацией частиц, где жидкость совершает циклоническое или антициклоническое вращение, хорошо отделены друг от друга.

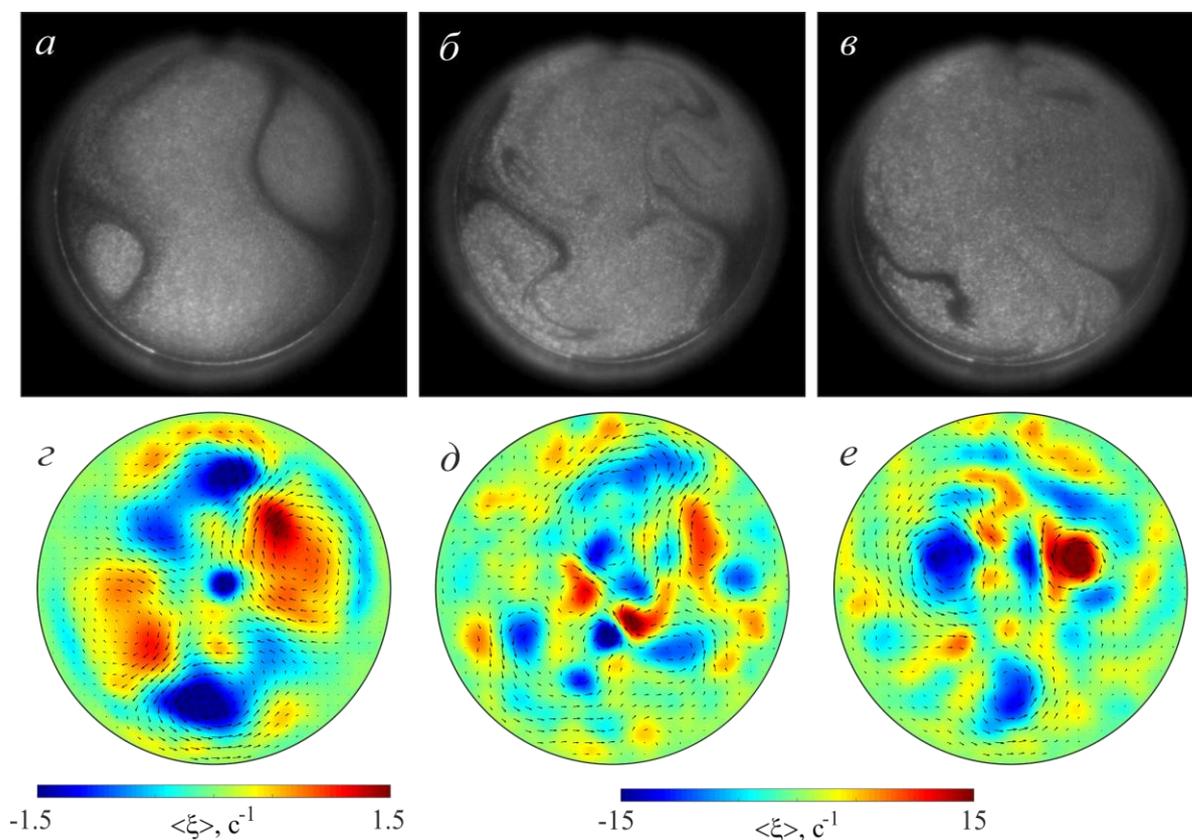


Рис. 3.1. Верхний ряд: фотографии азимутальных течений в режиме аттрактора $A(1,1)$ при фиксированной частоте $\sigma = 0.96$ и различных амплитудах модуляции скорости ε : 0.04 (а); 0.06 (б); 0.07 (в). Нижний ряд (г–е): соответствующие осредненные азимутальные поля скорости. Фрагменты (б, в, д, е) показаны спустя $50T_{lib}$ после задания амплитуды ε . Результаты показаны при $z/L = 0.50$ и $E = 4.7 \cdot 10^{-5}$.

При достижении критического значения амплитуды ε_c в азимутальном потоке наблюдается перераспределение частиц визуализатора (рис. 3.1б). На рис. 3.1д показано соответствующее осредненное по периоду либраций T_{lib} поле завихренности $\langle \xi \rangle$, полученное через $50T_{lib}$ после установления величины ε .

Сравнение с рис. 3.1г показывает качественное изменение структуры осредненного азимутального потока: проявляются новые вихри, положение которых меняется со временем. При дальнейшем повышении амплитуды ε наблюдается тенденция к уменьшению волнового числа и образованию более крупных осреднённых структур (рис. 3.1в, е). Визуальные наблюдения показывают, что непосредственный момент возникновения неустойчивости характеризуется резкой «вспышкой», сопровождающейся сильным перемешиванием жидкости.

На рис. 3.2 показано сравнение мгновенных полей скорости до и после порога ε_C для $\sigma=1.10$ в фазе $\Omega_{lib}t=0$. В нелинейном режиме траектория распространения инерционных волн соответствует аттрактору $A(1,1)$ (рис. 3.2, белые стрелки). Однако в нелинейном режиме на фоне основной траектории аттрактора появляются вторичные волны (рис. 3.2б, черная стрелка), направление которых существенно отличается от основной частоты либрационного форсинга σ . Угол распространения вторичных волн $\sim 20^\circ$ относительно оси вращения и соответствует частоте $\sigma=0.7$. Как отмечалось ранее в нелинейном режиме прямое исследование полей скоростей PIV-методом в осевом сечении становится затруднительным, о чем можно судить по качеству поля скорости на рис. 3.2б.

Для амплитудной характеристики неустойчивости осредненного азимутального потока используется завихренность, осредненная по площади поперечного сечения и периоду либраций T_{lib} :

$$\langle \xi_z \rangle = \frac{1}{T_{lib}} \int_{T_{lib}} \xi_z dt, \quad (3.1)$$

где ξ_z – осевая составляющая завихренности. В качестве примера, на рис. 3.3 показана зависимость величины $|\langle \xi_z \rangle|$ от амплитуды либраций при $\sigma=1.44$. Наличие знака модуля обусловлено тем, что для данной частоты значения $\langle \xi_z \rangle$ являются отрицательными. Это указывает на то, что в поле скорости преобладают антициклонические вихри (направление против часовой стрелки). Для расчёта $\langle \xi_z \rangle$ используются кадры только для моментов времени $t/T_{lib} > 100$. В области

малых амплитуд ($\varepsilon < 0.05$) экспериментальные точки могут быть аппроксимированы линейной зависимостью $|\langle \xi_z \rangle| \sim \varepsilon$. Это соответствует результатам, представленным на рис. 2.7.

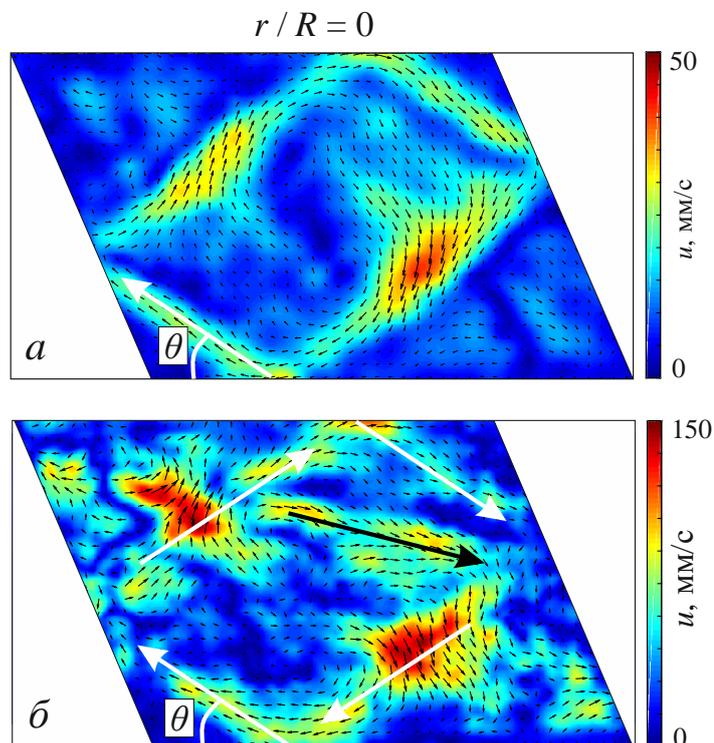


Рис. 3.2. Мгновенные поля скорости при $\sigma = 1.10$ в фазе либраций $\Omega_{lib}t = 0$ в зависимости от амплитуды ε : 0.03 (а); 0.10 (б). Сплошными белыми стрелками на фрагментах (а, б) схематично изображено теоретическое направление распространения волн, соответствующее частоте $\sigma = 1.10$; черной стрелкой – новое направление волн, не существующее в линейном режиме. Число Экмана $E = 4.7 \cdot 10^{-5}$.

При $\varepsilon \geq 0.05$ из-за развития надкритического течения линейная зависимость нарушается, а экспериментальные данные могут быть описаны квадратичным законом $|\langle \xi_z \rangle| \sim \varepsilon^2$. Это вполне очевидно, поскольку в нелинейном режиме визуально наблюдаются дополнительные вихревые структуры, вносящие дополнительный вклад в расчет $|\langle \xi_z \rangle|$. Важно, что результаты определения порога неустойчивости, полученные путем измерения интегральной завихренности с помощью PIV-метода и дальнейшего анализа излома кривой в

зависимости $|\langle \xi_z \rangle|(\varepsilon)$ (см. рис. 3.3), хорошо согласуются с визуальным определением момента азимутального перемешивания жидкости.

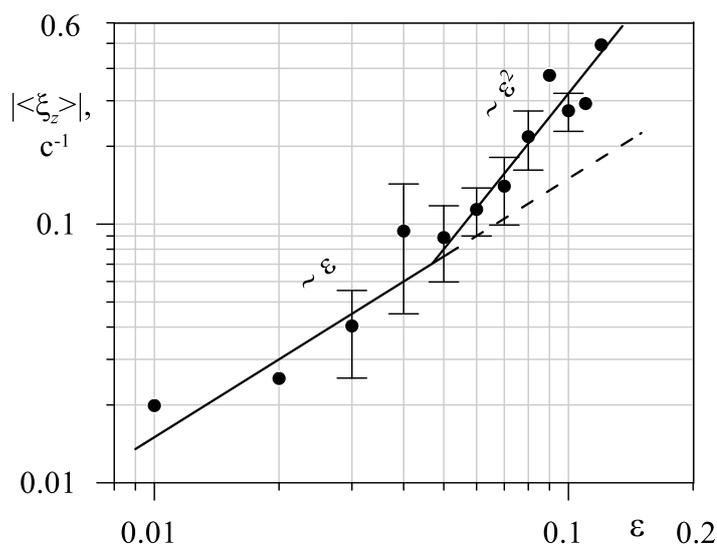


Рис. 3.3. Модуль осредненной по времени завихренности в зависимости от амплитуды модуляции скорости ε при $\sigma=1.44$ и $E=4.7 \cdot 10^{-5}$ в поперечном сечении $z/L=0.50$. Осреднение по времени осуществляется для $\sim 10T_{lib}$.

Систематические измерения порогов неустойчивости при постоянном значении числа Экмана $E=4.7 \cdot 10^{-5}$ показывают, что критическое значение амплитуды модуляции скорости ε_c немонотонно изменяется с частотой σ (рис. 3.4б). При этом минимальное значение $\varepsilon_c=0.02$ лежит в диапазоне частот $\sigma=0.66-0.68$. Этот результат находится в хорошем согласии с зависимостью пульсационной скорости $\langle U \rangle$ от частоты, которая испытывает экстремум при $\sigma=0.66$ (рис. 3.4а). С увеличением (уменьшением) частоты σ скорость пульсационного течения $\langle U \rangle$ постепенно уменьшается, а порог неустойчивости ε_c смещается в область более высоких значений амплитуд модуляции скорости (рис. 3.4б). Такое поведение характерно для большинства резонансных режимов. Стоит отметить, что гистерезис в переходах с докритического к надкритическому течению в исследуемой задаче не наблюдается. При понижении амплитуды модуляции скорости $\varepsilon < \varepsilon_c$ скорость пульсационного течения уменьшается и, в

конце концов, вторичные волны пропадают и зависимость $|\langle \xi_z \rangle|(\varepsilon)$ снова приобретает линейный характер (рис. 3.3). Подобным образом резонансное возбуждение инерционных мод во вращающемся сферическом слое с колеблющимся ядром оказывает сильное дестабилизирующее воздействие на осредненное азимутальное течение [102]. В условиях резонансных колебаний жидкости создаются наиболее благоприятные условия для развития неустойчивости в виде вытянутых вдоль оси вращения системы валов.

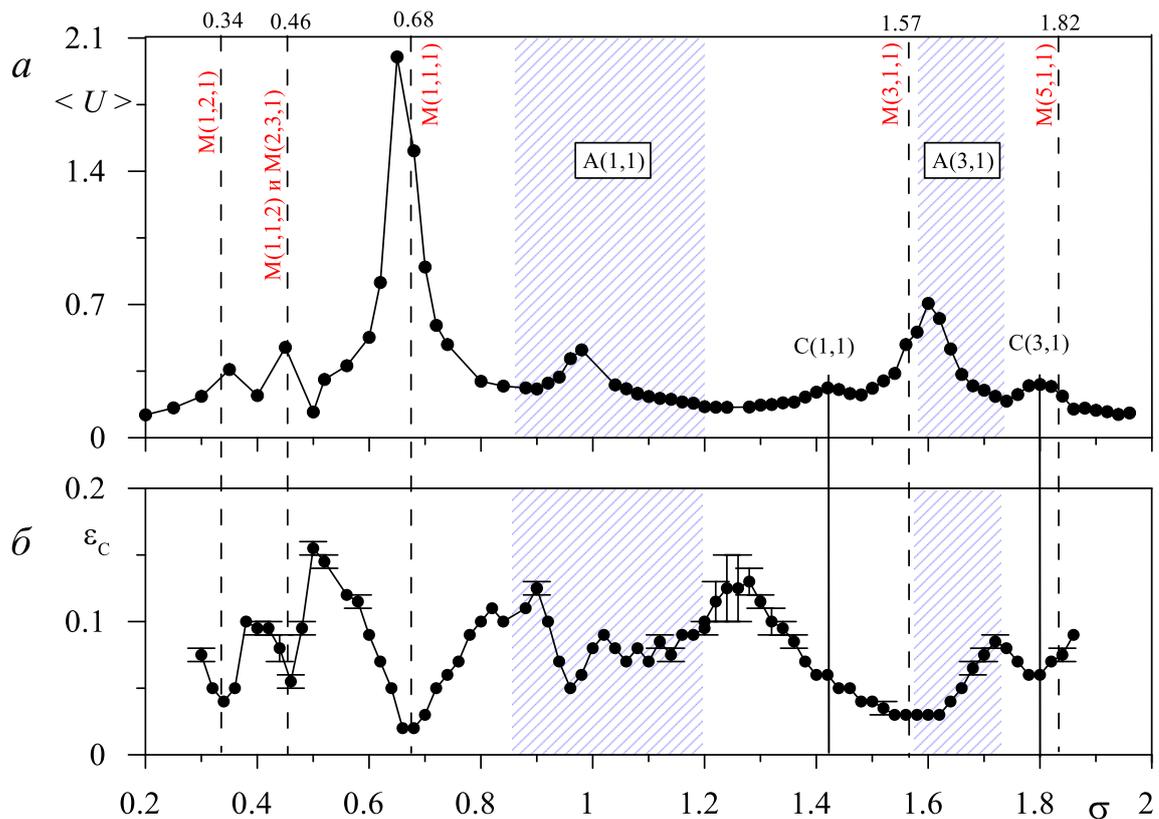


Рис. 3.4. Интенсивность пульсационного течения в зависимости от частоты либраций σ при $E = 1.2 \cdot 10^{-4}$ (а). Пороги неустойчивости азимутального течения от σ при $E = 4.7 \cdot 10^{-5}$ (б). Заштрихованные синие области соответствуют аттрактору $A(n, m)$; сплошными линиями показан режим симметричного отражения волн $C(n, m)$. Собственные значения инерционных мод обозначены вертикальными штриховыми линиями.

Критические значения амплитуды ε_c чувствительны к изменению вязкости жидкости и параметров вращения полости. На рис. 3.5 показаны пороги неустойчивости ε_c в зависимости от числа Экмана E . Систематические

исследования указывают, что экспериментальные точки, полученные для аттрактора $A(1,1)$, могут быть описаны законом $\varepsilon_c \sim E$. Схожая линейная зависимость наблюдается при частоте $\sigma = 1.42$ в режиме симметричного отражения волн $C(1,1)$. Однако в случае инерционной моды $M(1,1,1)$ точки аппроксимируются законом $\varepsilon \sim E^{3/4}$. Отличия в законах для аттрактора и инерционной моды может быть обусловлено особенностями развития неустойчивости, что является перспективой для дальнейших исследований.

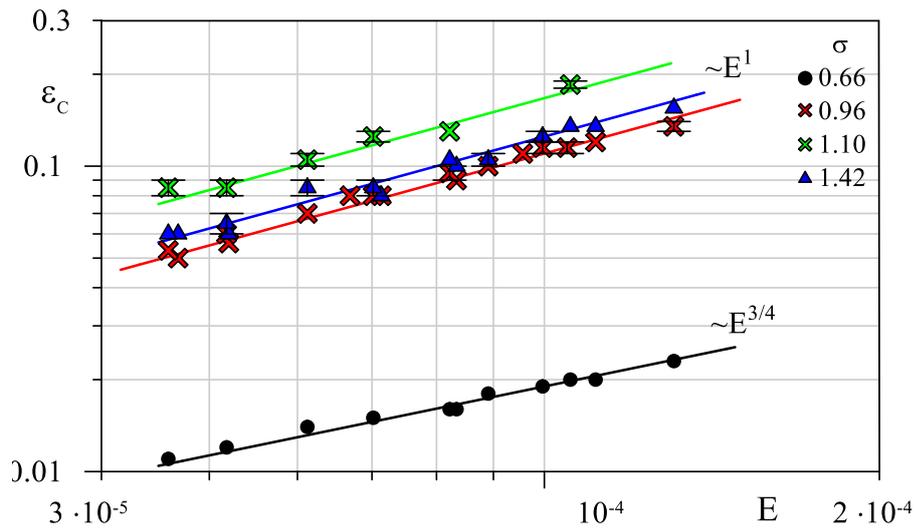


Рис. 3.5. Влияние числа Экмана на пороги неустойчивости азимутального течения.

Учитывая, что $\varepsilon = \Delta\varphi\Omega_{lib} / \Omega_{rot}$, для характеристики порогов неустойчивости можно снова ввести пульсационное число Рейнольдса, ранее полученное в разделе 2.2.2:

$$\text{Re}_p = \varepsilon E^{-1} = \frac{\Delta\varphi\Omega_{lib}R^2}{\nu}. \quad (3.2)$$

Таким образом, один и тот же параметр (3.2) отвечает как за осреднённую скорость азимутального течения до порога возникновения неустойчивости, так и за сам порог. Интересно, что полученный параметр не содержит характеристик вращения системы и может быть переписан через соотношение характерных размеров: $\text{Re}_p \sim \Delta\varphi R^2 / \delta_s^2$. Здесь $\delta_s \sim \sqrt{\nu / \Omega_{lib}}$ – толщина динамического пограничного слоя на стенках полости, где рождается осреднённая завихренность.

Значения числа Рейнольдса для вблизи резонансных частот замкнутых траекторий представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Пульсационное число Рейнольдса при $\alpha = 23.0^\circ$

| Режим | σ | Re_p |
|---------|----------|---------------|
| A (1,1) | 0.96 | 1120 ± 36 |
| C (1,1) | 1.42 | 1235 ± 55 |

В случае инерционной моды M (1,1,1) закон, описывающий неустойчивость, имеет вид $\varepsilon_c \sim E^{3/4}$, поэму для характеристики порогов при частоте $\sigma = 0.66$ можно использовать модифицированное число Рейнольдса $Re_p^* = \varepsilon E^{-3/4} = 19 \pm 1$.

3.1.2. Механизм неустойчивости в различных режимах

Для определения механизма генерации вторичных волн был проведен Фурье-анализ мгновенного азимутального поля скорости при различных частотах либраций. Для этой цели использовалась методика, ранее успешно зарекомендовавшая себя при анализе неустойчивости волнового аттрактора во вращающемся кольцевом слое с косым дном [70], а также течения, возбуждаемого колеблющимся ядром во вращающейся сферической полости [102]. На рис. 3.6 показана спектрограмма азимутальной скорости для режима аттрактора A(1,1) при частоте $\sigma = 0.90$, полученная в пороге неустойчивости ε_c и рассчитанная следующим образом [103]:

$$S(\omega, t) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_\varphi(\tau) e^{-i\omega\tau} h(t-\tau) d\tau \right|^2 \right\rangle_{(r,\varphi)}, \quad (3.3)$$

где $h(t)$ – окно Хэмминга; обработка осуществлялась во всем сечении $0 \leq r/R \leq 1$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Для частоты $\sigma = 0.90$ период колебаний составлял 111.1 мс, в то время как промежуток времени между двумя последовательными отсчетам

равнялся 2.78 мс. Это означает, что один период либраций разрешался 40 точками. Здесь и далее для получения спектрограмм в нелинейных режимах использовалась выборка кадров из не менее, чем $400T_{lib}$.

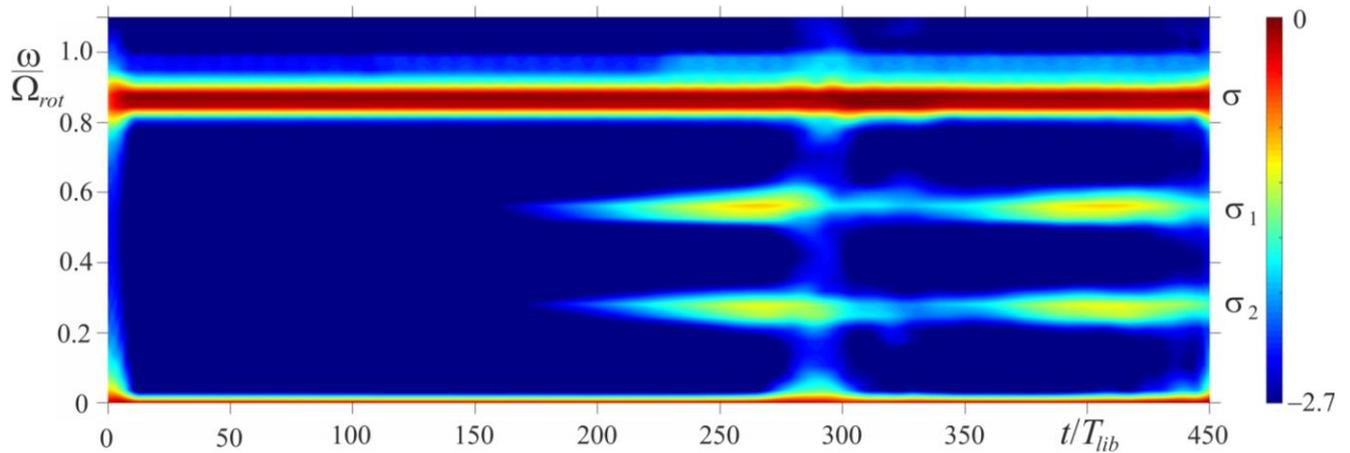


Рис. 3.6. Частотно-временная диаграмма азимутальной скорости в сечении $z/L = 0.50$ при $\sigma = 0.90$, $\varepsilon = 0.14$ и $E = 5.2 \cdot 10^{-5}$. Цветом показана величина $\log_{10}[S(\omega, t)/S_0]$, рассчитанная по формуле (3.3); S_0 – значение осредненного по времени спектра на частоте Ω_{lib} ; начало отсчета времени соответствует моменту включения либраций.

В нелинейном режиме наиболее сильный отклик соответствует фундаментальной частоте $\omega/\Omega_{rot} = \sigma$, значение которой постоянно на протяжении всего эксперимента. Дополнительно в спектре присутствуют две частоты $\sigma_1 = 0.6$ и $\sigma_2 = 0.3$, сумма которых равняется фундаментальной частоте $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Это позволяет сделать предположение, что спусковым механизмом генерации вторичных волн является так называемый *триадный резонанс* [104, 105], когда фокусировка волн в аттрактор приводит к каскаду энергии по сценарию триадных взаимодействий [106]. Триадный резонанс предполагает линейную комбинацию между частотами и волновыми векторами для основной волны и рождаемых субгармоник. Остановка каскада в экспериментах обусловлена вязкой диссипацией энергии вторичных волн.

Следует отметить, что при задании амплитуды либраций неустойчивость наступает не сразу, а спустя несколько периодов либраций. На рис. 3.6 в спектре в

дапазоне $t/T_{lib} = 0-170$ существует только фундаментальная частота σ , а структура осредненного азимутального потока визуальна подобна рис. 3.1а. При $t/T_{lib} > 170$ в спектре возникают две новые субгармоники σ_1 и σ_2 . Интересно, что момент возникновения новых частот соответствует моменту неустойчивости азимутального течения (рис. 3.1б,в). После окончания первой «вспышки» ($t/T_{lib} > 300$) наблюдается существенное ослабление интенсивности дочерних волн с частотами σ_1 и σ_2 . Следующая «вспышка» происходит при $t/T_{lib} > 370$.

Рассмотрим влияние фундаментальной частоты σ на спектры азимутальной скорости (рис. 3.7). Видно, что значения частот σ_1 и σ_2 могут меняться, но их сумма всегда остается равной частоте воздействия. С повышением σ частоты обеих субгармоник повышаются, при этом значение σ_1 растет быстрее.

Дополнительно в спектре (рис. 3.7) могут присутствовать «паразитные» гармоники с частотами $\omega/\Omega_{rot} = 1$ и $\omega/\Omega_{rot} = \sigma - 1$, не влияющие на физические процессы, рассматриваемые в диссертации. Дополнительные гармоники являются паразитными и проявляются в результате перехода из лабораторной системы отсчета в систему отсчета полости, совершающей равномерное вращение. Напомним, что для этой процедуры каждое изображение поворачивается против направления вращения полости с постоянным шагом. Эта операция не учитывает возможную ошибку параллакса при съемке, а также неравномерное вращение полости. В случае частоты $\sigma = 0.90$ (рис. 3.6) данные гармоники практически не проявляются, соответственно положение камеры относительно полости было выбрано наиболее удачно.

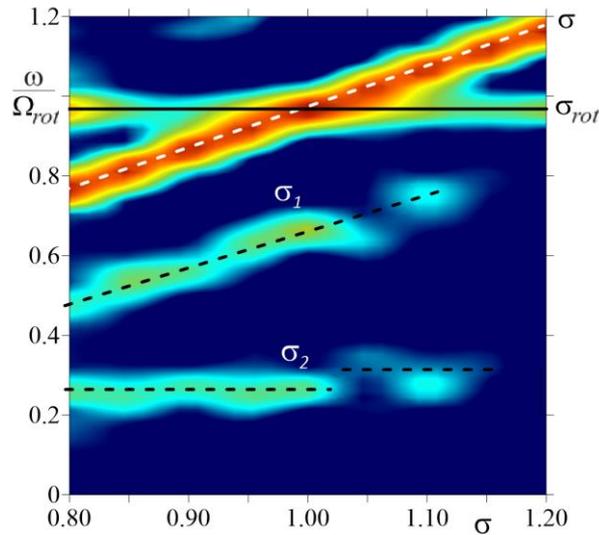


Рис. 3.7. Спектры азимутальной скорости в зависимости от частоты либраций σ в области порога неустойчивости $\varepsilon_C = 0.09 - 0.14$ при $z/L = 0.50$ и $E = 5.2 \cdot 10^{-5}$. Сплошная черная линия указывает на частоту вращения полости σ_{rot} ; пунктирные черные линии соответствуют частотам субгармоник триадного резонанса. Цветом показана величина $\lg[S(\omega, t)]/S_0$.

В режиме симметричного отражения волн C(1,1) спектрограмма азимутальной скорости в пороге неустойчивости более сложная (рис. 3.8б). В линейном режиме (рис. 3.8а) в спектре помимо основной частоты $\sigma = 1.44$ хорошо проявляются «паразитные» гармоники с частотами $\omega/\Omega_{rot} = 1$ и $\omega/\Omega_{rot} = \sigma - 1$. В нелинейном режиме сохраняется наиболее сильный отклик основной частоте σ (рис. 3.8б). В то же время, в отличие от режима аттрактора A(1,1) в спектре одновременно существуют несколько пар близких по значению частот, при этом их значения могут незначительно изменяться с течением времени. Рассмотрим подробнее спектральный состав волн в момент времени $t/T_{lib} > 200$ (рис. 3.9). Пары субгармоник отчетливо различаются в спектре при $\sigma_{11} = 0.27$ и $\sigma_{21} = 0.36$, а также при $\sigma_{22} = 1.06$ и $\sigma_{21} = 1.15$. Сумма каждой пары дает значение, близкое к основной частоте σ . Артефактные гармоники $\omega/\Omega_{rot} = 1$ и $\sigma - 1$ хорошо отделены от частот триадного резонанса.

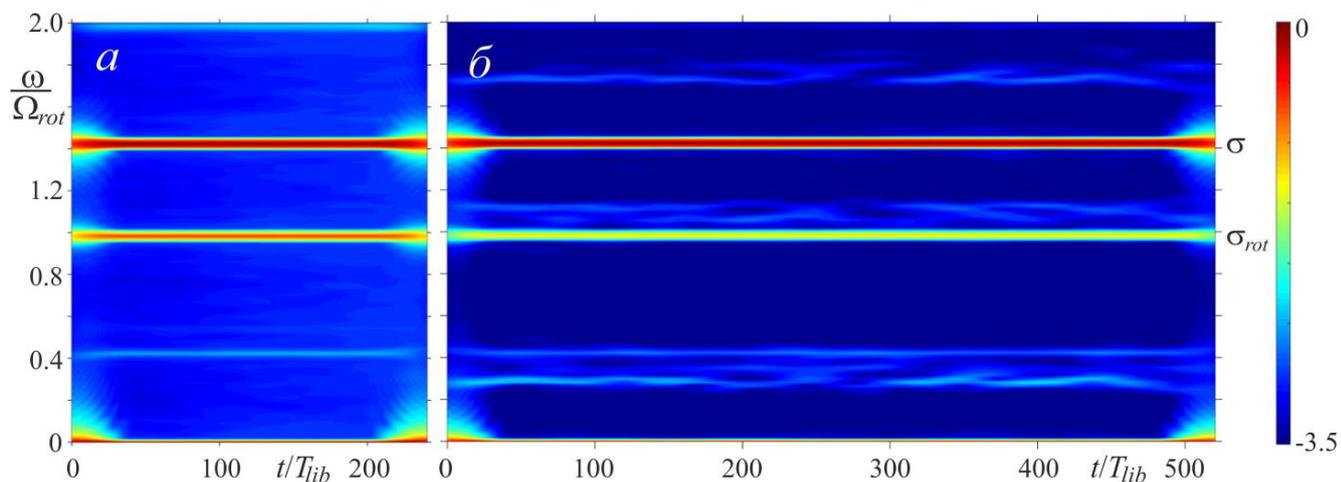


Рис. 3.8. Частотно-временная диаграмма азимутальной скорости при $\sigma = 1.44$ в (а) линейном ($\varepsilon = 0.03$) и (б) нелинейном ($\varepsilon = 0.06$) режимах. Цветом показана величина $\lg[S(\omega, t)]/S_0$.

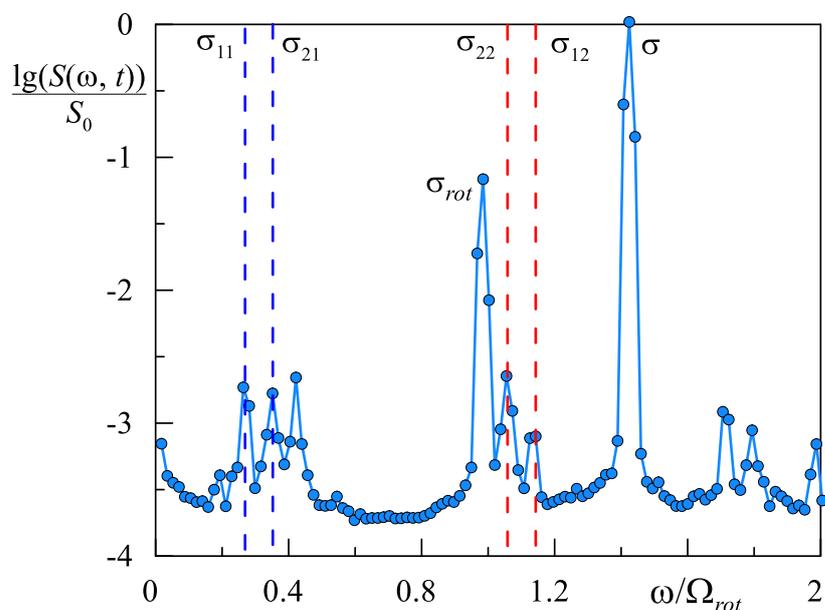


Рис. 3.9. Спектр азимутальной скорости в момент времени $t/T_{lib} = 200$. Вертикальными пунктирными линиями обозначены частоты субгармоник триадного резонанса.

Триадный резонанс во вращающейся цилиндрической полости, известен ещё со времен Макэвана [63], который обратил внимание на возникновение так называемого «резонансного коллапса» вблизи резонансной частоты инерционной моды. Позднее экспериментально было показано, что в прецессирующем цилиндре неустойчивость действительно удовлетворяет условию триадного резонанса в виде двух инерционных мод и основной резонансной модой с

азимутальным волновым числом $l = m_2 - m_1$ [65]. Дальнейшие исследования этого механизма получили развитие в работах [66, 107, 108, 68]. Что касается волновых аттракторов, то неустойчивость по сценарию триадных взаимодействий достаточно часто наблюдается в стратифицированной или вращающейся жидкостях [104, 105, 69, 70]. Дочерние волны распространяются в противоположных направлениях, а векторная сумма их волновых векторов соответствует волновому вектору самого аттрактора, $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ [109]. В настоящем исследовании механизм волнового распада аналогичный. Тем не менее, впервые показано, что неустойчивость триадного резонанса приводит к разрушению осреднённого азимутального течения. Вторым интересным аспектом является то, что уже в пороге неустойчивости может наблюдаться несколько пар субгармоник с разными частотами, что представляет большой интерес для дальнейших теоретических исследований.

3.1.3. Надкритическая динамика осредненных структур

На рис. 3.10 показана структура азимутального течения, осреднённого по периоду либраций T_{lib} для режима инерционной моды М (1,1,1). Левый фрагмент рисунка соответствует допороговому течению, правый – надпороговому. В отличие от аттрактора (1,1) неустойчивость сопровождается возникновением периодической системы валов со средним азимутальным волновым числом $\langle k \rangle = 5$. Несмотря на то, что осреднённое по азимуту дифференциальное вращение жидкости $\langle \Delta\Omega \rangle_\varphi$ отстающее, система валов совершает опережающее вращение. Дрейф осреднённых структур продемонстрирован на рис. 3.11. Для получения временной диаграммы строилась осреднённая завихренность вдоль кольца радиусом $r/R = 0.75$ (рис. 3.11). Временной шаг для построения диаграммы составлял $\Delta t / T_{lib} = 0.18$. Важно отметить, что с течением времени интенсивность вихревого движения меняется. Наиболее ярко неустойчивость проявляется в моменты возникновения субгармоник в спектре азимутальной

скорости (рис. 3.12). Отметим, что здесь, также как и в режиме аттрактора частоты $\sigma_1 = 0.43$ и $\sigma_2 = 0.23$ удовлетворяют условию триадного резонанса $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$. При уменьшении интенсивности субгармоник в спектре осреднённые вихри не затухают полностью, а их фазовая скорость сохраняет постоянное значение. Это указывает, на то, что неустойчивость триадного резонанса является определяющим механизмом в генерации вихрей.

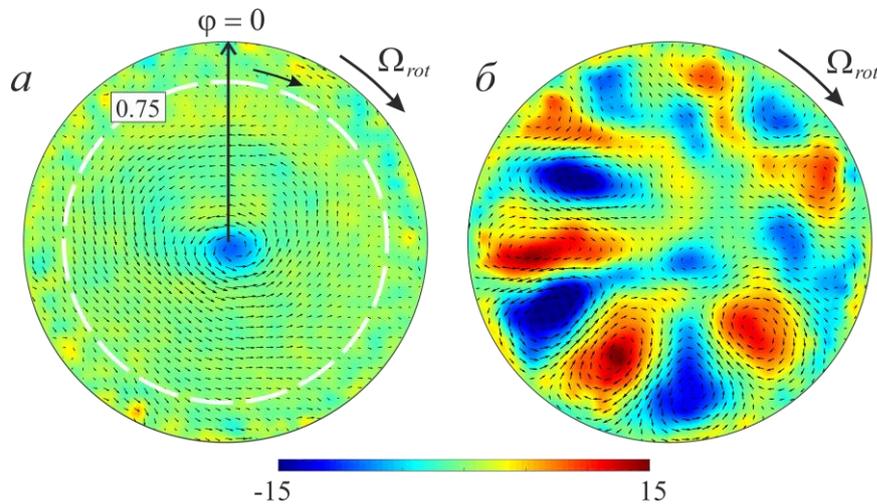


Рис. 3.10. Осредненные азимутальные поля скорости в нелинейном режиме при $\sigma = 0.66$ и $\varepsilon = 0.012$ в поперечном сечении $z/L = 0.40$ в различные моменты времени $t/T_{lib} = 80$ (а); 150(б).

Анализируя рис. 3.11 визуально можно оценить частоту появления осреднённых вихрей вдоль фиксированного радиального направления, как $\sigma^* = 0.231$. Это значение хорошо согласуется со второй субгармоникой триадного резонанса $\sigma_2 = 0.23$ на рис. 3.12. Вблизи углового положения $\varphi = 0$ на временной диаграмме завихренности (рис. 3.11) можно заметить «следы» ретроградно вращающихся вихрей с частотой $\sigma^* = 0.429$. Данная частота, в свою очередь, близка к значению первой субгармоники триадного резонанса $\sigma_1 = 0.43$.

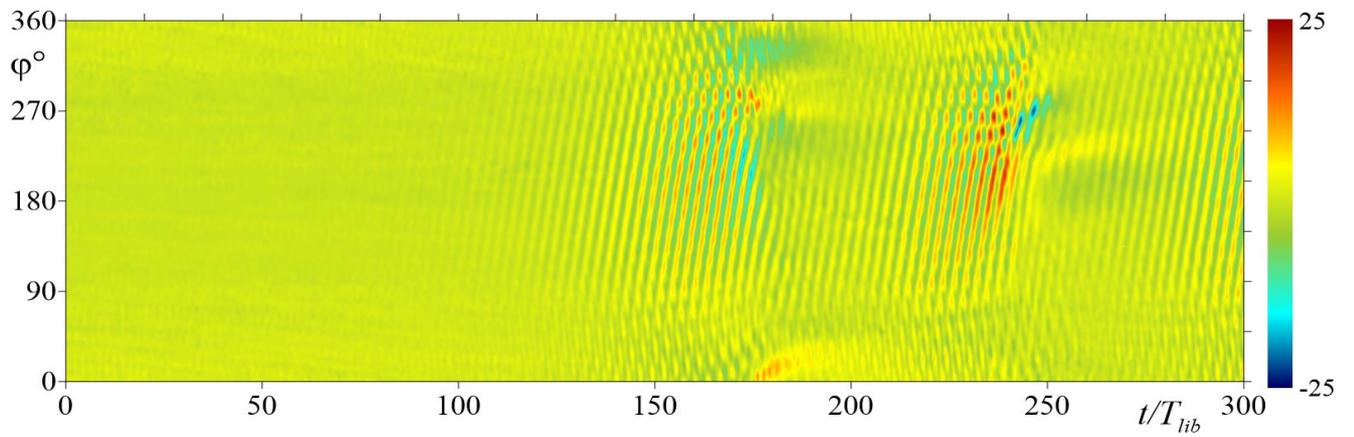


Рис. 3.11. Временная зависимость осредненной завихренности вдоль кольца радиусом $r/R=0.75$ (белая штриховая линия, рис. 3.10а) в поперечном сечении $z/L=0.40$ при $\sigma=0.66$, $\varepsilon=0.012$.

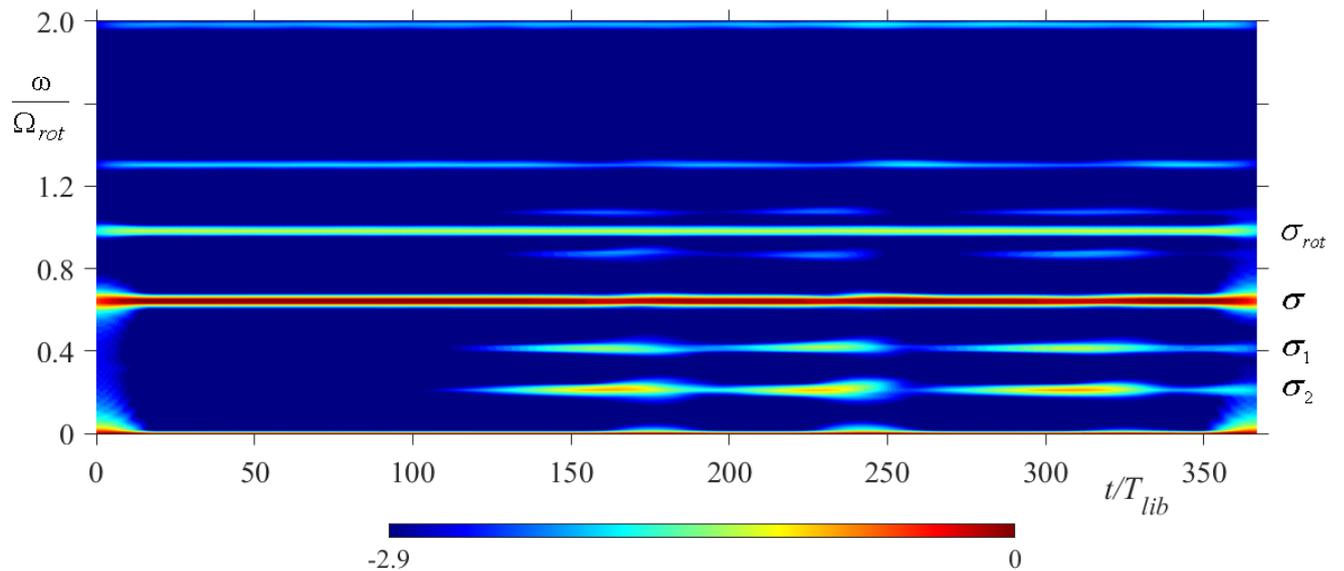


Рис. 3.12. Частотно-временная диаграмма азимутальной скорости при $\sigma=0.66$ и $\varepsilon=0.012$, $z/L=0.40$. Цветом показана величина $\lg[S(\omega, t)]/S_0$.

3.2. Полость с непараллельным наклоном торцов

3.2.1. Пороги устойчивости осредненного течения

Визуальные наблюдения со стороны торцевой стенки показывают, что сценарий разрушения осреднённого зонального потока, показанного на рис. 2.29, аналогичен случаю параллельного наклона торцов. Визуально этот процесс сопровождается отделением от основного вихря нескольких меньших по размеру вихрей, которые движутся в азимутальном направлении. На рис. 3.13 серыми точками показаны пороги возникновения неустойчивости в зависимости от частоты либраций. Основное внимание уделено области существования инерционной моды $M(2,1,1)$ и аттрактора $A(2,1)$. Первый минимум соответствует частоте $\sigma = 1.28$, значение которой совпадает с частотой резонансного отклика жидкости на моду $M(2,1,1)$. Этот ожидаемый результат, поскольку в условиях резонанса наиболее интенсивное пульсационное течение возникает на собственной частоте. При изменении частоты σ (увеличении или уменьшении), пороги неустойчивости смещаются в область больших амплитуд ε . Другой минимум наблюдается на частоте $\sigma = 1.50$ и соответствует аттрактору $A(2,1)$ и локальному повышению интенсивности пульсационного течения на рис. 2.27. Сюрпризом оказалось понижение порога неустойчивости при частоте $\sigma = 1.42$. В этом случае структура пульсационного течения в линейном режиме качественно не отличается от $\sigma = 1.50$ и представляет собой более узкий аттрактор $(2,1)$. Далее внимание уделяется детальному рассмотрению нелинейных режимов на частотах $\sigma = 1.28$ и $\sigma = 1.50$ (красные точки на рис. 3.13).

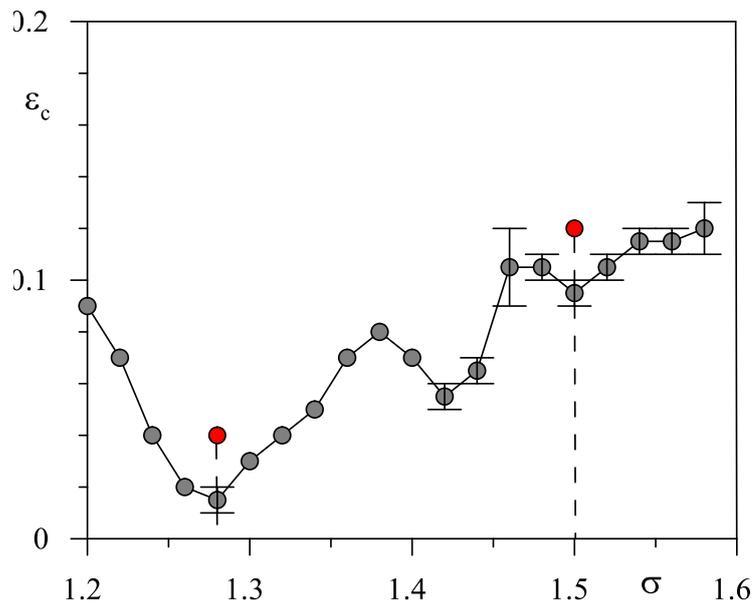


Рис. 3.13. Пороговые значения неустойчивости азимутального потока в зависимости от частоты либраций (серые точки) при $E = 4.5 \cdot 10^{-5}$. Красные точки соответствуют амплитуде либраций, спектрограммы которых показаны на рис. 3.14.

Для исследования механизма неустойчивости зонального потока анализировались мгновенные азимутальные поля скорости в двух поперечных сечениях $z/H = 0.3$ и 0.5 . На основе PIV-данных проводился спектральный анализ согласно формуле (3.3) для области $0 \leq r/R \leq 1$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Для анализа выбирались кадры с промежутком времени 2.78 мс, в то время как для частоты $\sigma = 1.28$ период колебаний составлял 78.13 мс, а для $\sigma = 1.50$ – 66.67 мс. Соответствующие спектрограммы в нелинейном режиме для первых 500 периодов либраций представлены на рис. 3.14. Здесь момент времени $t/T_{lib} = 0$ соответствует началу съемки, при этом установление нужной амплитуды либраций осуществлялось плавным повышением ε до желаемого значения с шагом $\Delta\varepsilon = 0.01$. Это означает, что представленным режимам течения уже предшествовало состояние неустойчивости. Независимо от частоты либраций наиболее сильный отклик на спектрограмме соответствует $\omega/\Omega_{rot} = \sigma$ и $\omega/\Omega_{rot} = 1$. Последняя частота (обозначенная как σ_{rot} на рис. 3.14 и рис. 3.15) также, как и при параллельном наклоне торцов, появляется благодаря

искусственному переходу из лабораторной системы отсчета в равномерно вращающуюся систему с частотой Ω_{rot} .

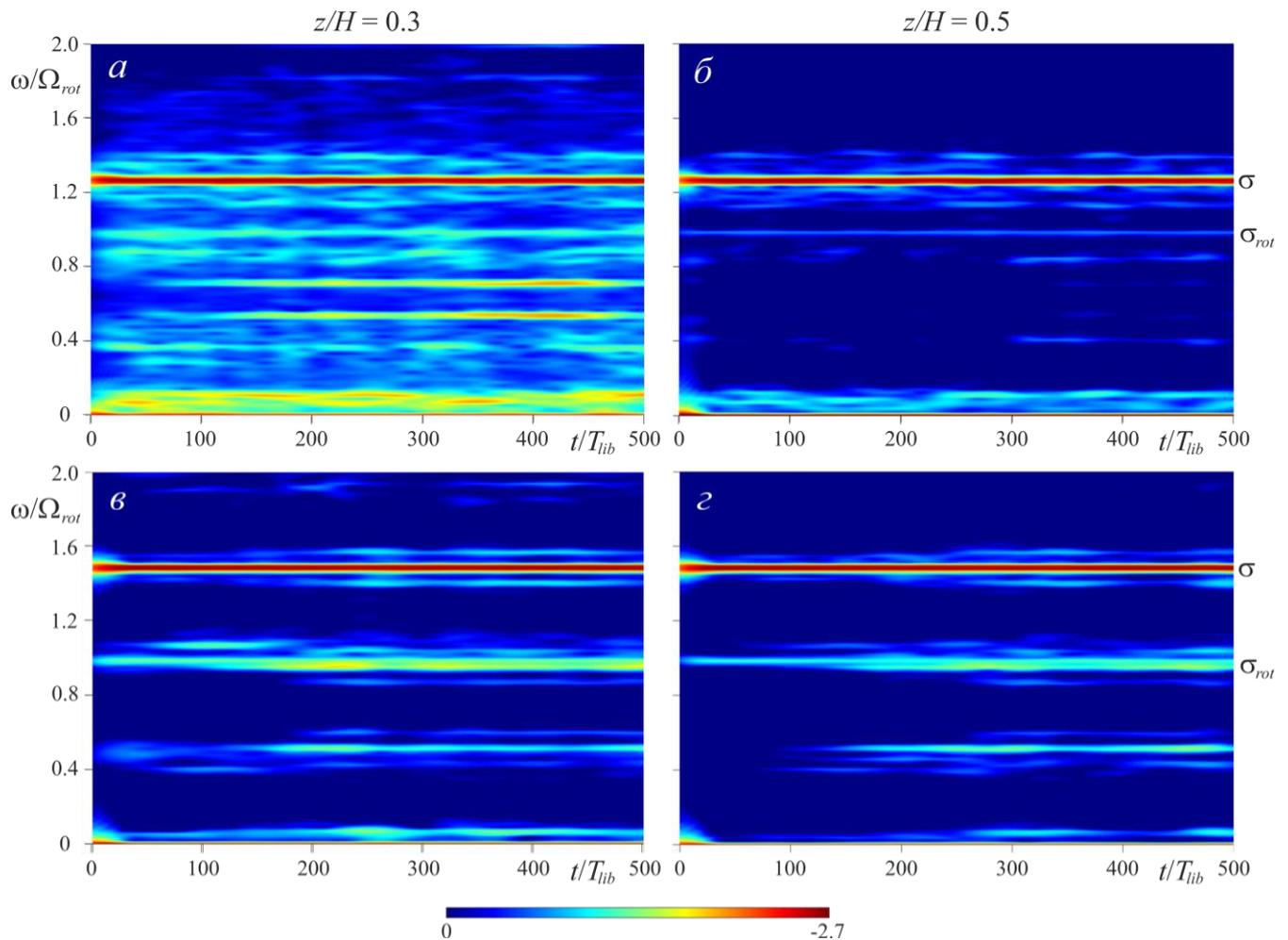


Рис. 3.14. Спектрограммы азимутальной скорости для $\sigma = 1.28$ и $\varepsilon = 0.04$ (а, б); $\sigma = 1.50$ и $\varepsilon = 0.12$ (в, г) в различных поперечных сечениях z/L . Цветом показана величина $\lg[S(\omega, t)/S_0]$.

В дополнении к основной частоте спектры содержат большое количество гармоник, которые могут быть разделены на пары. При $\sigma = 1.28$ в сечении $z/H = 0.3$ (рис. 3.14а) наиболее отчетливо проявляется «внутренняя» пара с частотами $\sigma_{31} = 0.55$ и $\sigma_{32} = 0.73$. Эти гармоники появляются не сразу, а только через $t/T_{lib} \sim 50$. В середине полости ($z/H = 0.5$, рис. 3.14б) более яркие гармоники имеют частоты $\sigma_{21} = 0.40$ и $\sigma_{22} = 0.88$. В интервале $0 < t/T_{lib} < 300$ их интенсивность является непостоянной, кроме этого, наблюдаются

кратковременные изменения значений самих частот. Например, при $t/T_{lib} \sim 130$ (рис. 3.14б) нижняя частота σ_{21} уменьшается, в то время как верхняя частота σ_{22} увеличивается. Наконец, третья («внешняя») пара может быть получена из частот $\sigma_{11} = 0.12$ и $\sigma_{12} = 1.16$. Сумма каждой пары дает значение близкое к основной частоте: $\sigma = \sigma_{i1} + \sigma_{i2}$, где i – номер пары. Таким образом, можно предположить, что основным механизмом разрушения среднего стационарного вихря является триадный субгармонический резонанс [104, 10]. Более подробные спектры, показывающие значения всех пиков в момент времени $t/T_{lib} = 300$ представлены на рис. 3.15. Аналогичные пары субгармоник триадного резонанса появляются в нелинейном режиме аттрактора A(2,1) (рис. 3.14в, з). «Внутренняя» пара частот $\sigma_{31} = 0.62$ и $\sigma_{32} = 0.88$ возникает в момент времени $t/T_{lib} > 180$. Вторая пара $\sigma_{21} = 0.43$ и $\sigma_{22} = 1.07$; третья пара $\sigma_{11} = 0.06$ и $\sigma_{12} = 1.44$. Кроме этого, в спектре можно выделить четвертую пару $\sigma_{41} \approx 0.5$ и $\sigma_{42} \approx 1.0$, где одна частота соответствует средней частоте вращения системы. С одной стороны, непостоянство значения σ_{41} со временем свидетельствует в пользу наличия этой пары. Однако в разделе 3.2.2. будет показано, что линейный отклик не возникает на этих частотах, поэтому они не выделены отдельно на рис. 3.15.

Эксперименты на частотах $\sigma = 1.28$ и $\sigma = 1.50$ проводились в одних и тех же условиях, однако в случае аттрактора субгармоники триадного резонанса в разных сечениях проявляются одинаково, а в случае инерционной моды с разной интенсивностью. Стоит отметить, что это не связано с положением лазерного ножа – серые и черные символы на рис. 3.15б характеризуются одинаковой зависимостью. Для моды M(2,1,1) напротив, наблюдается уменьшение значения S/S_0 в поперечном сечении $z/H = 0.5$. Поскольку освещение частиц визуализатора не отличалось от случая аттрактора, то это может быть связано с «трехмерной» природой триадного резонанса. Это предположение также подтверждается тем фактом, что значения субгармоник σ_{21} и σ_{22} в разных сечениях неодинаковы (рис. 3.15а). Настоящие эксперименты показывают, что в

условиях резонанса инерционной моды триадный резонанс проявляется с более богатой точки зрения, чем в условиях аттрактора. Более того, различие в спектрах при изменении поперечного сечения указывает на то, что пространственная структура волн может быть довольно сложной. При этом даже вблизи порога неустойчивости реализуется целая серия энергетических каскадов (в данном случае три).

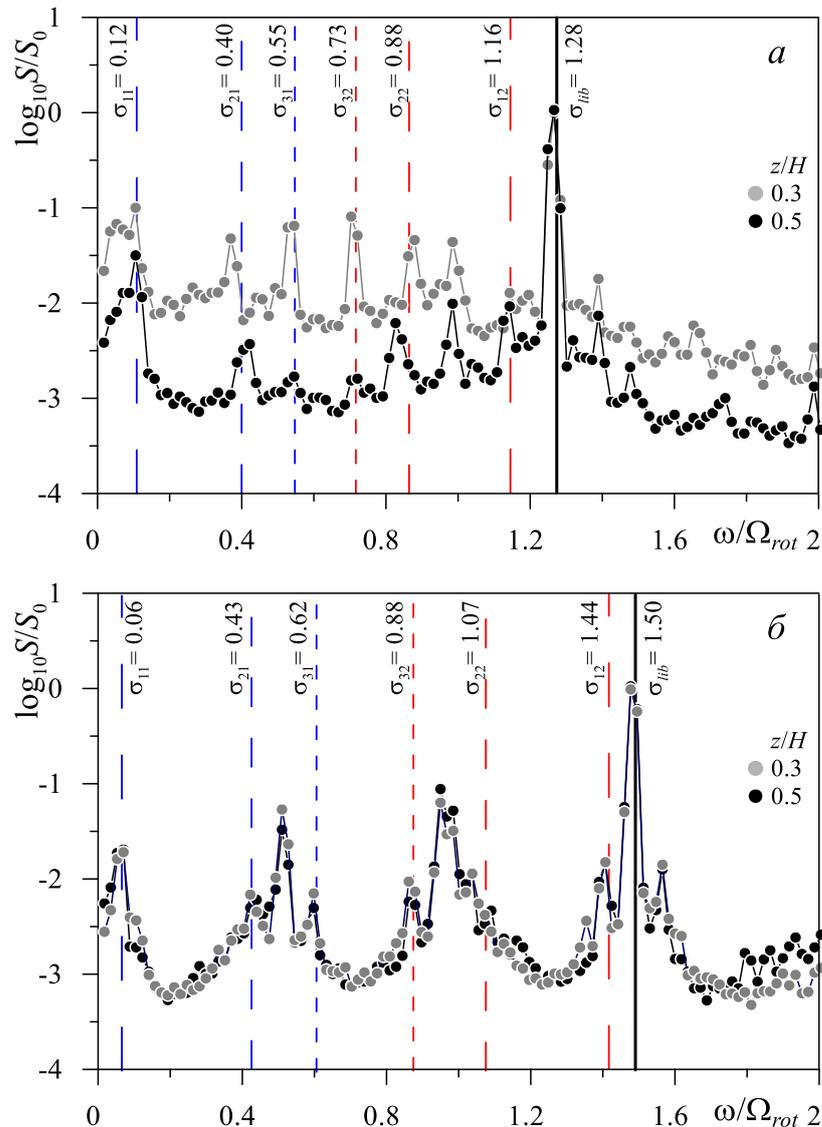


Рис. 3.15. Спектры азимутальной скорости при таких же параметрах ($\sigma = 1.28$ и $\varepsilon = 0.04$ (a); $\sigma = 1.50$ и $\varepsilon = 0.12$ (б)) как рис. 3.14, полученные в момент времени $t/T_{lib} = 300$; жирная вертикальная линия указывает на основную частоту, а пунктирные линии указывают на частоты триадного резонанса.

Таким образом, триадный резонанс инерционных волн является пусковым механизмом для разрушения зонального потока и может быть инструментом для перемешивания. Как отмечалось ранее, в докритической области частот поток представляет собой единый вихрь, вытянутый вдоль оси вращения. Этот поток напоминает столб Тейлора, в котором движение жидкости вдоль оси вращения запрещено [1]. Неустойчивость триадного резонанса должна приводить к нарушению двумерности и созданию хаотичного перемешивания.

3.2.2. Надкритическая динамика осредненных структур

Рассмотрим нелинейный отклик жидкости на неустойчивость триадного резонанса. На рис. 3.16 показаны осредненные за период либраций поля скорости в разные моменты времени. Так $t/T_{lib} = 0$ структура потока представляет собой систему нестационарных вихрей, перемещающихся как в азимутальном, так и радиальном направлениях (рис. 3.16а, в). На первый взгляд эта система ведет себя довольно хаотично: направления движения вихрей различны, в тоже время отдельные вихри могут распадаться или объединяться. При этом момент установления амплитуды либраций уже предшествовал разрушению основного стационарного потока (рис. 2.29). Со временем наиболее интенсивное движение жидкости локализуется вблизи тупых углов полости ($90^\circ < \varphi < 270^\circ$) (рис. 3.16б, г). Стоит обратить внимание, что при $t/T_{lib} > 100$ в поле скорости преобладают более крупные вихри. Это связано с тем, что мелкомасштабные структуры объединяются, и среднее азимутальное течение кажется более регулярным по сравнению с начальным моментом времени.

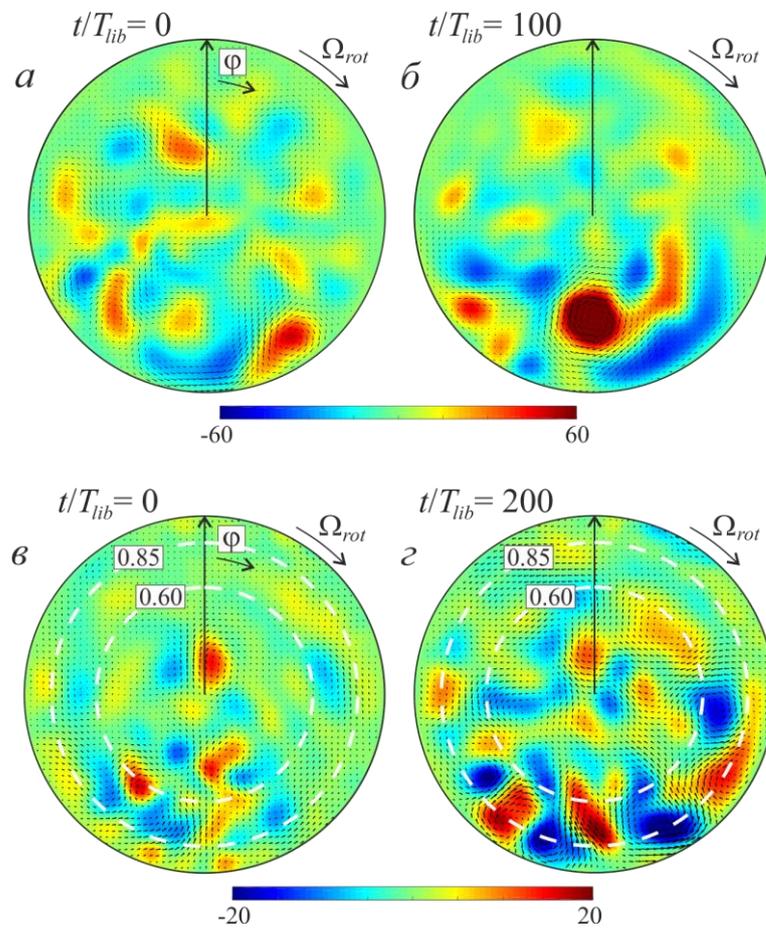


Рис. 3.16. Осредненные азимутальные поля скорости в нелинейном режиме при $\sigma = 1.28$, $\varepsilon = 0.04$ (*a, б*) и $\sigma = 1.50$, $\varepsilon = 0.12$ (*в, з*) в поперечном сечении $z/H = 0.30$ в различные моменты времени. Все обозначения такие же, как на рис. 2.30.

Дальнейший анализ динамики осредненного поля скорости будет представлен для частоты $\sigma = 1.50$. На рис. 3.17 показана временная зависимость средней завихренности. Аналогично рис. 2.29 осреднение выполняется по периоду либраций, но для увеличения временного разрешения шаг для вычисления скользящего среднего составляет $\Delta t / T_{lib} = 0.167$. Таким образом, один период либраций разрешается 6 кадрами, что является достаточным для получения информации о средней динамике вихря на рис. 3.17.

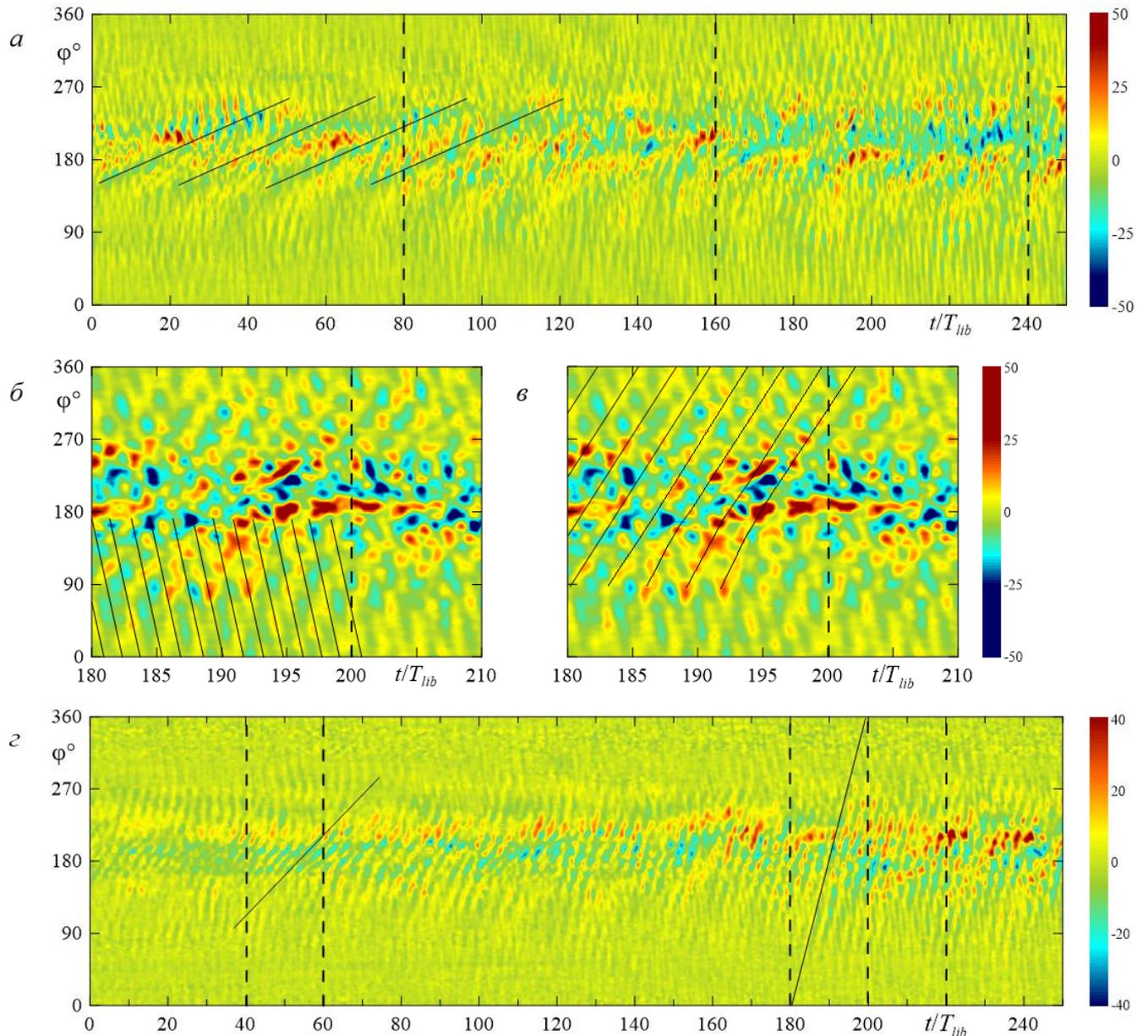


Рис. 3.17. Временная зависимость осредненной завихренности вдоль кольца радиусом $r/R=0.60$ (а-в) и $r/R=0.85$ (z) в поперечном сечении $z/H=0.30$ при $\sigma=1.50, \varepsilon=0.12$. Фрагменты (б, в) соответствуют временному промежутку $t/T_{lib}=180-210$ в увеличенном масштабе.

Осреднённые вихри могут располагаться на разных расстояниях от оси вращения, поэтому будем отдельно рассмотреть завихренность вдоль радиусов $r/R=0.6$ (рис. 3.17а-в) и $r/R=0.85$ (рис. 3.17z). Во-первых, основное движение происходит в области $\varphi \sim 180^\circ$, т.е. вблизи тупых углов полости, где расстояние между торцами является наименьшим. Во-вторых, на диаграмме можно различить одновременное существование нескольких типов движений с различными

временными масштабами. Самое медленное движение заметно в центральной части диаграммы и связано с медленным постепенным смещением максимума завихренности в направлении увеличения φ . Приблизительное направление и скорость дрейфа показано на рис. 3.17а сплошными наклонными линиями. Принимая во внимание, что в интервале $t/T_{lib} = 0-80$ (в периодах среднего вращения $t/T = 0-53$) имеется ≈ 3.5 периода, можно оценить частоту возникновения вихря как ≈ 0.066 . Это значение находится в согласии с пиком $\sigma_{11} = 0.06$ и указывает на существование ненулевого зонального потока.

Практически вертикальные линии на рис. 3.17а соответствуют довольно быстрому движению на фоне медленного дрейфа. Более того, в определенные моменты времени завихренность формирует сплетающиеся узоры. Для детального изучения природы структур рассмотрим увеличенные фрагменты диаграммы в интервале времени $t/T_{lib} = 180-210$ (рис. 3.17б, в). Оказывается, что переплетающиеся узоры формируются двумя типами движений: первое («высокочастотное») направлено против направления вращения полости; второе («умеренной частоты») совпадает с направлением вращения полости. Согласно оценке, частота ретроградных вихрей составляет ≈ 1.05 , что также соответствует одной из субгармоник триадного резонанса $\sigma_{22} = 1.07$. В то же время частота опережающих вихрей ≈ 0.6 , что является близким к $\sigma_{31} = 0.62$.

Наиболее выраженный опережающий дрейф с частотой ≈ 0.6 наблюдается вблизи периферии $r/R = 0.85$ (рис. 3.17г). Более того, полное развитие нелинейного режима происходит при $t/T_{lib} > 60$, что соответствует появлению субгармоники σ_{31} на спектрограмме (рис. 3.14г). Основное движение также локализовано в области $90^\circ < \varphi < 270^\circ$. Если взять расстояние между максимумами завихренности того же знака в нижней части рис. 3.16г, в качестве характерного пространственного периода, то азимутальное волновое число можно оценить как $k = 8$. В то же время оценка показывает, что в интервале времени $t/T_{lib} = 180-210$, безразмерная средняя угловая скорость дрейфа составляет $\Delta\Omega/\Omega_{rot} = 0.075$. Таким образом, в нелинейном режиме аттрактора колебания

жидкости с частотами субгармоник приводят к появлению осредненных эффектов. Нелинейный отклик на частотах σ_{11} и σ_{22} является наиболее выраженным на расстоянии $r/R=0.6$. При этом отклик на частоту σ_{31} более заметен на периферии $r/R=0.85$. В целом структура потока представляет из себя набор вихрей, расположенных на разных радиусах и дрейфующих в противоположных направлениях.

3.3. Основные выводы по главе

В данной главе представлены результаты экспериментального исследования нелинейной динамики жидкости во вращающемся цилиндре в зависимости от амплитуды модуляции скорости, безразмерной частоты либраций, числа Экмана и геометрии торцов полости. Обнаружено, что при достижении критического значения амплитуды осредненное азимутальное течение жидкости становится неустойчивым. Этот процесс сопровождается появлением в спектре азимутального течения новых гармоник, идентифицирующихся в различных поперечных сечениях цилиндра. В полости с параллельным наклоном торцов в режимах инерционной моды и волнового аттрактора в пороге возникает пара частот, которые вместе с фундаментальной частотой удовлетворяют условию триадного резонанса. В случае непараллельного наклона торцов спектр возмущений более сложный: вблизи порога неустойчивости наблюдается сразу несколько пар субгармоник, образующих линейную комбинацию с фундаментальной частотой. Кроме этого, анализ показал, что спектральная плотность в центральной части полости и вблизи торцов различна для режима инерционной моды и одинакова для аттрактора. Наиболее интересным результатом является возникновение системы осреднённых вихрей, частота которых согласуется с частотами субгармоник. Это означает, что триадный резонанс играет определяющую роль в неустойчивости зонального течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования. В работе представлено комплексное экспериментальное исследование пространственной структуры и временной динамики различных инерционно-волновых режимов (аттрактор инерционных волн, инерционная мода, симметричное отражение волновых лучей) и возбуждаемых ими осредненных потоков во вращающемся цилиндре. Для поддержания внутреннего волнового движения скорость вращения цилиндра меняется по гармоническому закону (либрации). Основные результаты заключаются в следующем:

1. Выполнено систематическое исследование линейных режимов пульсационного течения в зависимости от параметров либраций и геометрии торцевых стенок. Рассмотрены ситуации параллельного и антипараллельного расположения торцов при различных значениях угла наклона:
 - разработана и апробирована методика изучения пульсационных полей скорости во вращающейся системе отсчета, позволяющая анализировать пространственную структуру течений в различные фазы либраций полости;
 - обнаружены и изучены режимы фокусировки инерционных волн на замкнутую траекторию – волновой аттрактор; показано, что фокусировка происходит вблизи плоскости осевого сечения, проходящего вблизи плоскости, через которую проходит линия наклона торцов; создана двумерная модель трассировки волновых лучей, расчет которой позволил получить диаграммы Пуанкаре для интерпретации режимов, наблюдаемых в экспериментах;
 - обнаружен и изучен новый режим пульсационного течения, связанный с формированием волнами замкнутой траектории не за счет фокусировки при отражении лучей от наклонных границ, а благодаря симметрии распространения волн от противоположных по диагонали углов полости;
 - обнаружены и изучены неосесимметричные инерционные моды, представляющие собой крупномасштабные колебания жидкости; проведены

сравнение результатов экспериментов с собственными значениями невязких мод в цилиндре с прямыми торцами, выявлено согласие результатов. Показано, что при малом угле наклона торцов при фиксированной частоте либраций попеременно возбуждаются осесимметричные и неосесимметричные инерционные моды;

- построены карты режимов течений в зависимости от безразмерной частоты либраций, а также угла и направления наклона торцевых стенок; показано, что при параллельном наклоне торцов возбуждаются режимы с нечётными осевыми волновыми числами n , в то время как при антипараллельном наклоне торцов – режимы с четными n ;
- впервые экспериментально изучены зависимости скорости жидкости и ширины сдвиговой зоны в инерционной волне от числа Экмана.

2. Выполнено исследование осреднённых течений, возбуждаемых инерционными волнами:

- обнаружено, что осреднённое азимутальное течение имеет вид вытянутых вдоль оси вращения валов, положение и количество которых определяется локализацией точки отражения инерционной волны от наклонных торцов; если отражение волновых лучей происходит от оси вращения, осреднённое течение имеет вид циклонического ядра эллиптической формы;
- обнаружено, что отражение инерционных волн от боковой стенки сопровождается генерацией осреднённой меридиональной циркуляции в пределах вязкого пограничного слоя; показано, что направление циркуляции определяется фазой распространения инерционной волны;
- показано, что скорость осреднённого движения жидкости квадратичным образом зависит от амплитуды либраций; скорость дифференциального вращения жидкости в диапазоне $E = 10^{-5} - 10^{-3}$ определяется пульсационным числом Рейнольдса Re_p ;

3. Экспериментально исследована устойчивость осреднённого азимутального течения и надкритическая динамика жидкости в неравномерно вращающемся цилиндре:

- определены критические значения амплитуды либраций в зависимости от частоты либраций и числа Экмана, построены карты устойчивости для параллельного и антипараллельного наклона торцов; показано, что пороги неустойчивости определяются пульсационным числом Рейнольдса;
- получены спектрограммы мгновенной азимутальной скорости; показано, что неустойчивость осреднённого течения сопровождается появлением в спектре пары субгармоник, удовлетворяющих условию триадного резонанса инерционных волн; субгармоники триадного резонанса изучены в зависимости от частоты либраций и направления наклона торцевых стенок; показано, что даже вблизи порога неустойчивости может одновременно наблюдаться до трех пар субгармоник;
- обнаружено, что в нелинейном режиме инерционной моды триадный резонанс проявляется в виде пары свободных неосесимметричных инерционных мод, азимутальные волновые числа которых отличаются на единицу;
- впервые обнаружено, что в условиях триадного резонанса инерционных волн во вращающемся цилиндре генерируется осреднённая система азимутально-периодических валов, изучена их надкритическая динамика; показано, что частота вращения и азимутальное волновое число валов хорошо согласуется с пространственно-частотными характеристиками субгармоник триадного резонанса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
2. Noir J. et al. Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere at low Ekman number // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2001. – V.437. – P. 283–299.
3. Morize C. et al. Experimental determination of zonal winds driven by tides // *Physical Review Letters*. – 2010. – V. 104. – P. 214501.
4. Comstock R.L., Bills B.G. A solar system survey of forced librations in longitude // *Journal of Geophysical Research Atmospheres*. – 2003. – V.108 – № E9.
5. Margot J.L. et al. Large longitude libration of Mercury reveals a molten core // *Science*. – 2007. – V. 316. – P. 710–714.
6. Busse F.H. Mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2010. – V. 650. –P. 505–512.
7. Le Bars M., Cébron D., Le Gal P. Flows driven by libration, precession, and tides // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 2015. – V. 47. – P. 163–193.
8. Maas L.R.M. et al. Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // *Nature*. – 1997. – V. 388. – P. 557–561.
9. Maas L.R.M. Wave attractors: linear yet nonlinear // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. – 2005. – V. 15. – №. 9. – P. 2757–2782.
10. Sibgatullin I. N., Ermanyuk E. V. Internal and inertial wave attractors: A review // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2019. – V. 60. – P. 284–302.
11. Rieutord M., Valdettaro L. Inertial waves in a rotating spherical shell // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1997. – V. 341. – P. 77–99.
12. Rieutord M., Valdettaro M. Axisymmetric inertial modes in a spherical shell at low Ekman numbers // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2018. – V. 844. – P. 597–634.

13. Requier J. et al. Inertial modes in near-spherical geometries // *Geophysical Journal International*. – 2018. – V. 216. – №. 2. – P. 777–793.
14. Sauret A. et al. Fluid flows in a librating cylinder // *Physics of Fluids*. – 2012. – V. 24. P. 026603.
15. Subbotin S.V., Dyakova V.V. Inertial waves and steady flows in a liquid filled librating cylinder // *Microgravity Science and Technology*. – 2018. – V. 30. – P. 383–392.
16. Subbotin S. Steady circulation induced by inertial modes in a librating cylinder // *Physical Review Fluids*. – 2020. – V. 5. – P. 014804.
17. Maas L.R.M. Wave focusing and ensuing mean flow due to symmetry breaking in rotating fluids // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2001. – V. 437. – P. 13–28.
18. Manders A.M.M., Maas L.R.M. Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2003. – V. 493. – P. 59–88.
19. Thielicke W., Stamhuis E.J. PIVlab – Towards User-friendly, Affordable and Accurate Digital Particle Image Velocimetry in MATLAB. // *Journal of Open Research Software*. – 2014. – V. 2. – P. e30.
20. Ширяева М.А., Субботин С.В. Лучевая модель визуализации инерционных волн в неравномерно вращающемся цилиндре // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022611161; заявл. 24.12.2021, опублик. 20.01.2022.
21. Субботин С.В., Ширяева М.А. Экспериментальное исследование линейного и нелинейного режимов аттракторов инерционных волн во вращающемся цилиндре с неосесимметричными торцами // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2023. – Т. 64. – №. 2. – С. 85–94.
22. Subbotin S., Shiryaeva M. Steady vortex flow induced by inertial wave attractor in a librating cylinder with sloping ends // *Microgravity Science and Technology*. – 2022. – V. 34. – №. 89.

23. Subbotin S., Shiryayeva M. Inertial wave beam path in a non-uniformly rotating cylinder with sloping ends // *Microgravity Science and Technology*. – 2023. – V. 35. – №. 32.
24. Shiryayeva M.A., Subbotin S.V., Subbotina M.S. Linear and non-linear dynamics of inertial waves in a rotating cylinder with antiparallel inclined ends // *Fluid Dynamics and Materials Processing*. – 2024. V.20. – №. 4. – P. 787-802.
25. Ширяева М.А., Субботин С.В. Модель трассировки инерционных волн во вращающемся сферическом слое // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ гос. регистрация progr. для ЭВМ № 2021666143; заявл. 4.10.2021; опубли. 8.10.2021.
26. Субботин С.В., Ширяева М.А. Неосесимметричное течение, возбуждаемое колебаниями жидкости во вращающемся цилиндре с наклонными торцами // *Конвективные течения...* – 2019. – № 9. – С. 152–166.
27. Субботин С.В., Ширяева М.А. Аттракторы инерционных волн в неравномерно вращающемся цилиндре с наклонными торцами // *Конвективные течения...* – 2021. – № 10. – С. 101–117.
28. Субботин С.В., Ширяева М.А. О влиянии геометрии полости на режимы фокусировки инерционных волн // *Конвективные течения...* – 2023. – № 11. – С. 59–76.
29. Субботин С.В., Ширяева М.А. Инерционные волны и осредненные течения во вращающемся цилиндре с наклонными торцами // Сборник статей по материалам Международного симпозиума «Неравновесные процессы в сплошных средах». – 2021. – С. 180–185.
30. Ширяева М.А., Субботин С.В. Экспериментальное исследование нелинейных режимов аттракторов инерционных волн во вращающемся цилиндре с неосесимметричными торцами // Пермские гидродинамические научные чтения сборник статей по материалам VIII Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова. – 2022. – С. 524–529

31. Ширяева М.А., Субботин С.В. Резонансные режимы инерционных волн во вращающемся цилиндре с наклонными торцами при либрациях // Пермские гидродинамические научные чтения сборник статей по материалам IX Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова. – 2023. – С. 463–467.
32. Субботин С.В., Ширяева М.А. Неосесимметричное течение, возбуждаемое колебаниями жидкости во вращающемся цилиндре с наклонными торцами // Сборник тезисов докладов VII Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения». – 2020. – С. 242–243.
33. Субботин С.В., Ширяева М.А. Исследование структуры течения в неравномерно вращающемся цилиндре с наклонными торцами // Сборник тезисов докладов XXII Зимняя школа по механике сплошных сред. Ответственный редактор: Н.А. Юрлова. – 2021. – С. 313.
34. Субботин С.В., Ширяева М.А. Эффекты фокусировки инерционных волн во вращающемся цилиндре с наклонными торцами // Сборник тезисов докладов XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике. В 4 томах. – 2023. – С. 685–687.
35. Ширяева М.А., Субботин С.В. Экспериментальное исследование осреднённой циркуляции, возбуждаемой аттрактором инерционных волн во вращающемся цилиндре // Сборник тезисов докладов XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред. Ответственный редактор: Н.А. Юрлова. – 2023. – С. 375.
36. Messio L. et al. Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid // Experiments in Fluids. – 2008. – V. 44. – №. 4. – P. 519–528.
37. Aldridge K. D., Toomre A. Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container // Journal of Fluid Mechanics. – 1969. – V. 37. – P. 307–323.

38. Rieutord M., Georgeot B., Valdettaro L. Wave attractors in rotating fluids: A paradigm for ill-posed Cauchy problems // *Physical Review Letters*. – 2000. – V. 85. – P. 4277–4280.
39. Boisson J. et al. Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube // *Physics of Fluids*. – 2012. – V. 24. – № 7. – P. 076602.
40. Borcia I.D., Abouzar G.V., Harlander U.: Inertial wave mode excitation in a rotating annulus with partially librating boundaries // *Fluid Dynamics Research*. – 2014. – V. 46. – №. 4. – P. 041423.
41. Pillet G., Maas L.R.M., Dauxois T. Internal wave attractors in 3D geometries: A dynamical systems approach // *European Journal of Mechanics/B Fluids*. J. – 2019. – V. 77. – P. 1–16.
42. Rieutord M., Georgeot B., Valdettaro L. Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2001. – V. 435. – P. 103–144.
43. He J. et al. Internal shear layers in librating spherical shells: the case of periodic characteristic paths // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2022. –V. 939. –№. A3.
44. Phillips O.M. Energy transfer in rotating fluids by refraction of inertial waves // *Physics of Fluids*. – 1963. – V. 6. – P. 513–520.
45. Rabitti A., Maas L.R.M. Meridional trapping and zonal propagation of inertial waves in a rotating fluid shell // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2013. – V. 729. – P. 445–470.
46. Dintrans B., Rieutord M., Valdettaro L. Gravito-inertial waves in a rotating stratified sphere or spherical shell // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1999. – V. 398. – P. 271–297.
47. Favier B., Le Dizès S. Inertial wave super-attractor in a truncated elliptic cone // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2024. – V. 980. – №. A6.
48. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. Librational forcing of a rapidly rotating fluid-filled cube // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2018. – V. 842. – P. 469–494.

49. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. Reflections and focusing of inertial waves in a librating cube with the rotation axis oblique to its faces // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2020. – V. 896. – №. A5.
50. Wu K., Welfert B.D., Lopez J.M. Reflections and focusing of inertial waves in a tilted librating cube // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2022. – V. 947. – №. A10.
51. Meunier P. Geoinspired soft mixers // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2020. – V. 903. – №. A15.
52. Yamagata T., Sugisawa H., Fujisawa N. Experimental study on laminar mixing in planetary mixer // *Experiments in Fluids*. – 2021. – V. 62. – №. 28.
53. Gao F., Chew J.W., Marxen O. Inertial waves in turbine rim seal flows // *Physical Review Fluids*. – 2020. – V. 5. – №. 2. – P. 024802.
54. Fernandez J. et al. The CFVib experiment: control of fluids in microgravity with vibrations // *Microgravity Science and Technology*. – 2017. – V. 29. – P. 351–364.
55. Troitiño M. et al. Symmetry breaking in large columnar frozen wave patterns in weightlessness // *Microgravity Science and Technology*. – 2020. – V. 32. – P. 907–919.
56. Kawaji M. et al. The Effects of forced vibration on the Motion of a large bubble under microgravity // *Microgravity Science and Technology*. – 2021. – V. 33. – №. 62.
57. Perminov A.V., Nikulina S.A., Lyubimova T.P. Analysis of thermovibrational convection modes in square cavity under microgravity conditions // *Microgravity Science and Technology*. – 2022. – V. 34. – №. 34.
58. Lopez J., Marques F. Instabilities and inertial waves generated in a librating cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2011. – V. 687. – P. 171–193.
59. Sauret A., Cébron D., Le Bars M. Spontaneous generation of inertial waves from boundary turbulence in a librating sphere // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2013. – V. 728. – №. R5.

60. Noir J. et al. An experimental and numerical study of librational flow in planetary cores and subsurface oceans // *Physics of Earth Planetary Interiors*. – 2009. – V. 173. – P. 141–152.
61. Noir J. et al. Experimental study of libration-driven zonal flows in a straight cylinder // *Physics of Earth Planetary Interiors*. – 2010. – V. 182. – P. 98-106.
62. Ghasemi A. V. et al. Mean flow generation by Görtler vortices in a rotating annulus with librating side walls // *Physics of Fluids*. – 2016. – V. 28. – №. 5. – P. 056603.
63. McEwan A.D. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1970. – V. 40. – P. 603–640.
64. Kerswell R. R. Secondary instabilities in rapidly rotating fluids: inertial wave breakdown // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1999. – V. 382. – P. 283–306.
65. Lagrange R. et al. Instability of a fluid inside a precessing cylinder // *Physics of Fluids*. – 2008. – V. 20. – P. 081701.
66. Lagrange R. et al. Precessional instability of a fluid cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2011. – V. 666. – P. 104–145.
67. Albrecht T., et al. Triadic resonances in precessing rapidly rotating cylinder flows // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2015. – V. 778. – № R1.
68. Lopez J., Marques F. Rapidly rotating precessing cylinder flows: forced triadic resonances // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2018. – V. 839. – P. 239–270.
69. Brunet M., Dauxois T., Cortet P.-P. Linear and nonlinear regimes of an inertial wave attractor // *Physics Review Fluids*. – 2019. – V. 4. – P. 034801.
70. Boury S. et al. Vortex cluster arising from an axisymmetric inertial wave attractor // *Fluid Dynamics*. – 2021. – V. 926. – №. A12.
71. Subbotin S. et al. Nonlinear regimes of inertial wave attractors generated by a precessing lid: Zonal flows and Rossby waves // *Physics of Fluids*. – 2023. – V. 35. – P. 074110.
72. Xu W., Harlander U. Inertial mode interactions in a rotating tilted cylindrical annulus with free surface // *Physical Review Fluids*. – 2020. – V. 5. – P. 094801.

73. Kolokolov I. V., Ogorodnikov L. L., Vergeles S. S. Structure of coherent columnar vortices in three-dimensional rotating turbulent flow // *Physics Review Fluids*. – 2020. – V. 5. – №. 3. – P. 034604.
74. Karpunin I., Kozlov N. Dynamics of two-liquid System at Rotation and vibration with equal frequencies // *Microgravity Science and Technology*. – 2020. – V. 32. – P. 973–982.
75. Kozlov V., Rysin K., Vjatkin A. Thermal vibrational convection in a rotating plane layer // *Microgravity Science and Technology*. – 2022. – V. 34. – №. 62.
76. Kozlov V.G., Ivanova A.A. Dramatic effect of vibrations on dynamics of rotating hydrodynamic systems // *Microgravity Science and Technology*. – 2009. – V. 21. – P. 339–348.
77. Vjatkin A., Siraev R., Kozlov V. Theoretical and experimental study of thermal convection in rotating horizontal annulus // *Microgravity Science and Technology*. – 2020. – V. 32. – P. 1133–1145.
78. Kozlov, V.G. et al. Vibrational convection of heat-generating fluid in a rotating horizontal cylinder. The role of relative cavity length // *Acta Astronautica*. – 2015. – V. 112. – P. 48–55.
79. Smorodin B.L., Myznikova B.I., Keller I.O. Asymptotic laws of thermovibrational convection in a horizontal fluid layer // *Microgravity Science and Technology*. – 2017. – V. 29. – P. 19–28.
80. Ivanova A. A. et al. The concept of a vibrational cell for studying the interface chemical kinetics. vibrational flow structure // *Fluid Dynamics and Materials Processing*. – 2008. – V. 4. – №. 3. –P. 211–220.
81. Kozlov V., Polezhaev D. Flow patterns in a rotating horizontal cylinder partially filled with liquid // *Physical Review E*. – 2015. – V. 92. – №. 1. – P. 013016.
82. Watson P., Bonnieu S.V., Lappa M. Fluidization and transport of vibrated granular matter: A review of landmark and recent contributions // *Fluid Dynamics and Materials Processing*. – 2024. – V. 20. – P. 1–29.

83. Sauret A. et al. Experimental and numerical study of mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2010. – V. 662. – P. 260–268.
84. Calkins M.A. et al. Axisymmetric simulations of libration-driven fluid dynamics in a spherical shell geometry // *Physics of Fluids*. – 2010. – V. 22. – P. 086602.
85. Sauret A., Le Dizès S. Libration-induced mean flow in a spherical shell // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2013. – V. 718. – P. 181–209.
86. Kozlov V.G., Subbotin S.V. Librations induced zonal flow and differential rotation of free inner core in rotating spherical cavity // *Physics of Fluids*. – 2017. – V. 29. – P. 096601.
87. Wang C.Y. Cylindrical tank of fluid oscillating about a steady rotation // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1970. – V. 41. – №. 3. – P. 581–592.
88. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics* – Springer New York, 1987. 710 pp.
89. Rabitti A., Maas L.R.M. Inertial wave rays in rotating spherical fluid domains // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2014. – V. 758. – P. 621–654.
90. Klein M. et al. Inertial wave excitation and focusing in a liquid bounded by a frustum and a cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2014. – V. 751. – P. 255–297.
91. Wu K., Welfert B.D., Lopez J. M. Inertial wave attractors in librating cuboids // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2023. – V. 973. – №. A20.
92. Kerswell R. R. On the internal shear layers spawned by the critical regions in oscillatory Ekman boundary layers // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1995. – V. 298. – P. 311–325.
93. Lin Y., Noir J. Libration-driven inertial waves and mean zonal flows in spherical shells // *Geophysical Astrophysical Fluid Dynamics*. – 2021. – V. 115. – №. 3. – P. 258–279.
94. Subbotin S., Shiryayeva M. On the linear and non-linear fluid response to the circular forcing in a rotating spherical shell // *Physics of Fluids*. – 2021. – V. 33. – P. 066603.

95. Favier B. et al. Nonlinear evolution of tidally forced inertial waves in rotating fluid bodies // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2014. – V. 439. – №. 1. – P. 845–860.
96. Subbotin S. Non-axisymmetric flow excited by fluid oscillations in a rotating cylinder with sloping ends // *Journal of Physics Conference Series*. – 2021. – V. 1809. – P. 012015.
97. Ryazanov D.A. et al. Biharmonic attractors of internal gravity waves // *Fluid Dynamics*. – 2021. – V. 56. – P. 403–412.
98. Pillet G. et al. Internal wave attractors in three-dimensional geometries: trapping by oblique refraction // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2018. – V. 845. – P. 203–225.
99. Wang J. et al. Three-dimensional evolution of internal waves reflected from a submarine seamount // *Physics of Fluids*. – 2017. – V. 29. – P. 106601.
100. Busse F.H. Zonal flow induced by longitudinal librations of a rotating cylindrical cavity // *Physica D Nonlinear Phenomena*. – 2011. – V. 240. – №. 2. – P. 208–211.
101. Sibgatullin I. et al. On $(n,1)$ Wave Attractors: Coordinates and Saturation Time // *Symmetry*. – 2022. – V. 14. – P. 319.
102. Subbotin S. et al. Stewartson layer instability and triadic resonances in rotating sphere with oscillating inner core // *Physics of Fluids*. – 2022 – V. 34. – P. 064103.
103. Flandrin P. Time-frequency/time-scale analysis. – Academic press, 1999. 386 pp.
104. Scolan H., Ermanyuk E., Dauxois T. Nonlinear fate of internal waves attractors // *Physical Review Letters*. – 2013. – V. 110. – P. 234501.
105. Brouzet C. et al. Internal wave attractors: different scenarios of instability // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2017. – V. 811. – P. 544–568.
106. Monsalve E. et al. Quantitative experimental observation of weak inertial-wave turbulence // *Physical Review Letters*. – 2020. – V. 125. – P. 254502.
107. Lin Y., Noir J., Jackson A. Experimental study of fluid flows in a precessing cylindrical annulus // *Physics of Fluids*. – 2014. – V. 26. – P. 046604.

108. Marques F., Lopez J.M. Precession of a rapidly rotating cylinder flow: traverse through resonance // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2015. – V. 782. – P. 63–98.
109. Mercier M.J., Garnier N.B., Dauxois T. Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform // *Physics of Fluids*. – 2008. – V. 20. – P. 086601.