

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук, профессора Вахрушева Александра Васильевича  
на диссертационную работу Кузнецовой Юлии Сергеевны  
**«Метод геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно  
и его численная реализация»**,  
представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертационная работа на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Ю.С. Кузнецовой **«Метод геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно и его численная реализация»** посвящена проблеме расчетов тел сложной конфигурации с использованием вариационной постановки на основе принципа Кастильяно.

**Актуальность** исследования вытекает из высокой сложности и трудоемкости расчетов задач теории упругости в напряжениях. Известные подходы, в частности метод конечных элементов на основе вариационного принципа Кастильяно, применяется только при расчете тел, представляющих собой канонические по форме области. Это накладывает ограничения на его применение в вычислительных экспериментах и анализе напряженного состояния достаточно сложных, имеющих практическое назначение узлов и конструкций. В диссертационной работе предлагается совместное использование метода конечных элементов в напряжениях и метода, позволяющего привести краевую задачу теории упругости, сформулированную на сложной области, к задаче на канонической области. Это позволит эффективно использовать имеющиеся наработки конечно-элементных подходов в напряжениях. Разработанный подход к решению указанной задачи позволит с большей точностью определять напряженное состояние тел, имеющих границы сложной формы, и выполнять прочностной расчет конструкций из слабосжимаемых или несжимаемых материалов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 130 наименований. Общий объем работы – 112 страниц машинописного текста, содержащего 47 иллюстраций и 2 таблицы.

Представленный **в первой главе** обзор направлен на анализ современного состояния проблемы развития численных методов для решения краевых задач теории упругости. Особое внимание уделяется методу конечных элементов на основе вариационного принципа Кастильяно, численным подходам, позволяющим привести краевую задачу теории упругости для тел сложной формы к задаче на канонической области. Отмечается несомненная важность численных формулировок, основанных на вариационном принципе Кастильяно. Преимущества таких подходов заключаются в определении более точного напряженного состоя-

ния рассматриваемых расчетных конструкций, возможностью решения задач с несжимаемыми или слабосжимаемыми материалами. Согласно рассмотренным литературным источникам по тематике исследования, определена **цель** диссертационной работы – обобщение метода геометрического погружения на класс задач теории упругости в напряжениях и разработка численного алгоритма реализации на основе вариационного принципа Кастильяно. Сформулированы соответствующие данной цели задачи исследования.

Во **второй главе** рассмотрены вопросы теоретического обоснования метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно. Представлена поставка краевой задачи линейной теории упругости в напряжениях, рассмотрен функционал дополнительной работы упругого тела. Для получения вариационного уравнения метода геометрического погружения (МГП) введены необходимые пространства и нормы, описана каноническая область; представлена соответствующая вариационному уравнению метода геометрического погружения дифференциальная формулировка задачи на канонической области. Приведен процесс построения итерационной процедуры МГП в напряжениях, сформулирована и доказана теорема о сходимости этой процедуры в терминах элементов введенных пространств тензоров напряжений.

В **третьей главе** рассмотрены вопросы построения дискретного аналога вариационного уравнения МГП в напряжениях с использованием метода Ритца и методом конечных элементов. В качестве конечного элемента выбран прямоугольный конечный элемент с эрмитовой аппроксимацией функции напряжения Эри. Подробно описан вывод конечно-элементных соотношений, особое внимание уделено учету статических граничных условий, которые являются главными в рассматриваемой постановке. Также рассмотрены вопросы решения системы алгебраических уравнений. В качестве практического применения метода геометрического погружения приведен расчет напряженного состояния плоского резинометаллического амортизатора.

В **четвертой главе** представлены результаты решения ряда осесимметричных задач теории упругости методом геометрического погружения в напряжениях. Показано эффективное использование прямоугольного конечного элемента, внутри которого введены аппроксимации компонент тензора напряжений, заведомо удовлетворяющие уравнениям равновесия в цилиндрической системе координат. Это упрощает учет главных граничных условий. В качестве практического приложения разработанного подхода приведены иллюстративные расчеты напряженного состояния двух осесимметричных резинометаллических амортизаторов, на примере которых в полной мере раскрывается принципиальная возможность анализа тел из несжимаемых и слабосжимаемых материалов.

Приведенный в диссертации **список литературы** содержит 130 отечественных и зарубежных источников, достаточно полно освещает изучаемую проблему.

**Научная новизна** диссертационной работы состоит:

- 1) В обобщении метода геометрического погружения на класс краевых задач теории упругости в напряжениях, позволяющего свести отыскание обобщенного решения задачи в области произвольной конфигурации к итерационной последовательности задач в области канонической форме.
- 2) Формулировке основополагающего вариационного уравнения МГП, получении соответствующей дифференциальной формулировки краевой задачи на канонической области.
- 3) В исследовании практической сходимости предложенного метода.
- 4) В получении новых результатов расчета напряженного состояния тел сложной конфигурации, в том числе конструкций из несжимаемых или слабосжимаемых упругих материалов.

**Теоретическая значимость** диссертации включает процесс построения вариационно-итерационной процедуры МГП в напряжениях, установление вида дифференциальной формулировки краевой задачи теории упругости в напряжениях в канонической области, соответствующий вариационному уравнению МГП в напряжениях, формулирование и доказательство теорема о ее сходимости,

**Практическая значимость** работы состоит в разработанных алгоритмах и программах, реализующих МГП в напряжениях, для анализа напряженного состояния реальных деталей и элементов конструкций.

**Достоверность** результатов обеспечивается сравнением с известными аналитическими решениями других авторов, численными решениями, полученными другими численными методами, практическим подтверждением сходимости численных процедур и выполнения естественных граничных условий.

**Методология и методы диссертационного исследования** основаны на использовании методов функционального анализа, теории упругости, вычислительной механики деформируемого твердого тела. Применена программная среда MATLAB.

Материалы диссертационного исследования **опубликованы** в 11 печатных работах, из них 2 статьи в ведущих рецензируемых научных изданиях из Перечне ВАК, 1 статья входит в международную базу цитирования Web of Science.

Материалы, изложенные в **автореферате**, полностью отражают основные положения диссертационной работы, содержат все необходимые разделы.

Вместе с тем, при анализе представленной диссертационной работы возник ряд вопросов и замечаний:

1. Сравнение результатов расчетов полей напряжений МКЭ и МГП (рис.3.3-3.5;4.4-4.6) следовало выполнять по разности соответствующих компонентов тензоров напряжений или инвариантов тензоров. При этом области расхождения результатов расчетов разными методами проявляются более четко.
2. Не указаны ограничения на соотношения сторон прямоугольных конечных элементов. Какое их максимальное соотношение допускается?
3. Результаты расчетов амортизаторов приведены для условий статического нагружения. Однако эти элементы должны работать и при динамическом нагружении. В каких пределах можно использовать результаты расчетов МГП?

Приведенные замечания и вопросы не снижают общей высокой оценки работы и могут рассматриваться как рекомендации для дальнейшего развития темы исследований.

В целом, подводя итог анализа работы, следует отметить, что диссертационная работа Ю.С. Кузнецовой «**Метод геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно и его численная реализация**» представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела», является законченной научно-квалификационной работой, по содержанию, новизне, объему выполненных исследований, научной и практической значимости результатов полностью соответствует требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 г. №842, к кандидатским диссертациям (п.9), а ее автор, **Кузнецова Юлия Сергеевна**, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

#### **Сведения об оппоненте:**

Вахрушев Александр Васильевич,

доктор физико-математических наук, специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела, профессор

Место работы: ФГБУН «Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук», Институт механики, лаборатория механики наноструктур

Должность: главный научный сотрудник

**Контактные адреса:**

Телефон: +7(341)2214583;

e-mail: vakhrushev-a@yandex.ru


Почтовый адрес: 426067, Удмуртская Республика, г. Ижевск, ул. Татьяны Барамзиной, д. 34

Д-р. физ.-мат. наук, профессор

Вахрушев Александр Васильевич

17 мая 2018г.

«Я, Вахрушев Александр Васильевич, даю согласие на включение своих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и их дальнейшую обработку».



/Вахрушев Александр Васильевич

Подпись А.В. Вахрушева заверяю:

Начальник отдела кадров



/ В.В. Гуливер/