

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук, профессора Шешенина Сергея Владимировича  
на диссертационную работу Кузнецовой Юлии Сергеевны  
**«Метод геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно  
и его численная реализация»,**  
представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**Актуальность темы.** Тема диссертационной работы «Метод геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно и его численная реализация» соответствует формуле специальности 01.02.04, представленной в паспорте ВАК Российской Федерации. Область исследований данной работы определяется в достаточной мере тремя основными направлениями, представленными в паспорте специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела: «Теория упругости, пластичности и ползучести», «Постановка и решение краевых задач для тел различной конфигурации и структуры при механических, электромагнитных, радиационных, тепловых и прочих воздействиях, в том числе применительно к объектам новой техники» и «Математические модели и численные методы анализа применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического исследования».

Актуальность темы диссертационной работы обусловлена следующим:

- разработкой численного метода, позволяющего решать задачи теории упругости в напряжениях, сформулированные на областях сложной конфигурации;
- возможностью получения непосредственно полей напряжений, решения задач для несжимаемых и слабосжимаемых материалов.

**Целью исследования** является обобщение метода геометрического погружения на класс задач теории упругости в напряжениях и разработка численного алгоритма реализации на основе вариационного принципа Кастильяно. В соответствии с этим автор формулирует последовательность задач, решение которых позволило достичь поставленную цель.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 130 наименований. Общий объем работы – 112 страниц машинописного текста, содержащего 47 иллюстраций и 2 таблицы.

**В введении** обосновывается актуальность темы диссертационного исследования. В этом разделе формулируются цели и задачи, решение которых обеспечит достижение поставленных целей. Перечислены результаты, научная новизна и практическая значимость диссертационного исследования. Представлены положения и результаты, выносимые на защиту, описана структура диссертации, кратко изложено содержание четырех глав, приведены сведения об апробации работы и публикациях по теме диссертации.

**В Главе 1** приведен анализ научных публикаций по проблеме развития приближенных и численных методов для решения краевых задач теории упругости. Уделено внимание развитию классических методов теории упругости, подходам, основанным на вариационном принципе Кастильяно, приведен обзор численных процедур, позволяющих свести краевую задачу теории упругости для тел сложной формы к задачам на канонических областях. На основе анализа научных публикаций.

*Замечание:*

Хотя приведенный обзор литературы вполне достаточен, можно, тем не менее, для сведения автора указать следующие работы, которые соответствуют рассматриваемой теме и не упомянуты в списке литературы:

1. Коновалов А.Н. Решение задача теории упругости в напряжениях. Новосибирск, издательство НГУ, 1979, 92 с.

2. Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Е. Задача в напряжениях. Издательство ФАН, 1988, 198 с.

3. Ostoja-Starzewski, M. (2018). Ignaczak equation of elastodynamics. Mathematics and Mechanics of Solids. DOI: 10.1177/1081286518757284

В последней статье, носящей обзорный характер, представлены идеи и результаты, касающиеся формулировки в напряжениях динамических задач теории упругости. В работах А.Н. Коновалова идея Игначака была применена и для решения статических задач упругости. Конечно, в приведенных работах, имеются ссылки на другие работы упомянутых и других авторов.

В **Главе 2** предложено обобщение метода геометрического погружения на краевые задачи теории упругости в напряжениях. Описана процедура сведения краевой задачи теории упругости в напряжениях, сформулированной в области произвольной конфигурации, к итерационной последовательности краевых задач на канонической области. Приводится вариационное уравнение МГП, эквивалентная ему дифференциальная постановка, сформулированная на канонической области. Для решения вариационного уравнения предлагается использование итерационной процедуры, для которой доказывается теорема о сходимости.

*Замечания:*

1. В диссертации написано, что перемещения принадлежат пространству  $H^3$ , напряжения –  $H^2$ . Не являются ли эти требования гладкости ограничительными для рассмотрения задач с разрывными напряжениями?

2. На стр. 28 сказано, что вариационное уравнение (2.14) имеет единственное решение согласно теореме Лакса - Мильграма. У рецензента возник вопрос, где в работе проверено выполнение условий этой теоремы.

В **Главе 3** показано применение метода геометрического погружения в напряжениях для решения плоских задач теории упругости в декартовой системе координат. Выполнено построение дискретного аналога вариационного уравнения МГП методом Ритца и методом конечных элементов в напряжениях. Для конечно-элементной реализации используется элемент прямоугольной формы, пригодного для решения плоских задач теории упругости в канонических по форме областях, что как раз и необходимо для процедуры погружения. Так же в качестве практического приложения разработанного подхода приводится пример расчета резинометаллического амортизатора.

*Замечание:*

1. Было бы полезным продемонстрировать результативность сочетания метода погружения и постановки в напряжениях на примере трехмерной задачи.

В **Главе 4** показано применение метода геометрического погружения в напряжениях для решения осесимметричных задач теории упругости в цилиндрической системе координат. Логическая структура этой главы в точности соответствует структуре третьей главы.

*Замечание:*

1. Относительно задач глав три и четыре хочется отметить, что было бы интересно рассмотреть большие по размеру сетки и указать время решения разными подходами.

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы.

По мнению оппонента, **научная новизна** работы заключается в следующем:

1. Проведено обобщение метода геометрического погружения на класс краевых задач теории упругости в напряжениях, позволяющего свести отыскание обобщенного решения задачи в области произвольной конфигурации к итерационной последовательности задач в области канонической формы. Предложен процесс построения вариационно-итерационной процедуры МГП в напряжениях, сформулирована и доказана теорема сходимости.

2. Установлен вид дифференциальной формулировки краевой задачи теории упругости в напряжениях в канонической области, соответствующий вариационному уравнению МГП в напряжениях.

3. Предложен и реализован в виде программ в среде MatLab алгоритм построения дискретного аналога вариационного уравнения МГП на основе метода конечных элементов в напряжениях. Изучены характеристики практической сходимости дискретного аналога МГП и итерационной процедуры МГП на примере решения двумерных (плоских и осесимметричных) задач теории упругости в напряжениях.

**Теоретическая значимость** работы состоит в создании теоретических основ метода геометрического погружения в напряжениях, позволяющего свести отыскание обобщенного решения задачи в области произвольной конфигурации к итерационной последовательности задач в области канонической формы. **Практическая значимость** работы состоит в разработанных алгоритмах и программах, реализующих МГП в напряжениях, возможности их применения для анализа напряженного состояния тел сложной конфигурации, в том числе конструкций из несжимаемых или слабосжимаемых упругих материалов.

**Достоверность результатов** обеспечивается сравнением с известными аналитическими решениями других авторов, численными решениями, полученными другими численными методами, практическим подтверждением сходимости численных процедур и выполнения естественных граничных условий.

**Диссертация написана ясным языком**, с использованием принятой терминологии.

**Содержание диссертации** в достаточной степени отражено в публикациях автора, было представлено на научных конференциях и известно научной общественности, а ее основные положения изложены в автореферате. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, из них 2 статьи в ведущих рецензируемых научных изданиях, присутствующих в Перечне ВАК, 1 статья включена в международную базу цитирования Web of Science.

**Автореферат диссертации** соответствует ее содержанию.

По диссертации в целом имеются **замечание и пожелание:**

1. Может, следовало бы проверить эффективность подхода на трехмерных задачах.

2. Реальные задачи, решаемые при численном моделировании, в настоящее время все чаще являются нелинейными. При этом возникнет двухступенчатый итерационный процесс, эффективность которого кажется более важной, чем эффективность решения линейной задачи. Дальнейшее исследование в этом направлении было бы целесообразным по мнению оппонента.

### **Заключение**

Диссертация Кузнецовой Юлии Сергеевны является законченной научно-квалификационной работой в области вычислительной механики. На основе результатов, полученных при решении двумерных задач теории упругости методом геометрического погружения, основанного на вариационном принципе Кастильяно, разработанный подход можно рекомендовать для анализа трехмерных конструкций произвольной пространственной конфигурации. Так же описанную в работе методику можно эффективно использовать для расчетов резинометаллических конструкций, изделий из анизотропных, слабосжимаемых или несжимаемых материалов.

Диссертация Ю.С. Кузнецовой отвечает требованиям п. 7 Положения Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации, предъявляемым к диссертациям на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела, а ее автор, Кузнецова Юлия Сергеевна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по названной специальности.

### **Сведения об оппоненте:**

Шешенин Сергей Владимирович,

доктор физико-математических наук, специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела, профессор

Место работы: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», кафедра «Теория пластичности»

Должность: профессор

### **Контактные адреса:**

Телефон: +7(495)9393614;

e-mail: sheshenin@mech.math.msu.su

Почтовый адрес: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1

Д-р физ.-мат. наук, профессор  
17 мая 2018г.

С.В. Шешенин

«Я, С.В. Шешенин, даю согласие на включение своих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и их дальнейшую обработку».

С.В. Шешенин

Подпись С.В. Шешенина заверяю.

