

СЫКТЫВКАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



Андрюкова Вероника Юрьевна

НЕЛИНЕЙНЫЕ И КОНСТРУКТИВНО - НЕЛИНЕЙНЫЕ
ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ
УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого
твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
к. ф. - м. н., доц.
В. Н. Тарасов

Сыктывкар 2018

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Современное состояние исследований	9
Глава 2. Устойчивость упругих систем с неудерживающими связями и условная положительная определенность квадратичных форм на конусах	11
Глава 3. Устойчивость упругих систем с односторонними связями	16
3.1. Устойчивость сжимаемых продольной силой стержней при односторонних ограничениях на перемещения	20
3.2. Устойчивость стержня при жестких ограничениях на перемещения с граничными условиями свободного края	26
3.3. Об устойчивости кругового кольца, сжимаемого равномерно распределенными центральными силами, при наличии односторонних ограничений на перемещения	30
3.3.1. Аналитическое решение задач устойчивости кольца с односторонним подкреплением в случае центральных сил	37
3.3.2. Случай внешнего нормального давления	44
3.3.3. Задача устойчивости кругового кольца, подкрепленного нитями, расположенными по сторонам правильного m -угольника	50
3.4. Устойчивость прямоугольных пластин при односторонних ограничениях на перемещения	57
3.5. Устойчивость оболочек вращения	62
3.5.1. Устойчивость торообразной оболочки	64
3.5.2. Устойчивость сферической оболочки	71
Глава 4. Линейные и нелинейные колебания прямоугольных пластин ..	74
Заключение	84
Список литературы	85

Введение

Актуальность и степень разработанности темы

Исследование устойчивости упругих систем берет свое начало с работ Эйлера по теории продольного изгиба. Проблемы упругой устойчивости исследовались многими авторами, например, Б. Будянским, И.И. Воровичем, А.Л. Гольденвейзером, Э.И. Григолюком, В.В. Новожиловым, А.В. Погореловым, Е.П. Поповым, С.П. Тимошенко, Г. Циглером. Общая концепция упругой бифуркационной устойчивости изложена в монографии В.В. Новожилова. В связи со стремительным развитием вычислительной техники и появлением универсальных численных алгоритмов решения краевых задач (метод граничных элементов, метод конечных элементов) к настоящему времени появились комплексы программ, позволяющие рассчитывать упругие конструкции на устойчивость, к примеру, разработанные А.В. Перельмутером и В.И. Сливкером.

В общем случае проблемы упругой устойчивости сводятся к нахождению точек бифуркации некоторых нелинейных уравнений.

Исследованию контактных задач для гибких элементов конструкций посвящено большое количество работ, например, диссертация Ю.П. Артюхина, его исследования в соавторстве с С.Н. Карасевым по теории пластин и оболочек, К. Байоки совместно с А. Капело в работе "Вариационные и квазивариационные неравенства". Решение вариационных неравенств в механике рассмотрено в одноименной книге группой авторов:

И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. Численно исследовали вариационные неравенства Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тримольер, П. Панагиотопулоса.

Одной из важных проблем является задача изучения влияния односторонних связей на устойчивость упругой конструкции. Наличие таких связей приводит к появлению неравенств, которым должны удовлетворять перемещения. Анализ упругих систем на устойчивость при наличии односторонних (неудерживающих) связей сводится к определению параметров, при которых задача оптимизации имеет неединственное решение. Общий подход и методы решения за-

дач устойчивости упругих систем при наличии односторонних связей изложены в монографии В.Н. Тарасова, а также в его работах в соавторстве с Д.В. Холмогоровым. Во многих случаях системы, ограниченные односторонними связями, сводятся к идентификации условной положительности квадратичных форм на конусах. Алгебраический критерий условной положительности в самом важном случае, когда конус есть неотрицательный ортант в R^n , предложен в работах В.Л. Крепса и Л.Б. Рапопорта.

Общая характеристика диссертационной работы

Целью диссертационной работы и задачей исследования является исследование задач устойчивости упругих систем с односторонними ограничениями на перемещения и влияние односторонних связей на значение критической нагрузки.

Актуальность исследования

Проблемы упругой устойчивости находятся в центре внимания механики тонкостенных конструкций. В связи широким использованием в машиностроении, механики строительных конструкций и элементов с неизвестной областью контакта актуальной является задача расчета на прочность и устойчивость таких систем. Также актуальной является задача нахождения все более точных методов расчета на устойчивость оболочек вращения.

Научная новизна

Все результаты, полученные в работе, являются новыми. Ряд постановок задач устойчивости равновесия связаны с вариационными формулировками, которые важны как для теоретических, так численных исследований. Рассматриваемые проблемы относятся к контактным задачам теории упругости с неизвестной областью активного взаимодействия элементов конструкции. Подобные задачи являются конструктивно-нелинейными, так как при их математической формализации используются неравенства и недифференцируемые функции. Поэтому в подобных задачах необходимо находить и исследовать точки бифуркации негладких уравнений или решений задач нелинейного программирования. При нагрузке, большей критической величины, упругая система мо-

жет перейти в смежное состояние равновесия. При этом, как правило, малые возмущения приводят к большим изменениям состояния системы, вплоть до потери несущей способности.

Методология и методы диссертационного исследования выбирались исходя из особенностей решаемых задач: конструктивно–нелинейные задачи исследовались методами математического моделирования с применением методов оптимизации, а также методов решения неклассических вариационных задач с ограничениями в виде неравенств.

Достоверность полученных результатов

Результаты математически строго доказаны и подтверждены численными экспериментами.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты решения задач устойчивости упругих систем при наличии односторонних связей могут быть использованы в проектировании различных конструкций, приборов машиностроения.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Аналитическое решение задачи устойчивости сжимаемого продольной силой стержня, прогиб которого с одной стороны ограничен жестким препятствием, при граничных условиях свободного края.
2. Аналитическое решение задачи устойчивости упругих колец, нагруженных нормальными или центральными силами, и подкрепленных упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий.
3. Результаты численного исследования задачи устойчивости оболочек вращения в осесимметричном случае в наиболее точной нелинейной постановке с вычислением работы внешних сил по точной термодинамической формуле.
4. Результаты численного решения задачи устойчивости прямоугольных пластин при односторонних ограничениях на перемещения с граничными условиями свободного края.
5. Результаты численного анализа нелинейных колебаний прямоугольных пластин в рамках теории Кармана.

Апробация работы

Результаты научных исследований опубликованы в 25 печатных работах и были представлены на конференциях различного уровня: XIII Коми республиканской молодежной научной конференции. Российская академия наук Уральское отделение Коми научный центр, Сыктывкар, 1997.

XIV Коми республиканской молодежной научной конференции. Российская академия наук Уральское отделение Коми научный центр, Сыктывкар, 2000.

Международной конференции «XVIII сессия Международной Школы по моделям механики сплошной среды» г. Саратов, 2007.

«Февральские чтения», Сыктывкарский государственный университет (2008 г., 2010 г., 2011 г., 2012 г., 2013 г., 2014 г., 2015 г.).

«Февральские чтения» региональная научно – практическая конференция, Сыктывкарский лесной институт (2008 г., 2011 г., 2012 г.).

I Всероссийской молодежной научной конференции «Молодежь и наука на Севере», г. Сыктывкар (2008).

IV Международная конференция «Математическая физика и ее приложения», г. Самара, 2014 г.

XIX Зимняя школа по механике сплошных сред, г. Пермь, Институт механики сплошных сред, 2015 г.

Международная конференция по математической теории управления и механике, Сузdalь, 2015 г.

Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 100-летию В.И. Феодосьева, Москва, 2016 г.

XX Зимняя школа по механике сплошных сред, г. Пермь, Институт механики сплошных сред, 2017 г.

Международный семинар «Теоретико-групповые методы исследования физических систем», 2017. Физико-математический институт Коми НЦ Уро РАН, Сыктывкар.

Публикации

По теме диссертации опубликована 25 работ, включая 3 работы в рецензируемых журналах из перечня ВАК.

- **Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н.** Об устойчивости упругих систем с

неудерживающими связями. // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2013. №3(15). С. 12-18.

- **В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов** Аналитическое решение задач устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. Известия Коми НЦ Уральского отделения РАН. 3(19). 2014. с. 39 – 43.

- **Андрюкова В.Ю.** Некоторые задачи устойчивости упругих систем с односторонними ограничениями на перемещения.// "Вычислительная механика сплошных сред". Пермь. 2014. Том 7, №4. С.412 – 422.

А также публикацию, входящую в систему цитирования Scopus:

- **Veronika Andryukova, Vladimir Tarasov** Nonsmooth problem of stability for elastic rings. Труды международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова. Часть I. - СПб.: Издательство ВВМ, 2017. 268 с.;
DOI: 10.1109/CNSA.2017.7973928.

Личный вклад автора заключается в анализе текущего состояния исследований по теме работы, создании алгоритмов, формулировке основных результатов и выводов диссертации. Автор предложила и реализовала новый метод расчета на устойчивость оболочек вращения в осесимметричном случае. Автор лично получила аналитические решения задачи устойчивости стержня, прогиб которого с одной стороны ограничен жестким препятствием, при граничных условиях свободного края, а также задачи устойчивости упругих колец, нагруженных нормальными или центральными силами, и подкрепленных упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий. Автор непосредственно разрабатывала и реализовывала алгоритм численного решения задач нелинейных колебаний прямоугольных пластин в рамках теории Кармана. Автор лично проводила численные эксперименты, представленные в работе, и обрабатывала полученные результаты.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 88 наименований. Работа изложена на 93 страницах текста, подготовленного в издательской системе L^AT_EX 2_ε и распечатанного в

размере шрифта 14 пунктов через 1,5 межстрочных интервала.

Содержание работы

Во **введении** обсуждается история вопроса, приводится обзор литературы по теме диссертации. Рассматривается общая характеристика диссертационной работы, кратко излагаются полученные результаты. **Первая глава** посвящена краткому обобщению современного состояния исследований. **Вторая глава** представляет необходимый теоретический материал. В **третьей главе** приведено аналитическое решение задачи устойчивости сжимаемых продольной силой стержней, находящихся в упругой среде, прогибы которых с одной стороны ограничены жестким препятствием. Исследовано влияние граничных условий на величину критической силы. Также рассмотрена устойчивость кругового кольца, сжимаемого равномерно распределенными центральными силами, при наличии односторонних ограничений на перемещения; решена задача устойчивости прямоугольной пластины, прогиб которой ограничен двумя жесткими ребрами, при этом на двух кромках пластины выполняются граничные условия свободного края. Приведено решение осесимметричной задачи устойчивости оболочек вращения, находящихся под действием внешнего нормального давления. Для вычисления работы внешних сил использована точная термодинамическая формула. В **четвертой главе** исследуются линейные и нелинейные колебания прямоугольных пластин. Анализируются результаты численных экспериментов, проводится сравнительный анализ колебаний пластин в линейном и нелинейном случае.

Глава 1

Современное состояние исследований

Вариационный подход к задачам устойчивости упругих систем был развит С.П. Тимошенко, который решил ряд задач устойчивости стержней, пластин и оболочек. На основе вариационного подхода можно доказать теорему существования решения уравнений равновесия. В устойчивом положении равновесия функционал полной энергии достигает локального минимума.

Решение классических задач на устойчивость упругих систем приводит к проблеме на собственные значения линейных операторов. Задачи устойчивости и критического поведения упругих систем при ограничениях на перемещения в виде неравенств сводятся к нахождению и исследованию точек бифуркации нелинеаризуемых уравнений или к определению параметров, при которых вариационные задачи с ограничениями на искомые функции в виде неравенств имеют неединственное решение. В отличие от классических задач на устойчивость, при наличии односторонних связей необходимо находить точки бифуркации решения задач оптимизации, в которых имеются ограничения в виде неравенств. С работ Эйлера берет свое начало теория устойчивости упругих систем. Краткий обзор этой теории можно найти в [47]. К настоящему времени теория и методы решения рассматриваемых задач разработаны недостаточно. В общем случае требуется применение методов глобальной оптимизации в задачах нелинейного программирования. Предположим, что полная потенциальная энергия упругой конструкции имеет вид

$$\Phi(u, \lambda) = F(u) + G(u, \lambda), \quad (1.1)$$

где u – функция, характеризующая состояние упругой системы (это может быть, например, вектор перемещения, тензор деформации и т.д.), $F(u)$ – упругая энергия системы, $G(u, \lambda)$ – работа внешних сил, λ – параметр, характеризующий внешнюю нагрузку. Пусть уравнение Эйлера для функционала (1.1) записывается в виде

$$L(u, \lambda) = 0, \quad (1.2)$$

где L – дифференциальный нелинейный оператор. Поиск критического параметра λ сводится к нахождению точек бифуркации уравнения (1.2).

Исследованию вариационных неравенств посвящены работы [20], [23], [33], [50], [82], [84], [86]. Математическая формализация таких задач сводится к выпуклым вариационным задачам, методы решения которых в настоящее время хорошо разработаны, так как все алгоритмы выпуклого программирования сходятся к оптимальному решению. Эффективный метод решения контактных задач для тонкостенных элементов конструкций предложен В.Н. Тарасовым и Е.И. Михайловским в работе "О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей".

Интересные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения решены В.И. Феодосьевым. В.И. Феодосьев рассмотрел задачу плоского изгиба упругого стержня, находящегося в первоначальном недеформированном состоянии между двумя жесткими стенками на одинаковом расстоянии от каждой из них и исследовал задачу устойчивости тонкостенного кольца, сжимаемого накинутой на него абсолютно гибкой нерастяжимой нитью, натягиваемой силой, а также кольца, вставленного в жесткую обойму. Надо отметить, что после потери устойчивости система может прийти в движение, тогда для исследования следует применять динамический подход. Примером такой задачи является известная задача об устойчивости продольно сжимаемого стержня под действием следящей нагрузки. Сравнение статического и динамического подходов к отысканию критических нагрузок можно найти в монографиях В.В. Болотина, Г.Циглера. Анализ упругих систем на устойчивость при наличии односторонних (неудерживающих) связей сводится к определению параметров, при которых задача оптимизации имеет неединственное решение.

Глава 2

**Устойчивость упругих систем с неудерживающими
связями и условная положительная определенность
квадратичных форм на конусах**

Пусть A, Q – положительно определенные квадратные матрицы порядка n , B, C – диагональные матрицы с неотрицательными элементами (b_1, b_2, \dots, b_n) и (c_1, c_2, \dots, c_n) соответственно. Рассмотрим задачу нахождения числа λ , при котором уравнение

$$Ax + Cx_+ + Bx_- = \lambda Qx \quad (2.1)$$

имеет нетривиальное решение. В (2.1)

$$x_+ = (x_{1+}, x_{2+}, \dots, x_{n+}), \quad x_- = (x_{1-}, x_{2-}, \dots, x_{n-}),$$

$$x_{j+} = \max\{0, x_j\} = \frac{x_j + |x_j|}{2}, \quad x_{j-} = \min\{0, x_j\} = \frac{x_j - |x_j|}{2}.$$

Так как $x_+ + x_- = x$, то можно считать, что $\min\{b_i, c_i\} = 0$, ибо для любых положительных чисел b, c

$$ct_+ + bt_- = \min\{c, b\}t + (c - \min\{c, b\})t_+ + (b - \min\{c, b\})t_-.$$

И если $\alpha_i = \min\{c_i, b_i\} > 0$, то в уравнении (2.1) можно положить $\tilde{a}_{ii} = a_{ii} + \alpha_i$, матрица A останется симметричной и положительно определенной.

Введем в рассмотрение функцию

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \frac{1}{2}(Cx_+, x) + \frac{1}{2}(Bx_-, x), \quad (2.2)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(Qx, x), \quad (2.3)$$

здесь

$$(Cx_+, x) = \sum_1^n c_i x_{i+}^2, \quad (Bx_-, x) = \sum_1^n b_i x_{i-}^2.$$

Ясно, что $f(x), g(x)$ непрерывно дифференцируемые функции, градиенты которых равны

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = Ax + Cx_+ + Bx_-,$$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = Qx.$$

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in R^n} \quad (2.4)$$

при ограничениях

$$g(x) = \frac{1}{2}(Qx, x) = 1. \quad (2.5)$$

Пусть x_* – решение задачи (2.4) – (2.5). Тогда существует множитель Лагранжа λ такой, что

$$\frac{\partial f(x_*)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g(x_*)}{\partial x}, \quad (2.6)$$

т.е. выполнено уравнение (2.1). Далее, можно считать, что $b_i = 0$, так как, в противном случае, сделав замену $x_j = -y_j$, получим $x_{j-} = -y_{j-} = y_{j+}$ (воспользовались известным свойством $\min\{-t, 0\} = -\max\{t, 0\}$.)

К уравнению (2.1) могут быть сведены задачи устойчивости упругих систем при наличии односторонних ограничений на перемещения. Например, рассмотрим задачу устойчивости сжимаемого продольной силой P стержня, находящегося на границе раздела двух упругих сред с жесткостями $c(x)$ и $b(x)$, реагирующих на боковое смещение стержня, как простые винклеровские основания. Предполагая, для определенности, граничные условия жесткой заделки, приходим к проблеме определения таких значений параметра нагрузки P , при которых краевая задача

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + c(x)w_+ + b(x)w_- = -P \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad x \in (0, l), \quad (2.7)$$

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w'(0) = w'(\ell) = 0 \quad (2.8)$$

имеет нетривиальное решение. Здесь $w(x)$ – прогиб (рассматривается плоская форма изгиба), EJ – жесткость стержня на изгиб

$$w_+(x) = \max\{0, w(x)\}, \quad w_-(x) = \min\{0, w(x)\}.$$

Особенностью задачи (2.7) является ее нелинейность, обусловленная срезкой функции $w(x)$, т.е. необходимо находить "собственные" функции негладких

операторов. Очевидно, поиск минимальной силы P , при которой уравнение (2.7) имеет нетривиальное решение эквивалентен задаче оптимизации

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^l (E J w''^2 + c(x) w_+^2 + b(x) w_-^2) dx \rightarrow \min_w \quad (2.9)$$

при ограничениях

$$g(w) = \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx. \quad (2.10)$$

Задача (2.9) – (2.10) имеет решение в гильбертовом пространстве функций $W_2^2[0, l]$, удовлетворяющих граничным условиям (2.8) и имеющим обобщенную, суммируемую с квадратом, вторую производную (первая производная функции $w(x)$ абсолютно непрерывна). Если заменить производные прогиба $w(x)$ конечно-разностными отношениями, то придем к уравнению (2.1).

Об условной положительной определенности квадратичных форм на конусах

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) \rightarrow \min_{x \in R^n} \quad (2.11)$$

при ограничениях

$$g(x) = \frac{1}{2}(Qx, x) = 1, \quad (2.12)$$

$$(b_j, x) \leq 0, \quad j \in I = 1 : m. \quad (2.13)$$

Здесь A – положительно определенная, Q – неотрицательно определенная квадратные матрицы порядка n , $b_j \in R^n$. Неравенства (2.13) определяют выпуклый конус в R^n . Пусть x^* – решение задачи (2.11) - (2.13). По теореме Куна-Таккера найдутся множители Лагранжа $\mu_j \geq 0$, $j \in 1 : m$ и λ^* такие, что

$$\begin{cases} Ax^* - \lambda^* Qx^* + \sum_{j=1}^m \mu_j b_j = 0, \\ g(x^*) = 1, \\ \mu_j(b_j, x^*) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Точки x^* , удовлетворяющие (2.14), будем называть стационарными.

Введем обозначение $B(\lambda) = A - \lambda Q$. Можно показать, что для любых $\lambda \leq \lambda^*$ $(B(\lambda)x, x) \geq 0$, для всех $x \in \Gamma$, и, напротив, если $\lambda > \lambda^*$, то найдется вектор

$\bar{x} \in \Gamma$ такой, что $(B(\lambda)\bar{x}, \bar{x}) < 0$. Очевидно также, что $\lambda^* = f(x^*)$. Таким образом, матрица $B(\lambda)$ при $\lambda \leq \lambda^*$ будет условно положительно определенной на конусе Γ . Вопросы идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах рассматривались в работах [30], [62]. Там получены критерии условной положительной определенности квадратичных форм в важном частном случае, когда $\Gamma = \{x \in R^n \mid x_j \geq 0, j \in 1 : n\}$. Их применение сводится к вычислению большого количества определителей (в общем случае 2^n), и в этом отношении является крайне неэкономичным.

Сформулируем метод последовательных приближений для поиска стационарных точек [66]. Пусть решение $x_0 \in \Gamma$, $g(x_0) = 1$ некоторое начальное приближение. Пусть уже получена точка $x_k \in \Gamma$, $g(x_k) = 1$. Обозначим

$$\tilde{\Gamma}_k = \{x \in \Gamma, |(Qx_k, x - x_k)| = 0\}. \quad (2.15)$$

Найдем точку $\tilde{x}_k \in \tilde{\Gamma}_k$ такую, что

$$\frac{1}{2}(A\tilde{x}_k, \tilde{x}_k) = \min_{x \in \tilde{\Gamma}_k} \frac{1}{2}(Ax, x). \quad (2.16)$$

Далее полагаем

$$x_{k+1} = s_k^{-1}\tilde{x}_k, \text{ где } s_k = \sqrt{g(\tilde{x}_k)}. \quad (2.17)$$

Поскольку \tilde{x}_k – решение задачи минимизации (2.16), то найдутся множители Лагранжа $\mu_{kj} \geq 0$ и λ_k такие, что

$$\begin{cases} A\tilde{x}_k - \lambda_k Qx_k + \sum_{j=1}^m \mu_{kj} b_j = 0, \\ (Qx_k, \tilde{x}_k - x_k) = 0, \\ \mu_{kj}(b_j, \tilde{x}_k) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Можно показать, что последовательность $\{\lambda_k\}$ монотонно убывает, ограничена снизу, и любая предельная точка последовательности $\{x_k\}$ является стационарной. Обозначим предел последовательности $\{\lambda_k\}$ через λ_* .

Предлагаемый метод является локальным, и он сходится к решению задачи (2.11) – (2.13), если удачно выбрано начальное приближение. После того, как получено λ_* , можно воспользоваться методом ветвей и границ [65] для проверки

условной неотрицательной определенности матрицы $A - \lambda_* Q$ на конусе Γ . Обычно в реальных задачах матрица $A - \lambda_* Q$ имеет небольшое число отрицательных собственных чисел, а трудоемкость метода ветвей и границ в задачах невыпуклого квадратичного программирования оценивается числом отрицательных собственных чисел матрицы. Если же применять метод ветвей и границ непосредственно к задаче (2.11) – (2.13), то объем вычислительной работы будет зависеть от размерности пространства переменных.

На каждом шаге предлагаемого алгоритма требуется решать задачу минимизации выпуклой квадратичной функции при линейных ограничениях (задачу выпуклого квадратичного программирования). Последняя значительно проще исходной.

Если $I = \emptyset$, т. е. $\Gamma = R^n$ и Q – единичная матрица, то предлагаемый алгоритм превращается в известный метод Келлога для поиска минимального собственного числа матрицы A .

Глава 3

Устойчивость упругих систем с односторонними связями

Рассмотрим плоский изгиб упругого стержня длины ℓ , сжимаемого продольной силой P , которая в процессе деформации сохраняет свою величину и направление [47].

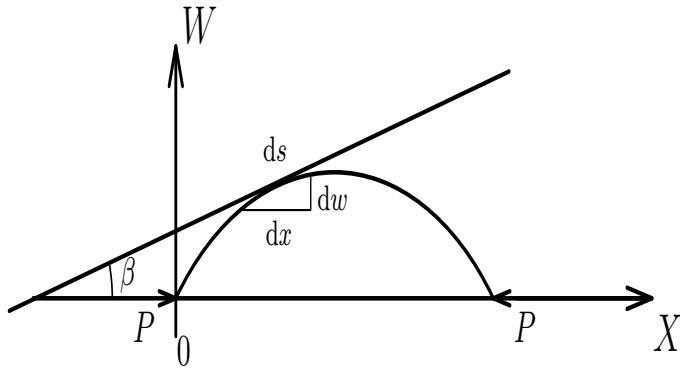


Рис. 3.1: Форма деформированного стержня под действием силы P

Пусть s – длина дуги стержня, $w(s)$, $x(s)$ – декартовы координаты деформированного стержня. Обозначим через $\beta(s)$ угол между касательной к деформированной оси стержня и осью x . Тогда выполнены уравнения (см. рис. 3.1)

$$w' = \sin \beta, \quad x' = \cos \beta. \quad (3.1)$$

В предположении выполнения условий несжимаемости оси стержня и гипотезы плоских сечений (гипотезы Бернулли) энергия упругого стержня определяется изменением кривизны стержня. Из дифференциальной геометрии известно, что кривизна упругой линии определяется формулой

$$\frac{1}{\rho} = \beta'_s = \frac{d\beta}{ds}$$

или

$$\frac{1}{\rho} = \frac{w''_{xx}}{(1 + w'^2_x)^{\frac{3}{2}}}.$$

При малых β $\sin \beta = \beta$, поэтому $\cos \beta \cong 1 - \frac{1}{2}\beta^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2}w'^2$. также $dx =$

$\cos \beta ds$. По определению работа внешних сил равна

$$A = P \int_0^\ell (ds - dx) = P \int_0^\ell (1 - \cos \beta) ds. \quad (3.2)$$

В квадратичном приближении

$$A \cong P \int_0^\ell (1 - 1 + \frac{1}{2}w'^2) ds = \frac{P}{2} \int_0^\ell w'^2 ds.$$

Полная потенциальная энергия стержня определяется функционалом

$$U = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2}EJ\beta'^2 - P(1 - \cos \beta) \right] ds. \quad (3.3)$$

$$\int_0^\ell \frac{1}{2}EJ\beta'^2 ds - \text{упругая энергия стержня},$$

$$P(\ell - \tilde{l}) = \int_0^\ell P(ds - dx) = \int_0^\ell P(1 - \cos \beta) ds - \text{работа внешних сил},$$

EJ – жесткость стержня на изгиб (E – модуль Юнга, J – момент инерции поперечного сечения).

В положении равновесия полная энергия стержня принимает минимальное значение. Предположим, что выполнены граничные условия шарнирного опи-рания:

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w''(0) = w''(\ell) = 0. \quad (3.4)$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{P}{EJ},$$

тогда уравнение Эйлера для функционала (3.3) имеет вид:

$$\beta'' = -k^2 \sin \beta, \quad (3.5)$$

первый интеграл которого хорошо известен:

$$\beta'^2 = 2k^2(\cos \alpha - \cos \beta), \quad (3.6)$$

или

$$\beta'^2 = 4k^2(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}). \quad (3.7)$$

В (3.6) $\cos \alpha$ – постоянная интегрирования. Сделаем подстановку

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi.$$

Дифференцируя подстановку и используя (3.7), получаем равенства:

$$\frac{1}{4} \cos^2 \frac{\beta}{2} \beta'^2 = \psi'^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \psi, \quad \beta'^2 = 4k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \psi.$$

Новая переменная ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi'^2 = k^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi\right), \quad (3.8)$$

откуда находим

$$ks = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}} - \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}}. \quad (3.9)$$

Здесь постоянная интегрирования определена из условий: при $s = 0$ должно быть $\beta = \alpha$, следовательно, $\psi = \frac{\pi}{2}$, при $s = \frac{\ell}{2}$ $\psi = 0$. Для определения α получаем уравнение

$$k \frac{\ell}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}}. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) имеет решение при условии, что $k \frac{\ell}{2} \geq \frac{\pi}{2}$, откуда получаем зависимость между углом α и нагрузкой P и первую критическую силу Эйлера

$$P = \frac{\pi^2 E J}{\ell^2}. \quad (3.11)$$

Обозначив $m^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, получим

$$ks = K(m) - K(m, \psi), \quad (3.12)$$

где

$$k(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}}, \quad (3.13)$$

$$k(m, \psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}} \quad (3.14)$$

– полный и неполный эллиптический интегралы первого рода.

Для определения перемещений воспользуемся уравнениями $w' = \sin \beta$, $x' = \cos \beta$. Тогда

$$dw = \sin \beta ds = -\frac{2}{k} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = -\frac{2m}{k} \sin \psi d\psi.$$

Откуда

$$w = -\frac{2m}{k} (\cos \psi - \cos \psi_0).$$

Так как $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, то

$$w = -\frac{2m}{k} \cos \psi.$$

$$dx = \cos \beta ds = (1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}) ds = -\frac{2}{k} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi} d\psi + \frac{1}{k} ds.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{k} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}} - \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}} \right) + \frac{1}{k} s = \\ &= \frac{1}{k} s + \frac{2}{k} E(m, \psi) - \frac{2}{k} E(m, \frac{\pi}{2}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

здесь $E(m, \psi)$ и $E(m)$ полный и неполный эллиптический интегралы второго рода. Из уравнений (3.1) можно получить выражения для упругой линии стержня (эластики Эйлера). Таким образом, при $P = \frac{\pi^2 E J}{\ell^2}$ происходит бифуркация решений уравнения равновесия: кроме тривиального решения $\beta(s) \equiv 0$, которое становится неустойчивым, возникают смежные состояния равновесия. Если стержень изгибаются по n полуволнам, то набор критических сил определяется формулой

$$P_n = \frac{n^2 \pi^2 E J}{\ell^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Проинтегрировать нелинейное уравнение равновесия для упругих элементов удается в редких случаях, поэтому линеаризуем уравнения. Используя (3.1), можно приближенно положить

$$\begin{aligned} w' &\approx \beta, \\ x' &\approx \cos \beta \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}. \end{aligned}$$

Задача минимизации функционала (3.3) заменяется на

$$\int_0^\ell \left[\frac{1}{2} E J w''^2 - \frac{P}{2} w'^2 \right] ds \rightarrow \min_w. \quad (3.17)$$

Уравнение Эйлера для функционала (3.17) имеет вид:

$$EJ \frac{d^4 w}{ds^4} + P \frac{d^2 w}{ds^2} = 0. \quad (3.18)$$

Общее решение уравнения Эйлера определяется формулой:

$$w = A_1 + A_2 s + A_3 \sin(ks) + A_4 \cos(ks). \quad (3.19)$$

Из граничных условий (3.4) следуют равенства $A_1 = A_2 = A_4 = 0$. Для того, чтобы существовало нетривиальное решение уравнения (3.18), удовлетворяющее (3.4), необходимо потребовать выполнение равенства $k\ell = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, откуда находим последовательность собственных чисел и собственных функций линейной краевой задачи (3.4), (3.18)

$$k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad P_n = \frac{n^2\pi^2 E J}{\ell^2}, \quad w_n = A_3 \sin(k_n s).$$

Из решения линейной краевой задачи (3.4), (3.18) прогиб $w(s)$ определить нельзя, ибо постоянная интегрирования A_3 остается неопределенной.

3.1 Устойчивость сжимаемых продольной силой стержней при односторонних ограничениях на перемещения

Пусть прямолинейный стержень длины ℓ , находящийся в упругой среде с жесткостью C , работающей как простое винклеровское основание, нагружен продольной силой P .

Таким образом, полная энергия системы (упругая энергия минус работа внешних сил) в квадратичном приближении определяется функционалом

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (Dw''^2 + Cw^2 - Pw'^2) dx, \quad (3.20)$$

где Cw^2 – энергия упругого основания. Полное решение задачи устойчивости стержня, связанного с упругим основанием, приведено в [15]. Предположим,

что прогиб стержня w с одной стороны ограничен жестким препятствием так, что

$$w(x) \geq 0, \quad x \in [0, \ell]. \quad (3.21)$$

В состоянии равновесия полная энергия системы принимает минимальное значение, поэтому расчет на устойчивость стержня сводится к нахождению минимальной силы P , при которой вариационная задача

$$J(w) \rightarrow \min_w \quad (3.22)$$

при ограничении (3.21) имеет нетривиальное решение.

В работе В.Н. Тарасова [68] рассмотрены два вида граничных условий:

- граничные условия жесткой заделки:

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w'(0) = w'(\ell) = 0. \quad (3.23)$$

- граничные условия шарнирного опирания:

$$w(0) = w(\ell) = 0, \quad w''(0) = w''(\ell) = 0. \quad (3.24)$$

В диссертационной работе решена задача устойчивости стержня при комбинированных граничных условиях:

- граничные условия жесткой заделки при $x = 0$ с граничными условиями свободного края при $x = \ell$:

$$\begin{cases} w(0) = 0, w'(0) = 0, \\ w''(\ell) = 0, w'''(\ell) + \frac{P}{D}w'(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Приведем решение задачи (3.21) – (3.22) при граничных условиях **жесткой заделки** (3.23), (3.24).

Очевидно, что определение критической силы [68] сводится к задаче изопериметрического типа:

$$\tilde{J}(w) = \frac{1}{2} \int_0^\ell (Dw''^2 + Cw^2) dx \rightarrow \min \quad (3.26)$$

при ограничении

$$J_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^\ell w'^2 dx = 1 \quad (3.27)$$

и выполнении условий (3.21) и (3.23).

Решение экстремальной проблемы (3.26) – (3.27) при ограничениях (3.21), (3.23) существует [66], ибо множество функций $w \in W_2^2[0, \ell]$, удовлетворяющих (3.21) и (3.27) является слабым компактом, а функционал $\tilde{J}(w)$, является выпуклым. Доказательство теорем существования решений экстремальных задач в гильбертовых пространствах можно изучить в работах [10], [46]. Известно, что непрерывный выпуклый функционал достигает своего минимума на любом слабо компактном множестве. Здесь $W_2^2[0, \ell]$ – пространство функций Л.С. Соболева, имеющих на $[0, \ell]$ обобщенные суммируемые с квадратом первую и вторую производные (первая производная абсолютно непрерывна) и удовлетворяющих условию (3.21).

Решение задачи (3.26), (3.27), (3.21), (3.23) можно искать среди функций строго положительных на интервале $(0, \ell_1)$, $0 < \ell_1 \leq \ell$ и тождественно равных нулю вне этого интервала [66].

Так как $w > 0$ при $x \in (0, \ell_1)$, то прогиб удовлетворяет уравнению Эйлера на этом интервале

$$w^{IV} + \omega w + \rho^2 w'' = 0, \quad (3.28)$$

где $\omega = C/D$, $\rho^2 = \lambda/D$, λ – множитель Лагранжа для ограничения изопериметрического типа (3.27).

В этом случае (3.28) является уравнением равновесия сжимаемого продольной силой стержня, находящегося в упругой среде. Заметим также, что (3.28) совпадает с уравнением равновесия цилиндрической оболочки, сжимаемой продольной силой, в осесимметричном случае. Экспериментальному исследованию устойчивости продольного сжатия цилиндрической оболочки, находящейся в жесткой обойме, посвящена работа [66]. Можно показать, что для существования нетривиального решения уравнения (3.28) при граничных условиях (3.23) или (3.24) необходимо выполнение неравенства

$$\rho^2 \geq 2\sqrt{\omega}. \quad (3.29)$$

В самом деле, пусть $\rho^2 < 2\sqrt{\omega}$, и функция $w(x) \not\equiv 0$ удовлетворяет урав-

нению (3.28). Тогда

$$J_0 = \int_0^\ell (w''^2 - \rho^2 w'^2 + \omega w^2) dx = 0. \quad (3.30)$$

С другой стороны, представляя функцию $w(x)$ рядом Фурье ($w(0) = w(\ell) = 0$),

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

и подставляя в (3.30), получим:

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^4 - \rho^2 \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 + \omega \right] > \\ &> \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^4 - 2\sqrt{\omega} \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 + \omega \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left[\left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 - \sqrt{\omega} \right]^2 \geq 0, \end{aligned}$$

т.е. полная энергия стержня строго положительна, если условие (3.29) не выполнено.

При этом условии общее решение уравнения (3.28) имеет вид

$$w(x) = c_1 \sin(m_1 x) + c_2 \sin(m_2 x) + c_3 \cos(m_1 x) + c_4 \cos(m_2 x), \quad (3.31)$$

где

$$m_1 = \sqrt{\frac{\rho^2}{2} + \sqrt{\frac{\rho^4}{4} - \omega}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{\rho^2}{2} - \sqrt{\frac{\rho^4}{4} - \omega}}. \quad (3.32)$$

Учитывая, что $w(x) > 0$ для любого $x \in (0, \ell_1)$ и $w(x) \equiv 0$ при $x \in (\ell_1, \ell)$, то ℓ_1 либо совпадает с ℓ , либо находится из решения задачи

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_1} (w''^2 + \omega w^2) dx \rightarrow \min_{w, \ell_1} \quad (3.33)$$

при ограничении

$$J_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_1} w'^2 dx = 1. \quad (3.34)$$

Из условия минимума по ℓ_1 в задаче (3.33) – (3.34) и с учетом того, что $w(\ell_1) = 0$, $w'(\ell_1) = 0$, из (3.33) получаем еще одно граничное условие: $w''(\ell_1) = 0$.

Таким образом, функция $w(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой на всем интервале $[0, \ell]$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} w(0) = w(\ell_1) = 0, \\ w'(0) = w'(\ell_1) = 0, \\ w''(\ell_1) = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Подставляя (3.31) в граничные условия (3.35), получаем систему уравнений относительно произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 и ℓ_1

$$\begin{cases} c_3 + c_4 = 0, \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0, \\ c_1 \sin y + c_2 \sin z + c_3 \cos y + c_4 \cos z = 0, \\ c_1 m_1 \cos y + c_2 m_2 \cos z - c_3 m_1 \sin y - c_4 m_2 \sin z = 0, \\ c_1 m_1^2 \sin y + c_2 m_2^2 \sin z + c_3 m_1^2 \cos y + c_4 m_2^2 \cos z = 0, \end{cases} \quad (3.36)$$

где $y = m_1 \ell_1$, $z = m_2 \ell_1$. Рассматривая первые четыре уравнения относительно неизвестных c_1, c_2, c_3, c_4 и приравнивая определитель матрицы коэффициентов к нулю, получаем, что для существования нетривиального решения необходимо, чтобы

$$2zy(1 - \cos z \cos y) - (z^2 + y^2) \sin z \sin y = 0. \quad (3.37)$$

Если же рассмотреть первое, второе, третье и пятое уравнение системы (3.36), то приходим к уравнению

$$z \cos z \sin y - y \sin z \cos y = 0. \quad (3.38)$$

Минимальной критической силе соответствует решение системы уравнений (3.37), (3.38)

$$y = 3\pi, \quad z = \pi, \quad \text{т.е. } 3\pi = m_1 \ell_1, \quad \pi = m_2 \ell_1.$$

Используя равенства (3.32), находим

$$\rho^2 = \frac{10}{3}\sqrt{\omega}, \quad \ell_1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt[4]{\omega}}. \quad (3.39)$$

Если $\ell_1 < \ell$, то выражение для прогиба принимает вид

$$w(x) = c \cdot \sin^3(m_2 x) H(\ell_1 - x), \quad x \in [0, \ell], \quad (3.40)$$

где $m_2 = \sqrt[4]{\omega}/\sqrt{3}$, $H(t)$ – функция Хевисайда.

Устойчивость стержня при жестких ограничениях на перемещения с граничными условиями **шарнирного опирания** [68].

При жестких ограничениях на перемещения с граничными условиями шарнирного опирания выполнены условия

$$\begin{cases} w(0) = w(\ell_1) = 0, \\ w''(0) = w''(\ell_1) = 0, \\ w'(\ell_1) = 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Тогда в системе уравнений (3.36) необходимо заменить второе уравнение на $m_1^2 c_3 + m_2^2 c_4 = 0$, откуда, с учетом первого уравнения получаем, что $c_3 = c_4 = 0$ и система (3.36) заменяется на следующую:

$$\begin{cases} c_1 \sin y + c_2 \sin z = 0, \\ c_1 m_1 \cos y + c_2 m_2 \cos z = 0, \\ c_1 m_1^2 \sin y + c_2 m_2^2 \sin z = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Для существования нетривиального решения последней системы необходимо, чтобы

$$\det \begin{pmatrix} \sin y & \sin z \\ m_1 \cos y & m_2 \cos z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.43)$$

$$\det \begin{pmatrix} \sin y & \sin z \\ m_1^2 \sin y & m_2^2 \sin z \end{pmatrix} = 0. \quad (3.44)$$

Откуда получаем два уравнения

$$\begin{cases} m_2 \cos z \sin y = m_1 \cos y \sin z, \\ m_2^2 \sin y \sin z = m_1^2 \sin y \sin z. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $\sin y = 0$ или $\sin z = 0$. Если $\sin y = 0$, то из первого уравнения получаем $\sin z = 0$ (ибо в противном случае $\cos y = 0$, что невозможно), поэтому

$$y = m_1 \ell_1 = \pi i, \quad z = m_2 \ell_1 = \pi j, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

Из (3.45) и второго уравнения системы (3.42) получаем, что

$$c_2 = -c_1 \beta \frac{m_1}{m_2}, \text{ где } \beta = \begin{cases} 1, & \text{если } (i-j) \text{ – четное число,} \\ -1, & \text{если } (i-j) \text{ – нечетное число.} \end{cases}$$

А из (3.31)

$$w(x) = c_1 \left(\sin m_1 x - \beta \frac{m_1}{m_2} \sin m_2 x \right), \quad (3.46)$$

$$0 \leq m_2 x \leq \pi j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Обозначим $\alpha = m_1 m_2^{-1} = i \cdot j^{-1}$, тогда формула (3.32) с учетом того, что

$$\rho^2 = \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \sqrt{\omega}$$

дает значение критической силы. Подбирая i, j таким образом, чтобы $\rho^2 = \lambda/D$, было минимальным, а функция $w(x)$ (3.46) была неотрицательной, находим

$$\rho^2 = \frac{5}{2} \sqrt{\omega}, \quad \ell_1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt[4]{\omega}}.$$

Если $\ell_1 < \ell$, то прогиб задается формулой

$$w(x) = c \left(2 \sin \frac{\pi x}{\ell_1} + \sin \frac{2\pi x}{\ell_1} \right) H(\ell_1 - x), \quad c > 0. \quad (3.47)$$

3.2 Устойчивость стержня при жестких ограничениях на перемещения с граничными условиями свободного края

В случае граничных условий жесткой заделки при $x = 0$ и граничных условий свободного края при $x = \ell$ выполнены равенства

$$\begin{cases} w(0) = 0, w'(0) = 0, \\ w''(\ell) = 0, w'''(\ell) + \rho^2 w'(\ell) = 0, \end{cases} \quad (3.48)$$

где $\rho^2 = P/D$. При данных граничных условиях неравенство (3.29) заменяется на

$$\rho^2 < 2\sqrt{\omega},$$

и общее решение уравнения (3.28) имеет вид:

$$w(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_3 e^{-\alpha x} \sin(\beta x) + c_4 e^{-\alpha x} \cos(\beta x), \quad (3.49)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{\omega} - \rho^2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{\omega} + \rho^2}. \quad (3.50)$$

Можно показать, что существует участок полного прилегания к стенке, т.е.

$$w(x) = 0, \quad x \in [0, \ell_1], \quad \text{и} \quad w(x) > 0, \quad x \in (\ell_1, \ell]. \quad (3.51)$$

Как и выше,

$$w = 0, \quad w' = 0, \quad w'' = 0 \quad \text{при} \quad x = \ell_1.$$

Таким образом, имеем две системы уравнений:

$$\begin{cases} w(\ell_1) = 0, w'(\ell_1) = 0, \\ w''(\ell) = 0, w'''(\ell) + \rho^2 w'(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\begin{cases} w(\ell_1) = 0, w''(\ell_1) = 0, \\ w''(\ell) = 0, w'''(\ell) + \rho^2 w'(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Покажем, что в точке ℓ_1 $w''(\ell_1) = 0$. Для этого потребуется общая формула вариации функционала. Пусть

$$J(w) = \int_{x_0}^{x_1} F(w'', w', w, x) dx \quad (3.54)$$

и δw – вариация траектории. Считаем, что может варьироваться не только функция, но и интервал интегрирования:

$$\delta J(w) = \int_{x_0}^{x_1} (F_{w''} \delta w'' + F_{w'} \delta w' + F_w \delta w) dx + F|_{x_0}^{x_1}.$$

После интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned} \delta J(w) &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2}{dx^2} F_{w''} - \frac{d}{dx} F_{w'} + F_w \right) \delta w dx + \\ &+ F \delta x|_{x_0}^{x_1} + F_{w''} (\delta w')|_{x_0}^{x_1} + \left(F_{w'} - \frac{d}{dx} F_{w''} \right) (\delta w)|_{x_0}^{x_1}. \end{aligned}$$

Так как $\delta w'|_{x_0}^{x_1} = (\delta w')|_{x_0}^{x_1} + w''\delta x|_{x_0}^{x_1}$, $\delta w|_{x_0}^{x_1} = (\delta w)|_{x_0}^{x_1} + w'\delta x|_{x_0}^{x_1}$, то окончательно получаем:

$$\begin{aligned}\delta J(w) &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d^2}{dx^2} F_{w''} - \frac{d}{dx} F_{w'} + F_w \right) \delta w dx + \\ &+ \left(F - w'' F_{w''} + w' \frac{d}{dx} F_{w''} - w' F_{w'} \right) \delta x|_{x_0}^{x_1} + \\ &+ F_{w''} \delta w'|_{x_0}^{x_1} + \left(F_{w'} - \frac{d}{dx} F_{w''} \right) \delta w|_{x_0}^{x_1}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Из условия минимума по ℓ_1 в задаче (3.33) – (3.34) и с учетом того, что $w(\ell_1) = 0$, $w'(\ell_1) = 0$, т.е.

$$\delta w = \delta w' = 0 \quad \text{при } x = \ell_1$$

из (3.55), получаем еще одно граничное условие: $F - w'' F_{w''} = 0$, при $x = \ell_1$, т.е. $w''(\ell_1) = 0$.

Для существования нетривиального решения системы (3.52) – (3.53) необходимо, чтобы определители матрицы коэффициентов при $c_1 - c_4$ были равны нулю. Ясно, что в уравнениях (3.52) – (3.53) можно положить $\ell_1 = 0$ (для этого достаточно заменить x на $x - \ell_1$). Обозначим $\tilde{\ell} = \ell - \ell_1$, тогда $\tilde{\ell}$ будет неизвестной величиной, подлежащей определению. Определитель системы (3.52) имеет вид:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\omega, \tilde{\ell}, \rho) &= \cos^2(\beta \tilde{\ell})(\omega \rho^2 - \sqrt{\omega} \rho^4 + 2\sqrt{\omega} \rho^3) + \\ &+ \frac{1}{2} e^{\alpha \tilde{\ell}} (\sqrt{\omega}^3 - \frac{1}{2} \omega \rho^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\omega} \rho^4) + \frac{1}{2} e^{-\alpha \tilde{\ell}} (\sqrt{\omega}^3 - \frac{1}{2} \omega \rho^2 - \\ &- \frac{1}{2} \sqrt{\omega} \rho^4) + \sqrt{\omega}^3 - \frac{1}{2} \omega \rho^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\omega} \rho^4,\end{aligned}$$

а определитель системы (3.53) равен

$$\begin{aligned}\Delta_2(\omega, \tilde{\ell}, \rho) &= \frac{1}{2} \sin(\beta \tilde{\ell}) \beta (\rho^2 \omega - \rho^4 \sqrt{\omega} + 2\sqrt{\omega} \rho^3) + \\ &+ \frac{1}{4} e^{\alpha \tilde{\ell}} \alpha (\rho^2 \omega + \rho^4 \sqrt{\omega} - 2\sqrt{\omega} \rho^3) - \frac{1}{4} e^{-\alpha \tilde{\ell}} \alpha (\rho^2 \omega + \rho^4 \sqrt{\omega} - 2\sqrt{\omega} \rho^3).\end{aligned}$$

Определители $\Delta_1(\omega, \tilde{\ell}, \rho)$ и $\Delta_2(\omega, \tilde{\ell}, \rho)$ были вычислены с помощью системы MAPLE. Таким образом, для нахождения $\tilde{\ell}$ и ρ^2 имеем систему двух нелинейных уравнений:

$$\Delta_1(\omega, \tilde{\ell}, \rho) = 0, \quad \Delta_2(\omega, \tilde{\ell}, \rho) = 0. \quad (3.56)$$

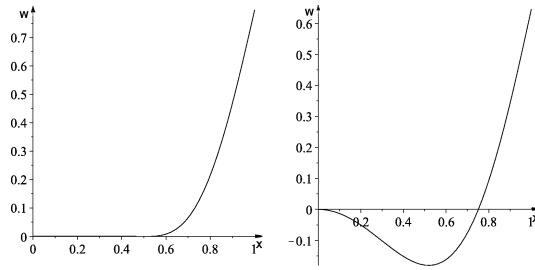


Рис. 3.2: Форма равновесия стержня после потери устойчивости при наличии односторонних ограничений на перемещения (слева) и без ограничений на перемещения (справа).

Система уравнений (3.56) решалась методом Ньютона. Результаты вычислений приведены в табл.1.

Таблица 1. Значения критической силы в зависимости от жесткости среды ω

N	1	2	3	4	5	6
ω	100	200	350	450	550	800
$\tilde{\ell}$	0.745	0.627	0.545	0.512	0.487	0.443
ρ^2	12.6	17.8	23.5	26.7	29.5	35.6
ρ_*^2	11.9	15.6	19.5	21.8	23.8	28.5

В таблице 1 значения ρ^2 соответствуют критической нагрузке стержня при наличии односторонних ограничений на перемещения при различной жесткости среды ω . Для сравнения в последней строке приведены значения критической силы $P = \rho_*^2$ для стержня, находящегося в упругой среде, при отсутствии односторонних ограничений на перемещения.

На рис.3.2 показано различие форм равновесия стержня после потери устойчивости при наличии односторонних ограничений на перемещения и без ограничений.

3.3 Об устойчивости кругового кольца, сжимаемого равномерно распределенными центральными силами, при наличии односторонних ограничений на перемещения

Исследуется устойчивость упругих колец, подкрепленных нерастяжимыми нитями. В отличие от классического случая наличие односторонних связей приводит к определению параметров, при которых вариационная задача с ограничениями на искомые функции в виде неравенств имеет нетривиальное решение. В работе рассматривается задача устойчивости подкрепленного нерастяжимыми нитями кольца в случае неплоской деформации. Проведен численный анализ. Перемещения аппроксимируются интерполяционными периодическими сплайнами, после чего приходим к задаче нелинейного программирования. Требуется найти минимальное значение нагрузки, при которой задача нелинейного программирования с ограничениями в форме неравенств имеет неединственное решение.

Малые деформации криволинейных стержней

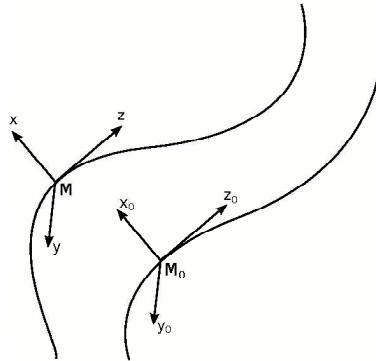


Рис. 3.3: Стержень до и после деформации.

Предположим, что криволинейный тонкий упругий стержень находится в равновесии под действием каких-либо сил. Пусть M – некоторая точка на оси стержня. Пусть X, Y, Z три взаимно перпендикулярные оси в точке M , ось Z направлена по касательной к линии деформированного стержня, X, Y по главным осям инерции поперечного сечения. Выберем на оси стержня точку M_0 , которая в результате деформации переходит в точку M . Соответствующие

три взаимно перпендикулярные оси обозначим через (X_0, Y_0, Z_0) , в результате поворота при деформации они переходят в оси (X, Y, Z) . Обозначим s – длина дуги стержня, отсчитываемой от некоторой точки. Косинусы углов между осями (X_0, Y_0, Z_0) и (X, Y, Z) запишем в матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \gamma & \cos \beta & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & \sin \alpha & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Проекции перемещения в точке M_0 на оси (X_0, Y_0, Z_0) обозначим через (w, v, u) . Предположим, что точки M_0 и M движутся вдоль стержня со скоростью равной 1, системы осей (X, Y, Z) и (X_0, Y_0, Z_0) врачаются вокруг точек M_0 и M с угловыми скоростями Ω_0 и Ω . Проекции угловой скорости Ω на оси (X, Y, Z) обозначим (p, q, r) , а проекции угловой скорости Ω_0 на оси (X_0, Y_0, Z_0) обозначим (p_0, q_0, r_0) . Пусть $\delta p = p - p_0$, $\delta q = q - q_0$, $\delta r = r - r_0$. Будем считать деформации малыми так, что можно положить

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 1,$$

$$\sin \alpha = \alpha, \sin \beta = \beta, \sin \gamma = \gamma.$$

Тогда величины δp , δq , δr , углы α , β , γ и перемещения w , v , u связаны уравнениями [47]

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta p = \frac{d\alpha}{ds} - r_0\beta + q_0\gamma, \\ \delta q = \frac{d\beta}{ds} - p_0\beta + r_0\gamma, \\ \delta r = \frac{d\gamma}{ds} - q_0\beta + p_0\gamma, \end{array} \right. \quad (3.57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{dw}{ds} + q_0u - r_0v, \\ -\alpha = \frac{dv}{ds} + r_0w - p_0u, \\ 0 = \frac{du}{ds} + p_0v - q_0w. \end{array} \right. \quad (3.58)$$

В результате деформации упругая энергия стержня может быть вычислена по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (A\delta p^2 + B\delta q^2 + C\delta r^2) ds, \quad (3.59)$$

где l – длина стержня, A, B – главные жесткости стержня при изгибе, C – жесткость при кручении.

Пусть теперь ось стержня в недеформированном состоянии есть окружность радиуса R , и одна из главных осей сечения направлена к центру окружности, ось Y_0 перпендикулярна к плоскости кольца. В нашем случае в формулах (3.57) – (3.58) $p_0 = 0, q_0 = \frac{1}{R}, r_0 = 0$. Вводя вместо дуги S центральный угол ϑ , так что $S = R\vartheta$, получим формулы

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{R} \left(\frac{dw}{d\vartheta} + u \right), \\ \alpha = -\frac{1}{R} \frac{dv}{d\vartheta}, \\ w = \frac{du}{d\vartheta}. \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\begin{cases} \delta p = -\frac{1}{R^2} v'' + \frac{1}{R} \gamma, \\ \delta q = \frac{1}{R^2} (w'' + u'), \\ \delta r = \frac{1}{R} \gamma' + \frac{1}{R^2} v'. \end{cases} \quad (3.61)$$

Выражение для упругой энергии в формуле (3.59) примет вид

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{B}{R^3} (w'' + u')^2 + \frac{A}{R^2} (\gamma - \frac{1}{R} v'')^2 + \frac{C}{R^2} (\gamma' + \frac{1}{R} v'')^2 \right) d\vartheta. \quad (3.62)$$

Введем в рассмотрение неподвижную систему координат (ξ, η, ζ) так, что проекции перемещений w, v, u на эти оси определяются формулами

$$\begin{cases} \xi = (w - R) \cos \vartheta - u \sin \vartheta, \\ \eta = (w - R) \sin \vartheta + u \cos \vartheta, \\ \zeta = v. \end{cases} \quad (3.63)$$

Дифференцируя последние равенства, получим

$$\begin{cases} \xi' = (w' + u) \cos \vartheta + (u' - w - R) \sin \vartheta, \\ \eta' = -(w' + u) \sin \vartheta + (u' - w - R) \cos \vartheta, \\ \zeta' = v'. \end{cases}$$

Откуда находим

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = (w' + u)^2 + 2Ru' - 2Rw + (u' - w)^2 + v'^2 + R^2 = R^2$$

или

$$(w' + u)^2 + 2Ru' - 2Rw + (u' - w)^2 + v'^2 = 0. \quad (3.64)$$

Последнее представляет собой условие несжимаемости оси кольца. В линейном приближении условие несжимаемости примет вид $u' = w$, что совпадает с третьим уравнением системы (3.58).

Предположим, что кольцо нагружено центральными силами P , равномерно распределенными по кольцу. В этом случае работа внешних сил может быть вычислена по формуле

$$W = -PR \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} - R \right) d\vartheta. \quad (3.65)$$

Обозначим подынтегральную функцию

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} - R = \sqrt{(w - R)^2 + u^2 + v^2} - R = \\ &= R \sqrt{1 + \frac{w^2}{R^2} - \frac{2w}{R} + \frac{u^2}{R^2} + \frac{v^2}{R^2}} - R. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функцию $\phi(t)$ и, разлагая ее в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка, получим

$$\phi(t) = \sqrt{1+t} \approx \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2}\phi''(0)t^2 = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2,$$

где

$$t = \frac{w^2}{R^2} - \frac{2w}{R} + \frac{u^2}{R^2} + \frac{v^2}{R^2}.$$

Тогда подынтегральная функция примет вид

$$\rho = R(1 + 1/2t - 1/4t^2) - R =$$

$$= \frac{R}{2} \left(\frac{w^2}{R^2} - \frac{2w}{R} + \frac{u^2}{R^2} + \frac{v^2}{R^2} \right) - \frac{R}{4} \left(\frac{w^2}{R^2} - \frac{2w}{R} + \frac{u^2}{R^2} + \frac{v^2}{R^2} \right)^2.$$

Оставляя в последнем равенстве только квадратичные слагаемые, получим

$$\rho = -w + \frac{u^2}{2R} + \frac{v^2}{2R} - \frac{w^2}{2R}.$$

Далее из (3.64)

$$2Rw = (w' + u)^2 + 2Ru' + (u' - w)^2 + v'^2,$$

с учетом условия несжимаемости $u' = w$

$$2Rw = (w' + u)^2 + 2Ru' + v'^2 = w'^2 + 2w'u + u^2 + 2Ru' + v'^2.$$

Интегрируя последнее равенство и учитывая условия периодичности перемещений $w(2\pi) - w(0) = 0$ и $u(2\pi) - u(0) = 0$, находим

$$\begin{aligned} 2R \int_0^{2\pi} wd\vartheta &= 2R \int_0^{2\pi} u'd\vartheta + \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta + \\ &+ 2 \int_0^{2\pi} w'u^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{2\pi} w'u d\vartheta &= 2uw \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} wu' d\vartheta = -2 \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta, \\ \int_0^{2\pi} u' d\vartheta &= u \Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

имеем

$$2R \int_0^{2\pi} wd\vartheta = \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta - 2 \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta.$$

С учетом этого формула (3.65) примет вид

$$\begin{aligned} W &= -PR \int_0^{2\pi} \rho d\vartheta = PR \left(- \int_0^{2\pi} wd\vartheta + \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta + \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} v^2 d\vartheta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} 2w^2 d\vartheta \right) = PR \left(- \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta - \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta + \right. \\ &\quad \left. \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta - \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta + \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta + \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} v^2 d\vartheta \Big) = \\
& = PR \left(-\frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta - \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta + \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta + \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} v^2 d\vartheta \right).
\end{aligned}$$

Окончательно получаем выражение для работы внешних сил в квадратичном приближении

$$W = -\frac{P}{2} \int_0^{2\pi} (2w^2 - w'^2 - v'^2 + v^2) d\vartheta. \quad (3.67)$$

В положении равновесия полная энергия системы принимает минимальное значение. При расчете на устойчивость кольца требуется найти минимальное значение силы P , при которой вариационная задача

$$\begin{aligned}
J = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{B}{R^3} (w'' + u')^2 + \frac{A}{R} (\gamma - \frac{1}{R} v'')^2 + \frac{C}{R} (\gamma' + \frac{1}{R} v')^2 \right) d\vartheta - \\
& - \frac{P}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - 2w^2 + v'^2 - v^2) d\vartheta \rightarrow \min_{u,v,w,\gamma}
\end{aligned} \quad (3.68)$$

имеет нетривиальное решение.

Заметим, что система дифференциальных уравнений Эйлера для функционала (3.68) распадается на две независимые подсистемы

$$\frac{B}{R^3} (w^{IV} + 2w'' + w) + P(w'' + 2w) = 0. \quad (3.69)$$

$$\begin{cases} \frac{A}{R^3} v^{(4)} + \frac{C}{R^3} v'' + \frac{C+A}{R^2} \gamma'' - P(v'' - v) = 0, \\ \frac{A+C}{R} v'' + C \gamma'' - A \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

Уравнение (3.69) описывает плоскую деформацию кольца. Для вывода формулы вычисления критической нагрузки в [47] представляют периодическую функцию v в виде ряда

$$u = \sum_{k=0}^n a_k \sin(k\vartheta + \phi)$$

и, подставляя в уравнение (3.69), получают

$$\frac{B}{R^3} (k^4 - 2k^2 + 1) - P(k^2 - 2) = 0.$$

Откуда

$$P = \frac{B}{R^3} \frac{(k^2 - 1)^2}{(k^2 - 2)}.$$

Критическая нагрузка в случае $k = 2$ равна

$$P_1 = \frac{4.5B}{R^3}. \quad (3.71)$$

Система уравнений (3.70) соответствует пространственной форме потери устойчивости кольца. Представив функции v и γ в виде тригонометрического ряда и вычислив их производные

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k=0}^n a_k (\sin k\vartheta + \phi), \quad v'' = - \sum_{k=0}^n a_k k^2 \sin(k\vartheta + \phi), \\ v^{(4)} &= \sum_{k=0}^n a_k k^4 \sin(k\vartheta + \phi), \\ \gamma &= \sum_{n=0}^m b_n \sin(n\vartheta + \phi), \quad \gamma'' = - \sum_{n=0}^m b_n n^2 \sin(n\vartheta + \phi), \end{aligned}$$

получим систему уравнений для определения критической силы P :

$$\begin{cases} -\frac{A}{R^3} a_k k^4 - \frac{C}{R^3} k^2 a_k - \frac{C+A}{R^2} k^2 b_k + P(k^2 a_k - a_k) = 0, \\ \frac{A+C}{R} k^2 a_k + C k^2 b_k + A b_k = 0. \end{cases} \quad (3.72)$$

В данном случае критическое давление определяется формулой [47]

$$P_2 = \frac{k^2(k^2 - 1)AC}{R^3(k^2C + A)}. \quad (3.73)$$

В случае $k = 2$

$$P_2 = \frac{12AC}{R^3(4C + A)}. \quad (3.74)$$

Далее будем считаем, что поперечное сечение кольца есть прямоугольник, одна сторона которого перпендикулярна плоскости кольца, ее длину обозначим через a , другая сторона параллельна этой плоскости, ее длину обозначим b .

Тогда

$$B = \frac{ab^3}{12}E, \quad A = \frac{a^3b}{12}E.$$

Жесткость на кручение можно найти в справочнике [59]. Заметим, что при малых b критическая сила определяется (3.71) (плоская форма потери устойчивости), если же a мало, то наоборот, $P_2 < P_1$ – неплоская деформация кольца.

3.3.1 Аналитическое решение задач устойчивости кольца с односторонним подкреплением в случае центральных сил

Рассмотрим сначала случай плоской деформации. Тогда задача с односторонними ограничениями на перемещения может быть сведена к вариационной проблеме

$$\tilde{J} = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta \rightarrow \min \quad (3.75)$$

при ограничениях

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - 2w^2) d\vartheta = 1, \quad (3.76)$$

$$w \leq 0. \quad (3.77)$$

Как и в [66], [68] нетрудно показать, что решение задачи (3.75) – (3.77) можно

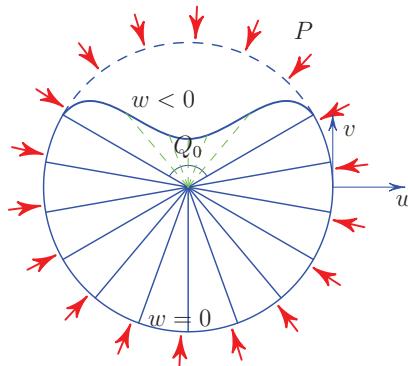


Рис. 3.4: Кольцо, подкрепленное нитями, невоспринимающими усилия, под действием центральных сил.

искать среди функций строго отрицательных на некотором интервале $[0, \vartheta_0]$ и равных нулю, если $\vartheta \notin [0, \vartheta_0]$. На некотором интервале $[0, \vartheta_0]$ функция $w(\vartheta)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (3.69), где P – соответствующий множитель Лагранжа. Решение уравнения (3.69) имеет вид

$$w = A_1 \sin \tilde{\alpha} \vartheta + A_2 \cos \tilde{\alpha} \vartheta + A_3 \sin \tilde{\beta} \vartheta + A_4 \cos \tilde{\beta} \vartheta, \quad (3.78)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{2 + k^2 - \sqrt{k^4 - 4k^2}}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{2 + k^2 + \sqrt{k^4 - 4k^2}}{2}}, \quad k^2 = \frac{PR^3}{B}.$$

Функция $w(\vartheta)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$w(0) = w(\vartheta_0) = 0, \quad w'(0) = w'(\vartheta_0) = 0. \quad (3.79)$$

Подставляя (3.78) в (3.79), получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_2 + A_4 = 0, \\ \tilde{\alpha}A_1 + \tilde{\beta}A_3 = 0, \\ A_1 \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0 + A_2 \cos \tilde{\alpha}\vartheta_0 + A_3 \sin \tilde{\beta}\vartheta_0 + A_4 \cos \tilde{\beta}\vartheta_0, \\ A_1\tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha}\vartheta_0 - A_2\tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0 + A_3\tilde{\beta} \cos \tilde{\beta}\vartheta_0 - A_4\tilde{\beta} \sin \tilde{\beta}\vartheta_0. \end{cases} \quad (3.80)$$

Неизвестными в системе (3.80) будут коэффициенты A_1, A_2, A_3, A_4 . Выражая из первых двух уравнений последней системы A_1, A_4 , получим новую систему

$$\begin{cases} A_3(-\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0 + \sin \tilde{\beta}\vartheta_0) + A_2(\cos \tilde{\alpha}\vartheta_0 - \cos \tilde{\beta}\vartheta_0) = 0, \\ A_3(\tilde{\beta} \cos \tilde{\beta}\vartheta_0 - \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0) + A_2(\tilde{\beta} \sin \tilde{\beta}\vartheta_0 - \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0) = 0. \end{cases} \quad (3.81)$$

Определитель системы (3.81) имеет вид

$$d = (\sin \tilde{\beta}\vartheta_0 - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0)(\tilde{\beta} \sin \tilde{\beta}\vartheta_0 - \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0) - (\cos \tilde{\alpha}\vartheta_0 - \cos \tilde{\beta}\vartheta_0)(\tilde{\beta} \cos \tilde{\beta}\vartheta_0 - \tilde{\alpha} \sin \tilde{\alpha}\vartheta_0). \quad (3.82)$$

Для того, чтобы существовало нетривиальное решение краевой задачи (3.69), (3.79), необходимо и достаточно, чтобы

$$d = d(k; \vartheta_0) = 0. \quad (3.83)$$

Нетривиальные решения системы (3.81) при $k = k_1$ или $k = k_2$ (k_1, k_2 – корни уравнения (3.83)) находим следующим образом, полагая $A_3 = 1$, находим

$$A_2 = \frac{\sin(\tilde{\alpha}k) - \sin(\tilde{\beta}k)}{\cos(\tilde{\alpha}k) - \cos(\tilde{\beta}k)}.$$

Графики функции $\Delta(k)$ приведены на рис.3.5 (слева) при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$, при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$ (справа). Первые два корня уравнения (3.83) приведены в табл.2.

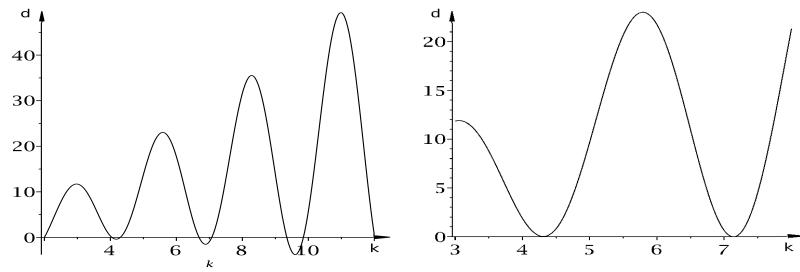


Рис. 3.5: График определителя $d(k)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$ (слева); при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$ (справа).

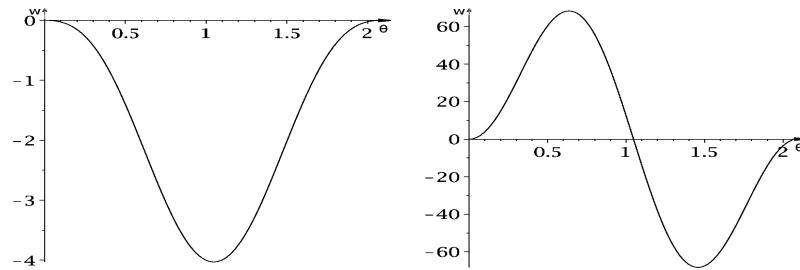


Рис. 3.6: Форма прогиба $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{3}, k = k_1$ (слева); форма прогиба $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{3}, k = k_2$ (справа).

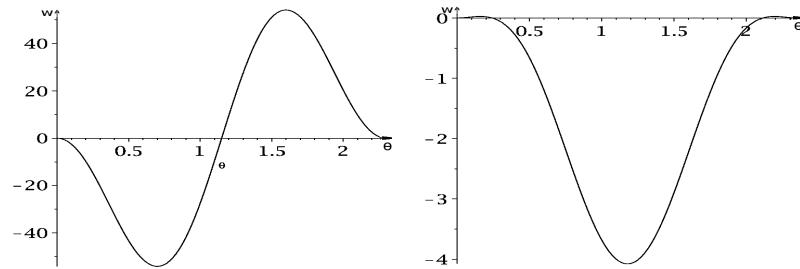


Рис. 3.7: Форма прогиба $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}, k = k_1$ (слева); форма прогиба $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}, k = k_2$ (справа).

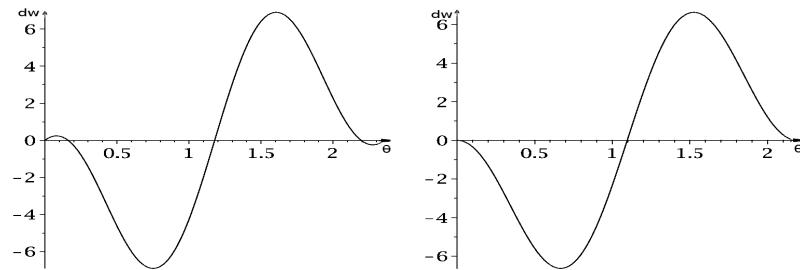


Рис. 3.8: График $w'(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$ (слева); график $w'(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$ (справа).

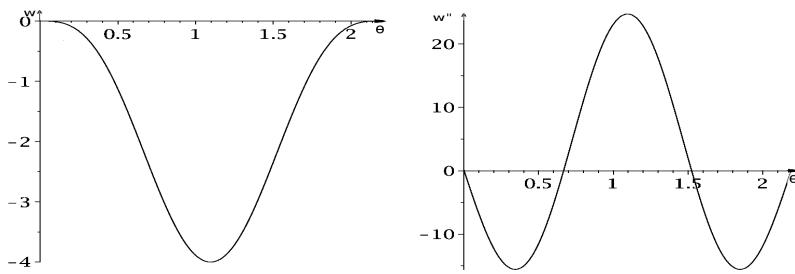


Рис. 3.9: Форма прогиба $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$, $k = k_1 = k_2$ (слева); график $w''(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$ (справа).

Таблица 2. Значения критического параметра k

ϑ_0	k_1	k_2
$\frac{2\pi}{3}$	4.3154	4.4849
$\frac{3\pi}{4}$	4.0463	4.3099
$\frac{3\pi}{4.3}$	4.3132	4.3132

На рис.3.6 представлены графики прогибов $w(\vartheta)$ при $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{3}$ и разных значениях k . На рис.3.7 – графики прогибов $w(\vartheta)$ при $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$. На рис.3.8 (слева) приведен график $w'(\vartheta)$ при $k = k_2$ и $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$, справа приведен график первой производной функции $w(\vartheta)$ при $k = k_1 = k_2$ $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$. На рис.3.9 слева представлен график $w(\vartheta)$ при $k = k_1 = k_2$ и $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$, справа – график второй производной при тех же параметрах. При $k = k_1$ для $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$ прогиб $w(\vartheta)$ меняет знак (рис.3.7 (слева)), следовательно, ограничение (3.77) не выполняется. Подходящим (т.е. удовлетворяющим односторонним ограничениям) является второй корень $k = k_2$ при $\vartheta_0 < \frac{3\pi}{4}$ (рис.3.7 (справа)). Из графика производной $w'(\vartheta)$ (рис.3.8 (слева)) при $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4}$ производная обращается в ноль на интервале $[a, b]$ ровно три раза. Это означает, что сама функция $w(\vartheta)$ на этом интервале имеет три точки экстремума, откуда следует, что функция меняет знак на этом интервале (рис.3.7 (справа)). Если $\vartheta_0 = \frac{3\pi}{4.3}$, то корни уравнения (3.83) будут кратными, т.е. $k_1 = k_2$ (рис.3.5 (справа)). С другой стороны, чем больше ϑ_0 , тем меньше значение критического параметра k . Таким образом, значение безразмерного параметра критической силы при наличии односторонних огра-

ничений на перемещения (3.77) будет равно

$$k^2 = k_1^2 = k_2^2 = \frac{PR^3}{B} = 18.6044. \quad (3.84)$$

Из рис.3.9 видно, что при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \vartheta_0$ $w(\vartheta) = 0$, $w'(\vartheta) = 0$ и $w''(\vartheta) = 0$. Таким образом, при данном значении параметра ϑ_0 обращается в ноль не только функция $w(\vartheta)$ и ее первая производная, но и ее вторая производная.

В случае плоской деформации при аппроксимации сплайнами прогиба $w(\vartheta)$ при $m = 72$ путем решения задачи математического программирования (3.89) – (3.91) получено следующее значение безразмерного параметра

$$\tilde{P} = \frac{PR^3}{B} = 18.5854.$$

Сравнивая это значение с (3.84), находим, что точность численного решения задачи равна

$$\frac{18.6044 - 18.5854}{18.6044} = 0.00102 = 0.1\%$$

Отношение

$$\frac{\tilde{P}}{P_1} = \frac{18.5854}{4.5} = 4.1301.$$

А из формулы (3.84) $\frac{18.6044}{4.5} = 4.1343$. Таким образом, подкрепление нитями увеличивает критическую нагрузку кольца в 4.13 раза.

Случай неплоской деформации

Предположим, что кольцо подкреплено нерастяжимыми нитями, которые не держат сжимающих усилий [2]. Один конец нити прикреплен к неподвижному центру кольца, другой – к точкам кольца с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = \pm a$, $z_0 = 0$. В результате деформации вектор $(0, \pm a, 0)$ переходит в вектор $(\pm a\gamma + u, \pm a + v, a\alpha + w)$ в системе координат (X_0, Y_0, Z_0) . В этой системе центр кольца имеет координаты $(R, 0, 0)$. Тогда расстояние между точками прикрепления нити вычисляется по формуле

$$\rho^* = \sqrt{(\pm a\gamma + u - R)^2 + (a + v)^2 + (a\alpha + w)^2}.$$

Обозначим через $\rho = \sqrt{R^2 + a^2}$ – расстояние между центром кольца и точкой с координатами $(0, \pm a, 0)$. Так как нити нерастяжимы, то должно быть выполнено

нено неравенство

$$\varphi(u, v, w, \gamma) = \rho^* - \rho \leq 0. \quad (3.85)$$

Введем вектор неизвестных $g = (u, v, w, \gamma)$. В линейном приближении

$$\begin{aligned} \varphi(g) &\approx \varphi(0) + \left(\frac{\partial \varphi(0)}{\partial g}, g \right) = \\ &= -\frac{2R}{\sqrt{R^2 + a^2}} u \pm \frac{a}{R^2 + a^2} v \pm \frac{aR}{\sqrt{R^2 + a^2}} \gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, переменные u, v, w и угол поворота γ должны удовлетворять неравенствам

$$-2Ru \pm av \pm aR\gamma \leq 0. \quad (3.86)$$

Заметим, что ограничения (3.86) не содержат функции $u(\vartheta)$. Решение задачи устойчивости подкрепленного кольца может быть сведено к задаче изопериметрического типа

$$\tilde{J} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{B}{R^3} (w'' + w)^2 + \frac{A}{R} (\gamma - \frac{1}{R} v'')^2 + \frac{C}{R} (\gamma' + \frac{1}{R} v')^2 \right) d\vartheta \rightarrow \min_{w, v, \gamma} \quad (3.87)$$

при ограничении

$$\tilde{J}_1 = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - 2w^2 + v'^2 - v^2) d\vartheta = 1, \quad (3.88)$$

причем функции w, v и угол поворота γ должны удовлетворять неравенствам (3.86).

При численном решении задачи (3.87), (3.88), (3.86) будем аппроксимировать искомые функции периодическими интерполяционными сплайнами [29]. Пусть $\vartheta_i = ih$, $i \in 0 : m$, $h = \frac{2\pi}{m}$,

$$z_i = w(\vartheta_i), \ z_{i+m} = v(\vartheta_i), \dots, \ z_{i+2m} = \gamma(\vartheta_i),$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_{2m}, z_{2m+1}, \dots, z_{3m}).$$

$s_w(w; \vartheta)$, $s_v(v; \vartheta)$, $s_\gamma(\gamma; \vartheta)$ – интерполяционные кубические сплайны для функций w, v и γ :

$$s_w(w; \vartheta_i) = w_i, \ s_v(v; \vartheta_i) = v_i, \ s_\gamma(\gamma; \vartheta_i) = \gamma_i,$$

причем из условий периодичности следуют равенства

$$w_0 = w_m, \quad v_0 = v_m, \quad \gamma_0 = \gamma_m.$$

Подставляя сплайны в функционалы (3.87), (3.88), получаем две квадратичные формы:

$$\begin{aligned} f(z) &= \tilde{J}(s_w, s_v, s_\gamma) = \frac{1}{2}(Gz, z), \\ g(z) &= \tilde{J}_1(s_w, s_v, s_\gamma) = \frac{1}{2}(Qz, z), \end{aligned}$$

где G, Q – квадратные матрицы порядка n . Таким образом, вместо задачи (3.87), (3.88), (3.86) получаем задачу нелинейного программирования:

$$f(z) = \frac{1}{2}(Gz, z) \rightarrow \min \tag{3.89}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2}(Qz, z) = 1, \\ -2Rz_i + \frac{a}{2}z_{i+m} + \frac{a}{2}Rz_{i+2m} &\leq 0, \\ -2Rz_i - \frac{a}{2}z_{i+m} - \frac{a}{2}Rz_{i+2m} &\leq 0. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Последние ограничения являются линейными, запишем их в виде

$$(\eta_k, z) \leq 0, \quad k \in 1 : 2m. \tag{3.91}$$

Для поиска стационарных точек применялся метод, описанный формулами (2.15) – (2.18). В случае неплоской деформации значение критической нагрузки зависит от отношения размеров поперечного сечения кольца и его радиуса R . Результаты численных экспериментов при $m = 30$ приведены в таблице 3.

Таблица 3. Значения критических сил в неплоском случае

a	b	R	P_1	P_2	\tilde{P}	\tilde{P}/P_1	\tilde{P}/P_2
1	1	10	0.188	0.375	0.189	1.008	0.504
1.5	1.5	10	0.9557	1.890	0.961	1.005	0.506
1.5	0.5	10	0.349	0.070	0.289	0.827	4.115
1.5	1.0	5	5.091	4.501	5.169	1.011	4.141
2.5	1.0	5	23.302	7.502	23.598	1.023	3.221
3.25	1.0	5	51.801	9.750	43.799	0.846	4.492

Как видно из табл.3, при $a/b > 1$ в результате потери устойчивости происходит плоская деформация кольца. В этом случае отношение критической нагрузки подкрепленного кольца к нагрузке для кольца без подкрепления равно 4.13. Если же $a \leq b$, то кольцо теряет устойчивость в результате пространственной деформации, описываемой уравнением (3.70), и критическая нагрузка не зависит от подкрепления.

3.3.2 Случай внешнего нормального давления

Вычислим работу внешних сил. Пусть s – длина дуги кольца, $k(s)$ – кривизна дуги, $x(s)$, $y(s)$ – координаты точек кольца, $ds = R d\vartheta$, где R – радиус кольца в недеформированном состоянии. Из дифференциальной геометрии известно

$$\begin{cases} x'_s(s) = \cos \varphi(s), \\ y'_s(s) = \sin \varphi(s), \\ k(s) = \varphi'_s(s). \end{cases} \quad (3.92)$$

Введем неподвижную систему координат $x(\vartheta)$, $y(\vartheta)$, такую, что прогиб и тангенциальное перемещение точек кольца связаны формулами:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = (R + w(\vartheta)) \cos \vartheta - v(\vartheta) \sin \vartheta, \\ y(\vartheta) = (R + w(\vartheta)) \sin \vartheta + v(\vartheta) \cos \vartheta. \end{cases} \quad (3.93)$$

Дифференцируя равенства (3.93), получаем:

$$\begin{cases} x' = (w' - v) \cos \vartheta - (R + w + v') \sin \vartheta, \\ y' = (w' - v) \sin \vartheta + (R + w + v') \cos \vartheta, \end{cases} \quad (3.94)$$

$$\begin{cases} x'' = (w'' - 2v' - w - R) \cos \vartheta - (2w' - v + v'') \sin \vartheta, \\ y'' = (w'' - 2v' - w - R) \sin \vartheta + (2w' - v + v'') \cos \vartheta. \end{cases} \quad (3.95)$$

Известно, что кривизна удовлетворяет соотношению

$$k^2(\vartheta) = \frac{1}{R^4} (x''^2 + y''^2).$$

Используя выражения (3.95), получаем:

$$k^2(\vartheta) = \frac{1}{R^4} (w'' - 2v' - w - R)^2 + (2w' - v + v'')^2.$$

Изменение кривизны кольца будет равно $k(s) - 1/R$, а упругая энергия кольца вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} U &= \frac{B}{2} \int_0^{2\pi R} \left(k(s) - \frac{1}{R} \right)^2 ds = \\ &= \frac{B}{2R} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\left(\frac{w''}{R} - \frac{2v'}{R} - \frac{w}{R} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2w'}{R} - \frac{v}{R} + \frac{v''}{R} \right)^2} - 1 \right)^2 d\vartheta. \end{aligned}$$

Здесь B – жесткость на изгиб в плоскости кольца. Условие несжимаемости оси кольца $x'^2 + y'^2 = R^2$ с учетом полученных выражений принимает вид:

$$(w' - v)^2 + (R + w + v')^2 = R^2.$$

Преобразуем последнее равенство:

$$(w' - v)^2 + 2Rw + 2Rv' + (w + v')^2 = 0 \quad (3.96)$$

и проинтегрируем его, учитывая периодичность $v(\vartheta)$,

$$\int_0^{2\pi} v' d\vartheta = v(2\pi) - v(0) = 0.$$

Получаем

$$2R \int_0^{2\pi} wd\vartheta = - \int_0^{2\pi} [(w' - v)^2 + (w + v')^2] d\vartheta. \quad (3.97)$$

Отбрасывая в (3.96) нелинейные слагаемые, в линейном приближении можно записать

$$v' = -w. \quad (3.98)$$

В соответствии с теоремой Эйлера–Бернулли, работа внешних (гидростатических) сил будет равна произведению силы на разность площадей кольца в деформированном и недеформированном состояниях:

$$U_1 = P \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy'_s - yx'_s) ds - \pi R^2 \right].$$

Используя (3.93) – (3.95), вычислим

$$xy'_s - yx'_s = \frac{1}{R} [R^2 + w^2 + v^2 + 2Rw + Rv' + wv' - w'v]. \quad (3.99)$$

Учитывая (3.97), находим

$$\int_0^{2\pi R} xy'_s - yx'_s ds = 2\pi R^2 + \int_0^{2\pi} [w'(v - w') - v'(w + v')] d\vartheta.$$

Используя в последнем соотношении условие (3.98), для работы внешних сил получаем формулу:

$$U_1 = -\frac{P}{2} \int_0^{2\pi} w'(v - w') d\vartheta. \quad (3.100)$$

Далее, с учетом условия (3.98), имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\left(\frac{w''}{R} - \frac{2v'}{R} - \frac{w}{R} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2w'}{R} - \frac{v}{R} + \frac{v''}{R} \right)^2} - 1 \right)^2 = \\ & = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}(w'' + w)^2 - \frac{2}{R}(w'' + w) + \frac{1}{R^2}(w' - v)^2} - 1 \right)^2 \approx \\ & \approx \left(\frac{1}{2R^2}(w'' + w)^2 - \frac{1}{R}(w'' + w) + \frac{1}{2R^2}(w' - v)^2 \right)^2 \approx \\ & \approx \frac{1}{R^2}(w'' + w)^2. \end{aligned}$$

Полученная формула для изменения кривизны деформации кольца в плоском случае совпадает с ранее выписанной (3.61). Таким образом, в квадратичном приближении полная энергия кольца, находящегося под действием сил нормального давления, вычисляется по формуле:

$$J(w) = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta + U_1, \quad (3.101)$$

где работа внешних сил, с учетом равенства

$$\int_0^{2\pi} w'vd\vartheta = - \int_0^{2\pi} v'wd\vartheta = \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta,$$

имеет вид

$$U_1 = -\frac{P}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - w^2) d\vartheta.$$

Таким образом, задача устойчивости подкрепленных колец, находящихся под действием нормального внешнего давления, сводится к отысканию таких значений силы P , при которых вариационная проблема

$$J(w) = \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta - \frac{P}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - w^2) d\vartheta \rightarrow \min_w \quad (3.102)$$

имеет нетривиальное решение при граничных условиях периодичности и ограничениях

$$w(\vartheta) \leq 0. \quad (3.103)$$

Выпишем уравнение Эйлера для функционала (3.102):

$$w^{IV} + (2 + k^2)w'' + (1 + k^2)w = 0, \quad (3.104)$$

где $k^2 = \frac{PR^3}{B}$. Соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + (2 + k^2)\lambda^2 + (1 + k^2) = 0$$

имеет решение

$$\lambda_{1,2} = \pm i; \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{1 + k^2}i.$$

Тогда функция прогиба представима в виде

$$w = A_1 \sin \vartheta + A_2 \cos \vartheta + A_3 \sin \alpha \vartheta + A_4 \cos \alpha \vartheta, \quad (3.105)$$

где $\alpha = \sqrt{1 + k^2}$.

Допустим, что на интервалах $l_j = [\beta_j, \beta_{j+1}]$

$$w(\vartheta) < 0, \quad \vartheta \in \bigcup_{j=1}^m l_j \quad \text{и} \quad w(\vartheta) \equiv 0, \quad \vartheta \notin \bigcup_{j=1}^m l_j.$$

$$\begin{cases} w(\beta_j) = w(\beta_{j+1}) = 0, \\ w'(\beta_j) = w'(\beta_{j+1}) = 0. \end{cases} \quad (3.106)$$

Ясно, что для решения задачи на устойчивость можно рассматривать только один интервал ($m = 1$) и можно считать $\beta_1 = 0$. Обозначим $\beta_2 = \beta$. Зафиксируем некоторый угол $\beta > 0$. Будем считать, что

$$w(\vartheta) < 0, \quad \vartheta \in (0, \beta) \quad \text{и} \quad w(\vartheta) \equiv 0, \quad \vartheta \in (\beta, 2\pi).$$

Первая производная $w'(\vartheta)$ должна быть непрерывной при $\vartheta \in (0, 2\pi)$, тогда функция w удовлетворяет граничным условиям

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\beta) = 0, \quad w'(\beta) = 0. \quad (3.107)$$

Подставляя (3.105) в (3.107), получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_2 + A_4 = 0, \\ A_1 + \alpha A_3 = 0, \\ A_1 \sin \beta + A_2 \cos \beta + A_3 \sin(\alpha\beta) + A_4 \cos(\alpha\beta) = 0, \\ A_1 \cos \beta - A_2 \sin \beta + \alpha A_3 \cos(\alpha\beta) - \alpha A_4 \sin(\alpha\beta) = 0. \end{cases} \quad (3.108)$$

После упрощения, имеем

$$\begin{cases} A_3(\sin(\alpha\beta) - \alpha \sin \beta) + A_4(\cos(\alpha\beta) - \cos \beta) = 0, \\ A_3(\alpha \cos(\alpha\beta) - \alpha \cos \beta) + A_4(\sin \beta - \alpha \sin(\alpha\beta)) = 0. \end{cases} \quad (3.109)$$

Система уравнений (3.109) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, то есть

$$d(\alpha) = -2\alpha \cos(\alpha\beta) \cos \beta + 2\alpha - \sin(\alpha\beta) \sin \beta - \alpha^2 \sin(\alpha\beta) \sin \beta = 0. \quad (3.110)$$

Решая уравнение (3.110) относительно неизвестной α , получим функцию $\alpha = \alpha(\beta)$. При заданном β уравнение (3.110) имеет бесконечное число корней. Очевидно, что $\alpha = 1$ является корнем уравнения при любом β . Заметим, что $\alpha = 1$ соответствует сила P , равная нулю. Далее, находим форму прогиба по формулам (3.105). Несложно убедиться, что формула (3.105) при $\alpha = 1$ дает перемещение кольца как жесткого целого. Следовательно, надо находить минимальный корень уравнения (3.110), удовлетворяющий условию $\alpha > 1$. Также необходимо выполнение знаковых ограничений (3.103). Чем больше угол β , тем меньше k^2 , а значит и сила P . Значения критического параметра P в зависимости от значений угла β приведены в таблице 4.

Таблица 4. Значения критического параметра α

в зависимости от угла β

β	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
α	4.9801	4.2915	3.2136	3	2.4841

Численные эксперименты при $\beta > \pi$ показали, что собственная функция w будет менять знак на интервале $(0, \beta)$, то есть ограничения неотрицательности на функцию w не будут выполняться.

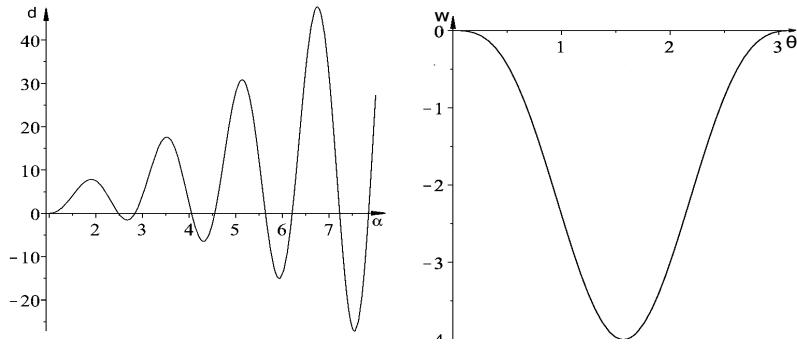


Рис. 3.10: График определителя $d(k)$ при $\beta = 1.25\pi$ (слева); форма прогиба w при $\beta = \pi$ (справа).

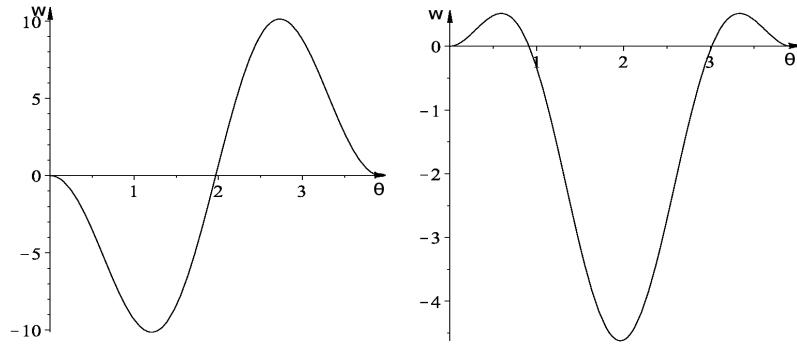


Рис. 3.11: Форма прогиба w при $\beta = 1.25\pi, \alpha = 2.4841$ (слева); форма прогиба w при $\beta = 1.25\pi, \alpha = 2.8413$ (справа).

График функции $d(\alpha)$ при $\beta = \frac{5\pi}{4}$ приведен на рис.3.10 слева. Уравнение $d(\alpha) = 0$ имеет, в данном случае, два корня, значения которых меньше 3: $\alpha_1 = 2.4841$ и $\alpha_2 = 2.8413$. Графики собственной функции $w(\vartheta)$ уравнения (3.104) при граничных условиях (3.110) приведены на рис.3.11 слева – при $\alpha_1 = 2.4841$, справа – при $\alpha_2 = 2.8413$. В обоих случаях $w(\vartheta)$ меняет знак на интервале $[0.. \beta]$, то есть ограничение (3.103) не выполняется. Знаковые ограничения на собственную функцию будут выполнены, если $\beta \in (0, \pi]$. Ясно, что минимальной критической силе соответствует значение параметра $\alpha = 3$ при $\beta = \pi$. В этом случае, критическое давление для подкрепленного кольца равно

$$P = \frac{8B}{R^3}.$$

Для неподкрепленного кольца

$$P = \frac{3B}{R^3}.$$

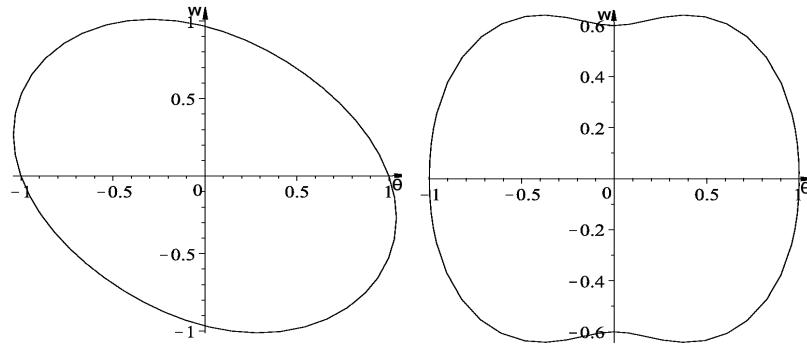


Рис. 3.12: Форма равновесия кольца под действием внешнего нормального давления (слева); форма равновесия кольца, подкрепленного упругими нитями (справа).

График функции прогиба при $\beta = \pi$ и $\alpha = 3$ приведены на рис.3.10 справа. Различие форм равновесия кольца проиллюстрировано на рис.3.12: слева – кольцо без поддерживающих нитей, справа – с нерастяжимыми нитями.

3.3.3 Задача устойчивости кругового кольца, подкрепленного нитями, расположенные по сторонам правильного m -угольника

В параграфе рассмотрены два вида подкрепления: центральные нити и нити, расположенные по сторонам правильного m -угольника.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу устойчивости упругого кольца радиуса R , нагруженного внешним давлением P , и подкрепленного упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий. Пусть ϑ – центральный угол, $x(\vartheta) = R \cos \vartheta$, $y(\vartheta) = R \sin \vartheta$ – координаты точек кольца. Введем систему единичных ортов (i, j) , орт j – единичный вектор касательной, орт i – единичный вектор, направленный в сторону внешней нормали. Рассматривается случай плоской деформации кольца, тогда вектор перемещений имеет вид

$$\eta = w(\vartheta)i + v(\vartheta)j,$$

$w(\vartheta)$ – прогиб, $v(\vartheta)$ – касательное перемещение.

Предположим, что кольцо подкреплено нитями одностороннего действия.

Нити являются нерастяжимыми и не воспринимают сжимающих усилий.

Рассматриваются два вида подкрепления: в первом случае один конец нити прикреплен к неподвижному центру кольца, а другой – к некоторой его точке, $\vartheta = \vartheta_i$ – соответствующий угол, таким образом, что расстояние между точками прикрепления нитей не может увеличиваться. Это приводит к ограничениям на перемещения

$$w(\vartheta_j) \leq 0, \quad j \in M_1 = [1..m_1], \quad (3.111)$$

где m_1 – количество таких нитей. Во втором случае один конец нити прикреплен к точке кольца, соответствующей углу $\vartheta_1 = \varepsilon_{1j}$, а второй – к углу $\vartheta_2 = \varepsilon_{2j}$, таким образом, что расстояние между центром кольца и точкой прикрепления нити не может увеличиваться. Пусть

$$\alpha_j = \varepsilon_{2j} - \varepsilon_{1j},$$

$\rho_j = 2R \sin \frac{\alpha_j}{2}$ – расстояние между точками прикрепления нитей до деформации. Обозначим

$$\xi_1 = w(\varepsilon_{1j}), \quad \xi_2 = w(\varepsilon_{2j}), \quad \eta_1 = v(\varepsilon_{1j}), \quad \eta_2 = v(\varepsilon_{2j}).$$

Тогда расстояние между точками после деформации будет равно

$$\begin{aligned} \rho_j^* = & \left(\left(-R \sin \frac{\alpha_j}{2} + \xi_2 \cos \alpha_j - \eta_2 \sin \alpha_j - \xi_1 \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(R \cos \frac{\alpha_j}{2} + \xi_2 \sin \alpha_j - \eta_2 \cos \alpha_j - \eta_1 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Таким образом, для этого подкрепления должно выполняться неравенство

$$\rho_j^* - \rho_j \leq 0, \quad j \in M_2 = [m_1 + 1..m_2]. \quad (3.113)$$

Считая деформации малыми, можно приблизительно предположить

$$\rho_j^* - \rho_j = \sin \frac{\alpha_j}{2} \xi_1 - \cos \frac{\alpha_j}{2} \xi_2 + \cos \frac{\alpha_j}{2} \eta_1 + \sin \frac{\alpha_j}{2} \eta_2, \quad j \in M_2. \quad (3.114)$$

Выражение (3.114) есть первый ненулевой член ряда Тейлора по переменным $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$. Считая деформации кольца плоской, приходим к задаче: найти минимальное значение силы P , при которой вариационная проблема

$$\begin{aligned} J(w) = & \frac{B}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta - \\ & - \frac{P}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - bw^2) d\vartheta \rightarrow \min_w \end{aligned} \quad (3.115)$$

при ограничениях (3.111) – (3.113) имеет нетривиальное решение. В (3.115) $b = 1$ в случае сил внешнего нормального давления (нагрузка все время остается нормальной к деформированной оси кольца), и $b = 2$ в случае центральных сил (нагрузка до и после деформации направлена к неподвижному центру кольца). В (3.115) B – жесткость кольца при изгибе, первый интеграл представляет собой упругую энергию кольца, второй – работу внешних сил [2]. Прогиб $w(\vartheta)$ связан с касательным перемещением $v(\vartheta)$ условием

$$v' = -w. \quad (3.116)$$

Для конечномерной аппроксимации прогиб $w(\vartheta)$ будем приближать интерполяционными кубическими периодическими сплайнами

$$\begin{aligned} S(w, \vartheta) = & w_i(1-t)^2(1+2t) + w_{i+1}t^2(3-2t) + \\ & + m_i ht(1-t)^2 - w_{i+1}ht^2(1-t), \\ t = & h^{-1}(\vartheta - \vartheta_i), \quad t \in [0; 1], \quad h = \vartheta_{i+1} - \vartheta_i = \frac{2\pi}{n}, \end{aligned} \quad (3.117)$$

n – число точек сетки. При этом должны быть выполнены условия периодичности

$$S^{(r)}(w; 0) = S^{(r)}(w; 2\pi), \quad r = 0, 1, 2.$$

Здесь $S^{(r)}$ – производная порядка r .

Введем вектор

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n), z_i = w(\vartheta_i), \quad i \in [0..n].$$

Подставляя сплайн $S(w, \vartheta)$ в (3.115), получаем две квадратичные формы

$$f(z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (s''^2 - 2s'^2 + s^2) d\vartheta = \frac{1}{2}(Az, z) \quad (3.118)$$

и

$$g(z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (s'^2 - bs^2) d\vartheta = \frac{1}{2} (Qz, z) \quad (3.119)$$

(дифференцирование в (3.118) – (3.119) осуществляется по ϑ .) Интегралы от сплайна $S(w; \vartheta)$ и его производных вычисляются с помощью системы MAPLE 13. Используя условие несжимаемости (3.116), запишем

$$v(\vartheta_i) = - \int_0^{\vartheta_i} w(\vartheta) d\vartheta \cong \int_0^{\vartheta_i} s(z, \vartheta) d\vartheta.$$

Для численного интегрирования по формуле трапеций находим

$$v(\vartheta_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i (w_{j-1} + w_j) h = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i (z_{j-1} + z_j) h, \quad (3.120)$$

причем, из условия периодичности можно положить $v_0 = 0$, $v_n = v_0$.

Решение задачи нелинейного программирования

Ограничения (3.111), (3.113), (3.114) образуют конус, определяемый линейными неравенствами

$$(a_j, z) \leq 0, \quad j \in M_1 \cup M_2, \quad (3.121)$$

Если $j \in M_1$, то ограничения (3.121) записываются в виде $z_j \leq 0$. Если же $j \in M_2$, то коэффициенты линейной формы (3.121) определяются следующим образом: $\phi(z) = \rho_j^* - \rho_j$. Полагаем $z_k = 1$, $j_0 \in M_2$, $z_j = 0$, при $j \neq k$. Тогда $a_k = \phi(z) - \phi(0)$. Обозначим через Γ конус, определяемый неравенствами (3.121), и рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum (Az, z) \rightarrow \min_z, \quad (3.122)$$

при ограничениях

$$g(z) = \frac{1}{2} \sum (Qz, z) \rightarrow \min_z, \quad (3.123)$$

$$(a_j, z) \leq 0, \quad j \in M_1 \cup M_2. \quad (3.124)$$

Пусть z_* – решение задачи (3.122) – (3.123).

Тогда по теореме Куна–Таккера найдутся множители Лагранжа λ_* и μ_j , $j \in M_1 \cup M_2$, такие, что

$$Az_* - \lambda_* Qz_* + \sum_{j \in M_1 \cup M_2} \mu_j a_j = 0. \quad (3.125)$$

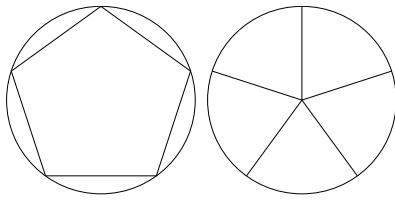


Рис. 3.13: Способ подкрепления: при $M_1 = \emptyset$ и $M_2 \neq \emptyset$ (слева), при $M_1 \neq \emptyset$ и $M_2 = \emptyset$ (справа).

$\mu_j \geq 0$, и выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\mu_j(a_j, z_*) = 0. \quad (3.126)$$

Умножая скалярно (3.125) на z_* , находим $f(z_*) - \lambda_* g(z_*) = 0$, $\|z_*\| > 0$. Так как z_* – решение (3.122) – (3.124), то, очевидно, для всех $\lambda < \lambda_*$ квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \sum (Az, z) - \lambda \frac{1}{2} \sum (Qz, z) > 0$$

для всех $z \in \Gamma$, то есть является условно положительно определенной на конусе Γ . Таким образом, множитель Лагранжа λ_* есть значение безразмерного параметра

$$P_* = \frac{PR^3}{B}$$

критической нагрузки. Задача (3.122) – (3.124) является задачей невыпуклого математического программирования. Для ее решения можно предложить метод последовательных приближений, описанный формулами (2.15) – (2.18). Данный алгоритм является локальным, то есть он сходится к решению задачи (3.122) – (3.124) при удачном выборе начального приближения z_0 .

Обсуждение результатов

Результаты вычислений представлены в таблицах: таблица 5 – случай центральной нагрузки, таблица 6 – случай нормальной нагрузки. Для множества M_1 нити прикрепляются в вершинах правильного m -угольника, для множества M_2 нити расположены по сторонам правильного m -угольника.

Таблица 5. Случай центральной нагрузки

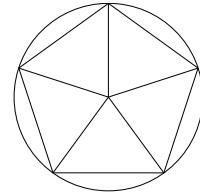


Рис. 3.14: Способ подкрепления: при $M_1 \cup M_2, M_1 \neq \emptyset$ и $M_2 \neq \emptyset$.

m	5	7	10	14	20	25
$M_2 = \emptyset$	7.73	10.84	13.16	15.34	17.99	18.71
$M_1 = \emptyset$	4.92	9.12	13.89	17.98	32.98	43.41
$M_1 \cup M_2$	7.73	12.30	20.31	32.65	53.24	84.96

В диссертации в п.3.3.1 по формуле (3.84) получено точное значение безразмерного критического параметра в случае непрерывного распределения центральных нитей ($M_2 = \emptyset$)

$$P^* = 18.72.$$

Значение критической нагрузки для кольца без подкреплений

$$P^* = 4.5.$$

Таблица 6 . Случай нормальной нагрузки

m	5	7	10	14	20	25
$M_2 = \emptyset$	4.90	5.63	7.19	7.20	7.73	8.001
$M_1 = \emptyset$	3.18	7.20	10.07	14.76	31.03	41.06
$M_1 \cup M_2$	5.41	9.21	17.59	29.30	48.40	79.58

В случае непрерывного распределения центральных нитей ($M_2 = \emptyset$) вдоль обода кольца точное значение критической нагрузки (п.3.3.1)

$$P^* = 8.0.$$

По результатам численных экспериментов при подкреплении кольца центральными нитями для $m \geq 25$, нити можно считать непрерывно распределенными по ободу кольца. Значение критической нагрузки для кольца без подкреплений

$$P^* = 3.0.$$

Таким образом, при малых m подкрепление нитями вдоль сторон правильного многоугольника влияет на значение критической силы. При возрастании m значение критической нагрузки быстро растет.

Таким образом, показано, что значение критической силы значительно возрастает при подкреплении кольца нитями вдоль сторон правильного m -угольника.

Особенно эффективными является комбинированное подкрепление ($M_1 \cup M_2$). При большом количестве нитей подкрепления ($m = 20$) значение критической силы возрастает в почти в 3 раза в случае центральной нагрузки и почти в 7 раз при нормальной нагрузке.

3.4 Устойчивость прямоугольных пластин при односторонних ограничениях на перемещения

Постановка задачи

Пусть прямоугольная пластина нагружена по краям $x = 0, x = a; 0 \leq y \leq b$ нормальными усилиями σ .

Обозначим через $w(x, y), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ прогиб пластины. Тогда в соответствии с допущениями теории Кирхгофа потенциальная энергия деформации пластины имеет вид [15]:

$$U(w) = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b ((\Delta w)^2 - (1 - \nu)L(w, w)) dx dy, \quad (3.127)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ L(w, w) &= 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Работа внешних сил может быть вычислена по формуле [15]

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (3.128)$$

Задача об устойчивости пластины сводится к отысканию сил σ таких, что вариационная проблема

$$U - V \rightarrow \min_w \quad (3.129)$$

имеет нетривиальное решение.

Предположим теперь, что прогиб пластины может быть ограничен жесткими препятствиями так, что

$$\begin{cases} w(x, y_1) \leq 0, & \text{при } x \in [0, a], \\ w(x, y_2) \geq 0, & \text{при } x \in [0, a], \end{cases} \quad (3.130)$$

где y_1, y_2 - фиксированные точки из $(0, b)$.

Функцию w будем аппроксимировать сплайнами [29]

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^{n+2} \sum_{j=0}^{m+2} w_{ij} B_i(x) \tilde{B}_j(y), \quad (3.131)$$

где

$$\begin{aligned}
 x &\in [0, l], \quad l = a, \quad h = \frac{l}{n}, \quad x_i = ih, \\
 B(x) &= \frac{1}{4h^4} \left(\frac{1}{6}x_+^3 - \frac{2}{3}(x-h)_+^3 + (x-2h)_+^3 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3}(x-3h)_+^3 + \frac{1}{6}(x-4h)_+^3 \right), \\
 B_0(x) &= 1 + \frac{1}{h^3} \left(-\frac{1}{6}x_+^3 + \frac{1}{2}(x-h)_+^3 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(x-2h)_+^3 + \frac{1}{6}(x-3h)_+^3 \right), \\
 B_1(x) &= x + \frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{3}x_+^3 + \frac{5}{6}(x-h)_+^3 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3}(x-2h)_+^3 + \frac{1}{6}(x-3h)_+^3 \right), \\
 B_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{h} \left(-\frac{11}{36}x_+^3 + \frac{1}{2}(x-h)_+^3 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4}(x-2h)_+^3 + \frac{1}{18}(x-3h)_+^3 \right), \\
 B_n(x) &= B_2(l-x), \quad B_{n+1}(x) = B_1(l-x), \\
 B_{n+2}(x) &= B_0(l-x), \quad x_+ = \max\{0, x\} = \frac{1}{2}(|x| + x).
 \end{aligned} \tag{3.132}$$

Меняя в определении сплайнов x на y , n на m и полагая $l = b$, получим $\tilde{B}_j(y)$.

Подставляя (3.131) в (3.127) и (3.128) получим две квадратичные формы соответственно

$$\tilde{f}(w_{ij}) = \frac{D}{2} \sum_{i,j} \sum_{k,s} q_{ijks} w_{ij} w_{ks}, \tag{3.133}$$

$$\tilde{g}(w_{ij}) = \frac{\sigma}{2} \sum_{i,j} \sum_{k,s} r_{ijks} w_{ij} w_{ks}. \tag{3.134}$$

Квадратичная функция $\tilde{f}(w_{ij})$ аппроксимирует упругую энергию пластины, $\tilde{g}(w_{ij})$ – работу внешних сил. Коэффициенты q_{ijks} , r_{ijks} есть интегралы по площади пластины от произведений B_i и их производных, в частности

$$r_{ijks} = \int_0^a B'_i(x) B'_k(x) dx \int_0^b \tilde{B}_j(y) \tilde{B}_s(y) dy.$$

Все эти интегралы могут быть вычислены аналитически с использованием системы MAPLE. Обозначим через $f(w_{ij}) = 1/D\tilde{f}(w_{ij})$ и $g(w_{ij}) = 1/\sigma\tilde{g}(w_{ij})$.

Если положить

$$w_{0,j} = 0, \quad w_{2,j} = 0, \quad w_{n,j} = 0, \quad w_{n+2,j} = 0, \quad j \in [1 : m],$$

то при $x = 0, x = a$ будут выполнены граничные условия шарнирного опирания:

$$\begin{cases} w(0, y) = w(a, y) = 0, \\ w_{xx}(0, y) = w_{xx}(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b. \end{cases} \quad (3.135)$$

Если же положить

$$w_{0,j} = 0, \quad w_{1,j} = 0, \quad w_{n+1,j} = 0, \quad w_{n+2,j} = 0, \quad j \in [1 : m]$$

то при $x = 0, x = a$ будут выполнены граничные условия жесткой заделки:

$$\begin{cases} w(0, y) = w(a, y) = 0, \\ w_x(0, y) = w_x(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b. \end{cases} \quad (3.136)$$

Будем предполагать, что при $y = 0; b$ выполнены граничные условия свободного края:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (3.137)$$

Границым условиям свободного края специально удовлетворять не надо, так как коэффициенты $w_{i,0}, w_{i,1}, w_{i,2}, w_{i,m+2}, w_{i,m}, w_{i,m+1}$ находятся в результате решения задачи оптимизации.

Границые условия свободного края являются “неудобными“ в вычислительном отношении, так как они содержат производные третьего порядка.

Потребуем выполнение неравенств (3.130) в конечном числе точек:

$$\begin{cases} w(x_j, y_1) \leq 0, \quad -w(x_j, y_2) \leq 0, \\ x_1 = \frac{1}{4}a, \quad x_2 = \frac{1}{2}a, \quad x_3 = \frac{3}{4}a, \\ y_1 = \frac{1}{3}b, \quad y_2 = \frac{2}{3}b. \end{cases} \quad (3.138)$$

Подставляя (3.131) в (3.138) получим систему линейных неравенств, которым должны удовлетворять коэффициенты w_{ij} . Запишем эти неравенства в виде

$$\sum_{k=1}^6 b_{ijk} w_{ij} \leq 0. \quad (3.139)$$

Обозначим через Γ конус, определяемый неравенствами (3.139). Таким образом, вместо (3.129) – (3.130) получаем задачу отыскания минимального числа λ^* , такого, что задача нелинейного программирования

$$f(w_{ij}) - \lambda^* g(w_{ij}) \rightarrow \min_{w_{ij} \in \Gamma} \quad (3.140)$$

имеет нетривиальное решение. Она сводится к проблеме идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах.

Обсуждение результатов

n, m в формуле (3.131) выбирались путем численных экспериментов. При $n = m = 40$ и $n = m = 50$ результаты численных экспериментов совпадали с точностью до двух значащих цифр.

$$B_i(x) = B(x - (i - 3)h), \quad i = 3..n - 1,$$

Результаты вычислений приведены в таблице 7.

Таблица 7. Значения критической силы σ^*

при различных граничных условиях.

	I	II	III	IV
$b = 1$	21.95	32.21	51.49	8.98
$b = 0.5$	60.40	69.44	91.85	5.37
Теор.	$\pi^2 \approx$ ≈ 9.87	$2\pi^2 \approx$ ≈ 19.74	$4\pi^2 \approx$ ≈ 39.48	$\pi^2/4 \approx$ ≈ 2.47
Прибл.	9.98	20.24	39.98	2.44

В таблице приведены значения критического параметра $\sigma^* = D^{-1}\sigma$ при $a = 1$ для различных видов граничных условий: I – граничные условия шарнирного опирания (3.136), II – смешанные граничные условия, когда на левом крае $x = 0$ выполнены условия (3.135), на правом – условия жесткой заделки (3.136), III – граничные условия жесткой заделки (3.136), IV – при $x = 0; a, 0 \leq y \leq b$ –

граничные условия шарнирного опирания и при $0 \leq x \leq a, y = 0; b$ граничные условия свободного края. В двух последних строках таблицы представлены значения σ^* без ограничений на перемещения, вычисленные теоретически согласно формулам ([15], стр.22-23) (предпоследняя строка) и методом, рассмотренным выше (последняя строка).

Из сравнения результатов 4 и 5 строки таблицы можно сделать вывод, что редукция вариационной задачи к задаче квадратичного программирования при помощи сплайнов является адекватной и служит проверкой того, что аппроксимация задачи является достаточно точной. Так как при отсутствии ограничений на перемещения при граничных условиях свободного края при $y = 0, b$ решение задачи $w(x, y)$ не зависит от y (см. рис. 3.15 (справа)), то точные значения критических сил совпадают с эйлеровыми силами для стержней ([15], стр.22) и не зависят от b . При наличии односторонних ограничений на перемещения значения критических сил зависят от b . Влияние односторонних связей на перемещения (неравенства (3.130)) является существенным и могло быть использовано для повышения несущей способности сжимаемых по кромкам пластин.

Различие в формах равновесия при наличии и отсутствии ограничений на перемещения проиллюстрировано на рис.3.15.

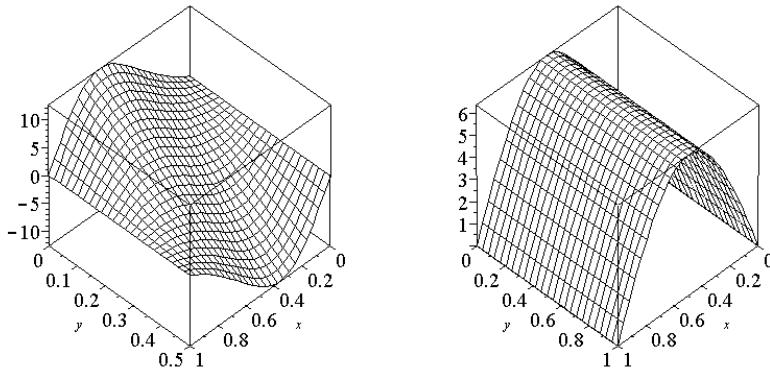


Рис. 3.15: Форма равновесия пластины после потери устойчивости при наличии односторонних ограничений на перемещения (слева) и без ограничений на перемещения (справа)

Численные эксперименты показали, что выполнение ограничений (3.138) в нашем случае гарантируют выполнение неравенств (3.130).

3.5 Устойчивость оболочек вращения

Расчет на устойчивость оболочек является наиболее сложной в механике тонкостенных конструкций. При различных подходах к упрощению уравнений равновесия получаются различные результаты. Также при анализе устойчивости оболочек очень важным моментом является выбор метода аппроксимации искомых функций. Устойчивость тонкостенных оболочек описана во многих работах, например, [22], [24], [31], [49], [71], [72], [73]. Также в работах [24], [49] отмечена необходимость использования нелинейной теории оболочек при анализе их устойчивости. В [24], [63] используется квадратичная аппроксимация уравнений равновесия торообразной оболочки с последующим решением уравнений разветвления.

В настоящей главе приводятся результаты численного анализа устойчивости торообразной и сферической оболочек, при этом используется вариационный подход. Для вычисления работы внешних сил применяется точная термодинамическая формула: $A = P\delta V$, где P – внешнее нормальное давление, δV – изменение объема оболочки в результате деформации. Также вычисление упругой энергии деформации основано на изменении первой и второй квадратичных форм поверхности оболочки в результате деформации.

Постановка задачи

Предположим, что оболочка вращения, срединную поверхность которой обозначим через S , в результате деформации приобрела форму \tilde{S} . Обозначим через g_{ij} , h_{ij} , \tilde{g}_{ij} , \tilde{h}_{ij} , $i, j = 1, 2$ коэффициенты первой и второй квадратичных форм недеформированной и деформированной поверхности соответственно.

Предполагается, что деформация является осесимметричной. Согласно [55] энергию деформации, связанную с переходом из состояния S в состояние \tilde{S} , можно вычислить по формуле:

$$U_s = \int \int \Phi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2) ds, \quad (3.141)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1 = & \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2) + \\ & + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2),\end{aligned}\quad (3.142)$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ε_1 и ε_2 – экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum_{i,j=1}^2(\tilde{g}_{ij} - g_{ij})du_i du_j}{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}du_i du_j}, \quad (3.143)$$

κ_1 и κ_2 – экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum_{i,j=1}^2(\tilde{h}_{ij} - h_{ij})du_i du_j}{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}du_i du_j}. \quad (3.144)$$

Пусть S является поверхностью, образованной вращением некоторой кривой γ вокруг оси Z :

$$x = \varphi(\theta), \quad z = \psi(\theta). \quad (3.145)$$

Здесь θ – полярный угол в плоскости меридиана. Тогда уравнения поверхности вращения будут иметь вид [55]

$$\begin{cases} x = \varphi(\theta) \cos \lambda, \\ y = \varphi(\theta) \sin \lambda, \\ z = \psi(\theta), \end{cases} \quad (3.146)$$

где λ обозначен угол в плоскости параллельного круга и $0 \leq \theta \leq \theta_1, 0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Предполагается, что деформация оболочки является осесимметричной. В общем случае первая и вторая квадратичная формы поверхности вращения будут иметь вид [55]

$$\begin{cases} I = (\varphi'^2 + \psi'^2) d\theta^2 + \varphi^2 d\lambda^2, \\ II = \left(\frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \right) d\theta^2 + \frac{\psi'\varphi}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} d\lambda^2. \end{cases} \quad (3.147)$$

3.5.1 Устойчивость торообразной оболочки

Рассмотрим задачу устойчивости тора, нагруженного внешним нормальным давлением.

Обозначим через $w(\theta)$ и $u(\theta)$ нормальное и касательное перемещения точек поверхности тора. Декартовы координаты до деформации будут определяться уравнениями

$$\begin{cases} x = (R + a \cos \theta) \cos \lambda, \\ y = (R + a \cos \theta) \sin \lambda, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \lambda \leq 2\pi. \\ z = a \sin \theta, \end{cases} \quad (3.148)$$

т.е. для недеформированного тора $\varphi = R + a \cos \theta$, $\psi = a \sin \theta$.

После деформации уравнения поверхности будут иметь вид (3.146), где

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = R + (a + w(\theta)) \cos \theta - u(\theta) \sin \theta, \\ \psi(\theta) = (a + w(\theta)) \sin \theta - u(\theta) \cos \theta. \end{cases} \quad (3.149)$$

Будем исследовать потерю устойчивости по осесимметричной форме, когда образующиеся выпучины имеют вид кольцевых складок в направлении координаты λ (перемещения не зависят от λ).

Для поверхности вращения первая и вторая квадратичная формы поверхности записываются в виде (3.147). Для недеформированной поверхности:

$$\begin{cases} I_0 = a^2 d\theta^2 + (R + a \cos \theta)^2 d\lambda^2, \\ II_0 = ad\theta^2 + \cos \theta (R + a \cos \theta) d\lambda^2. \end{cases} \quad (3.150)$$

Используя формулы (3.143), (3.144), (3.147), (3.148), (3.150) можно получить выражения для деформаций ε_1 , ε_2 и кривизн κ_1 , κ_2 . Квадратичные формы I и II в случае осесимметричной деформации имеют диагональный вид. Поэтому

мы

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{\varphi'^2 + \psi'^2 - a^2}{a^2}, \\ \varepsilon_2 = \frac{\varphi^2 - (R + a \cos \theta)^2}{(R + a \cos \theta)^2}, \\ \kappa_1 = \frac{\psi'' \varphi' - \psi' \varphi''}{a^2 \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} - \frac{1}{a}, \\ \kappa_2 = \frac{\psi' \varphi - \cos \theta (R + a \cos \theta) \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\cos^2 \theta (R + a \cos \theta)^2 \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}. \end{array} \right. \quad (3.151)$$

Для внешнего нормального давления в соответствии с теоремой Эйлера–Бернули работа внешних сил равна

$$A = P \Delta V, \quad (3.152)$$

где ΔV – изменение объема оболочки в результате деформации.

Как известно [77], объем тела, поверхность которого задается уравнениями

$$x = x(\theta, \lambda), \quad y = y(\theta, \lambda), \quad z = z(\theta, \lambda),$$

определяется (с точностью до знака)

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\lambda & y'_\lambda & z'_\lambda \end{bmatrix} d\theta d\lambda. \quad (3.153)$$

В случае осесимметричной деформации определитель в (3.153) не зависит от λ .

Используя формулы (3.146), (3.148), (3.149), (3.152) объем оболочки после деформации можно вычислить по формуле:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{2\pi} \Phi_2(w, u, w', u') d\theta, \quad (3.154)$$

где

$$\Phi_2 = \det \|a_{ij}\|, \quad i, j \in 1 : 3,$$

элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ имеют вид

$$a_{11} = R + a \cos \theta + w(\theta) \cos \theta - u(\theta) \sin \theta,$$

$$a_{13} = a \sin \theta + w(\theta) \sin \theta + u(\theta) \cos \theta,$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -a \sin \theta + w'(\theta) \cos \theta - w(\theta) \sin \theta - u'(\theta) \sin \theta - u(\theta) \cos \theta, \\
a_{23} &= a \cos \theta + w'(\theta) \sin \theta + w(\theta) \cos \theta + u'(\theta) \cos \theta - u(\theta) \sin \theta, \\
a_{32} &= R + a \cos \theta + w(\theta) \cos \theta - u(\theta) \sin \theta, \\
a_{12} &= 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{33} = 0.
\end{aligned}$$

Полная энергия деформации будет иметь вид

$$J = J_1 - PJ_2,$$

где

$$\begin{aligned}
J_1 &= 2\pi \int_0^{2\pi} \Phi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2) a(R + a \cos \theta) d\theta, \\
J_2 &= \Delta V.
\end{aligned}$$

В устойчивом положении равновесия полная энергия принимает минимальное значение. Таким образом, приходим к вариационной задаче

$$J \rightarrow \min_{w,u}, \quad (3.155)$$

где функции w, u удовлетворяют условиям периодичности.

Численный метод

Будем аппроксимировать перемещения $w(\theta)$ и $u(\theta)$ интерполяционными кубическими сплайнами [29]

$$S(f; \theta_i) = f_i, \quad \theta_i = 2\pi i/n, \quad i \in [1 : n],$$

где

$$f_i = w(\theta_i) \text{ или } f_i = u(\theta_i).$$

Сплайн $S(f; \theta)$ для $\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]$ задается формулой

$$\begin{aligned}
S(f; \theta_i) &= f_i(1-t^2)^2(1+2t) + f_{i+1}t^2(3-2t) + \\
&+ m_i ht(1-t)^2 - m_{i+1}ht^2(1-t),
\end{aligned} \quad (3.156)$$

где $h = 2\pi/n$, $t = (\theta - \theta_i)/h$. В (3.156) неизвестными являются коэффициенты m_i , которые определяются из условий непрерывности второй производной

функции $S(f; \theta)$ в узлах сплайна. Также сплайн должен удовлетворять условиям периодичности, которые приводят к равенствам:

$$f_0 = f_n, \quad f_{n+1} = f_1, \quad m_0 = m_n.$$

Таким образом, для определения коэффициентов m_1, m_2, \dots, m_n необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_n = c_1, \\ \frac{1}{2}m_{i-1} + 2m_i + \frac{1}{2}m_{i+1} = c_i, \quad i \in [2; n-1], \\ \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_{n-1} + 2m_n = c_n, \end{cases} \quad (3.157)$$

где

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{3}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1}), \quad i \in [2; n-1], \\ c_1 &= \frac{3}{2h}(f_2 - f_n), \\ c_n &= \frac{3}{2h}(-f_1 + f_{n-1}). \end{aligned}$$

Пусть $\xi \in R^n$, $\xi_1 = f_1, \dots, \xi_n = f_n$, и

$$\eta \in R^n, \quad \eta_1 = m_1, \dots, \eta_n = m_n.$$

Введем матрицы порядка n .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.158)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.159)$$

$$\xi = A^{-1}B\eta. \quad (3.160)$$

Формула (3.160) в вычислительном отношении экономична, ибо матрицу $A^{-1}B$ необходимо находить всего один раз.

Пусть $y \in R^m$, $m = 2n$ и

$$y_i = w(\theta_i), \quad y_{i+n} = u(\theta_i), \quad i \in 1 : n.$$

Таким образом, подставляя интерполяционные сплайны в функционал полной энергии, вместо вариационной задачи получим задачу минимизации

$$f(y) \rightarrow \min_{y \in R^m}, \quad (3.161)$$

которую будем решать методом сопряженных градиентов [60]. Здесь

$$f(y) = J(S(w), S(u)).$$

Пусть y_k – некоторое начальное приближение.

$$\mathbf{g}_0 = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y} \quad (3.162)$$

– градиент функции $f(y)$. Пусть уже получена точка $y_k \in R^m$. Если

$$r_k = \left\| \frac{\partial f(y_k)}{\partial y} \right\| = 0,$$

то выполнено необходимое условие минимума, и процесс прекращается. Если же

$$r_k > 0,$$

то на лучше

$$y_k(\alpha) = y_k - \alpha g_k, \quad \alpha \geq 0.$$

Найдем точку $y_k(\alpha)$ такую, что

$$f(y_k(\alpha)) = \min_{\alpha \geq 0} f(y_k(\alpha)), \quad (3.163)$$

где

$$g_k = \frac{\partial f(y_k)}{\partial y} + \beta_k g_{k-1},$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0, & k = 0; m; 2m; \dots, \\ r_k^2/r_{k-1}^2, & k \neq 0; m; 2m; \dots. \end{cases} \quad (3.164)$$

Если Лебегово множество

$$D(y_0) = \{y_0 \in R^m | f(y) \leq f(y_0)\}$$

ограничено, то любая предельная точка последовательности $\{y_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ является стационарной точкой функции $f(y)$ на R^m , т.е. если $y_{k_s} \rightarrow y_*$ при $k_s \rightarrow 0$, то

$$r_* = \left\| \frac{\partial f(y_*)}{\partial y} \right\| = 0.$$

Кроме того, известно, что метод сопряженных градиентов обладает "квадратичной" скоростью сходимости [60]. Задача одномерной минимизации на лучше решалась методом золотого сечения.

Обсуждение результатов

На рис.3.16 представлена зависимость максимального перемещения оболочки ($y_{max} = \max_{i \in 1:n} \sqrt{w_i^2 + u_i^2}$ – вдоль вертикальной оси) от внешнего нормального давления (\tilde{P} – по горизонтальной оси) при параметрах

$$R = 200, \quad a = 80, \quad h = 1.28, \quad \tilde{P} = 1000 \frac{P}{D}.$$

Из графика можно сделать вывод, что вначале перемещение растет линейно с увеличением \tilde{P} , а начиная с некоторого значения, максимальное перемещение оболочки резко возрастает. Таким образом, кривая зависимости максимального перемещения от параметра \tilde{P} хорошо аппроксимируется гиперболой

$$F(t) = \frac{c_1 t^2 + c_2 t + c_3}{c_4 t + 1},$$

где $t = \tilde{P}$, $F(t)$ – максимальное перемещение. При заданных выше параметрах коэффициенты c_i имеют значения

$$c_1 = 2.6467, \quad c_2 = 0.0554, \quad c_3 = 0.1386, \quad c_4 = -5.3320.$$

Критическим следует считать то значение \tilde{P}_* , после которого $F(t)$ начинает резко возрастать. Из рис.3.16 видно, что $\tilde{P}_* \cong 0.13$.

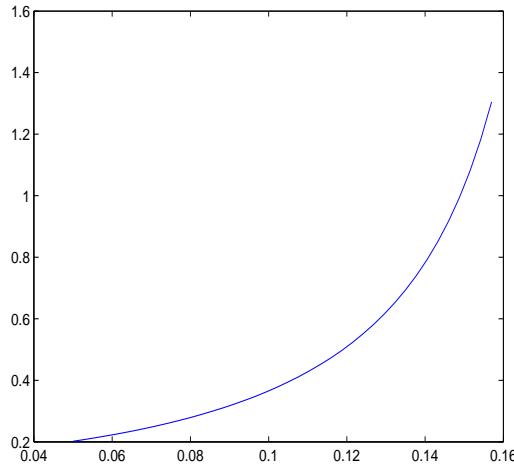


Рис. 3.16: Зависимость максимального перемещения торообразной оболочки от внешнего нормального давления.

При $E = 2.05 \times 10^6$ кг/см² $\nu = 0.3$ критическое давление

$$P_* = \frac{0.13Eh^3}{12(1-\nu^2)1000} = \frac{0.13E \times 1.28^3}{12(1-\nu^2)1000} = 52.42.$$

В [15] приведены результаты экспериментов над стальными жестко закрепленными тороидальными оболочками. В введенных обозначениях

$$k = \frac{a}{R}, \quad \psi = \frac{(1-\nu^2)pa}{Eh}$$

при

$$k = 0.4, \quad a/h = 62.5, \quad R = 200, \quad a = 80, \quad h = 1.28$$

экспериментально получено значение

$$\psi = 0.32 \times 10^{-3},$$

что соответствует давлению $P = 11.81$. При

$$k = 0.4, \quad a/h = 33, \quad R = 200, \quad a = 80, \quad h = 2.4242,$$

$$\psi = 0.53 \times 10^{-3},$$

что соответствует давлению $P = 37.06$. Значение P_* , полученное решением задачи оптимизации (3.161), равно

$$P_* = 164.39.$$

При этом отношение

$$P_*/P = 4.4357.$$

Наконец, при

$$k = 0.2, \quad a/h = 62.5, \quad R = 400, \quad a = 80, \quad h = 1.28$$

$$\psi = 0.3 \times 10^{-3},$$

$$P_* = 32.26, \quad P = 11.07, \quad P_*/P = 2.91.$$

Таким образом, критическое давление, полученное в результате анализа вариационной задачи, от трех до пяти раз превышает экспериментальные значения. Однако, при сравнительном анализе рисунков в [15] на стр. 677 можно сделать вывод, что критическая деформация не является осесимметричной, то есть зависит от угла λ в плоскости параллельного круга. Задача об устойчивости тороидальной оболочки также рассматривалась в [24].

3.5.2 Устойчивость сферической оболочки

Обозначим через $w(\theta)$ и $u(\theta)$ нормальное и касательное перемещения точек оболочки. Декартовы координаты точек сферы будут определяться уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(\theta) = (R + w) \sin \theta - u \cos \theta, \\ z = \psi(\theta) = (R + w) \cos \theta + u \sin \theta. \end{cases} \quad (3.165)$$

Используя формулы (3.143), (3.144), (3.147), (3.150), (3.165), можно полу-

чить нелинейные выражения для деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и кривизн κ_1, κ_2 [2]

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{1}{R} \left(2w - 2u' \right) + \\ + \frac{1}{R^2} \left(w^2 + u^2 + 2w'u + w'^2 - 2u'w + u'^2 \right), \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(2w - 2u \operatorname{ctg} \theta \right) + \\ + \frac{1}{R^2} \left(w^2 - 2wu \operatorname{ctg} \theta + u^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \right), \\ \kappa_1 = \frac{1}{R} + \frac{1}{RK} \left(3u' + w'' - R - 2w \right) + \\ + \frac{1}{R^2 K} \left(3wu' - u^2 - w^2 - 3uw' + u''u - 2w'^2 \right) + \\ + \frac{1}{R^2 K} \left(u''w' - 2u'^2 + w''w' - w''u' \right), \\ \kappa_2 = \frac{1}{RK} \left(2w - u' + R - 2u \operatorname{ctg} \theta - w' \operatorname{ctg} \theta \right) + \\ + \frac{1}{R^2 K} \left(w^2 - wu' + uu' \operatorname{ctg} \theta - 2wu \operatorname{ctg} \theta \right) + \\ + \frac{1}{R^2 K} \left(uw' \operatorname{ctg}^2 \theta + u^2 \operatorname{ctg}^2 \theta - ww' \operatorname{ctg} \theta \right). \end{array} \right.$$

В приведенных выше формулах введено обозначение

$$K = (R^2 + 2Rw + w^2 + u^2 - 2Ru' - 2wu' + 2uw' + w'^2 + u'^2)^{1/2}.$$

Для вычисления работы внешних сил применим формулы (3.152), (3.153). Объем оболочки после деформации вычисляется по формуле [3]:

$$\tilde{V} = \frac{\pi}{3} \int_0^\pi \Phi_2 \left(\theta, w, u, w', u' \right) d\theta,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_2 \left(\theta, w, u, w', u' \right) &= w^3 \sin \theta + w^2 \left(3R - u' \right) \sin \theta + \\ &+ w \left(uw' - 2Ru' + u^2 + 3R^2 \right) \sin \theta + R \left(u^2 + uw' \right) \sin \theta + \\ &+ R^3 \sin \theta + \left(wuu' - w^2u - 2Rwu - u^2w' - u^3 + Ruu' \right) \cos \theta. \end{aligned}$$

В устойчивом положении равновесия полная энергия принимает минимальное значение. Таким образом, приходим к вариационной задаче

$$J = \int_0^\pi \tilde{F} \left(\theta, w, u, w', u', w'' \right) d\theta \rightarrow \min_{w,u},$$

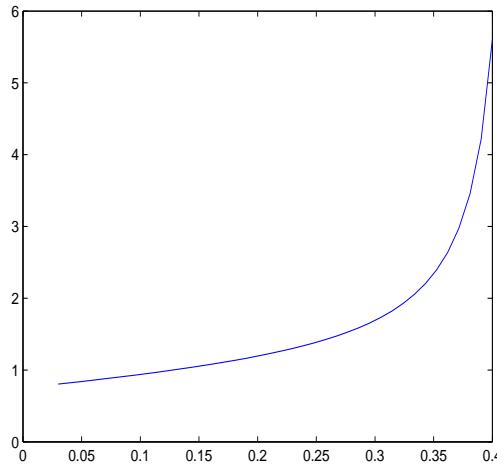


Рис. 3.17: Зависимость максимального перемещения сферической оболочки от внешнего нормального давления.

где $\tilde{F} = \Phi_1 - P\Phi_2$.

На рис. 3.17 приведен график зависимости максимального перемещения y_{max} сферической оболочки от внешнего нормального давления \tilde{P} при $R = 80$, $h = 1.28$. Из графика можно сделать вывод, что $\tilde{P}_{kp} = 0.35$, это соответствует при $E = 2.05 \times 10^6$ и $\nu = 0.3$ критическому значению $P_{kp} = 137.79 \text{ кг}/\text{см}^2$. Теоретическая формула для верхнего критического давления, полученная на основании упрощенной теории тонких пологих оболочек [15], дает значение

$$q_b = 1.21E(h/R)^2 = 635.008.$$

Заметим, что там же в [15] на стр.666 указано, что для отношения $R/h \leq 250$ критическое давление следует вычислять по формуле

$$q = 0.3E(h/R)^2.$$

Используя эту формулу, получаем $q = 155.44$, что дает достаточно хорошее совпадение с ранее полученным результатом $P_{kp} = 137.79$.

Глава 4

Линейные и нелинейные колебания прямоугольных пластин

В главе исследуются линейные и нелинейные колебания прямоугольных пластин. Предлагается схема решения линейной задачи, основанная на методе разделения переменных, а также схема нелинейной задачи, основанная на аппроксимации функции напряжения и прогиба пластины методом конечных разностей. Анализируются результаты численных экспериментов, проводится сравнение с аналитическими решениями.

Трудно назвать такую область техники, в которой не была бы актуальной проблема изучения упругих колебаний. В большинстве случаев для изучения колебаний используются линейные дифференциальные уравнения. Однако часто необходимо использовать нелинейные уравнения (особенно при изучении колебаний пластин и оболочек). В некоторых задачах теории пластин (а также и оболочек) пользуются теорией Кирхгофа, пренебрегающей напряжениями в срединной поверхности (линейная теория); в других задачах учитываются одновременно напряжения в срединной поверхности и напряжения изгиба (нелинейная задача). С точки зрения физики нелинейность колебаний характеризуется ангармоничностью и неизохронностью. Однако учет влияния нелинейных слагаемых иногда приводит к неожиданным эффектам: например эффект возврата Ферми-Пасты-Улама (ФПУ). Влияние напряжений в срединной поверхности на свободные колебания пластин к настоящему времени изучено все еще недостаточно, по-видимому это связано с трудностями анализа вычислительных экспериментов, хотя сейчас разработаны достаточно эффективные численные методы решения нелинейных уравнений.

Уравнения колебаний прямоугольных пластин

Предполагается, что пластина является прямоугольной, т.е.

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

а также свободно оперта по своим краям, и точки срединной поверхности сво-

бодно перемещаются в координатной плоскости $X0Y$. Тогда граничные условия можно записать:

$$\begin{cases} w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0, & \frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a, y, t)}{\partial x^2} = 0, \\ w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0, & \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w(x, b, t)}{\partial y^2} = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi(0, y, t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi(a, y, t)}{\partial y^2} = 0, & \frac{\partial^2 \varphi(0, y, t)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(a, y, t)}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, 0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x, b, t)}{\partial x^2} = 0, & \frac{\partial^2 \varphi(x, 0, t)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(x, b, t)}{\partial x \partial y} = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Граничные условия (4.2) означают отсутствие нормальных и касательных напряжений на краях пластины.

Кроме того должны быть заданы начальные условия

$$w(x, y, 0) = u(x, y), \quad \frac{dw(x, y, 0)}{dt} = v(x, y). \quad (4.3)$$

Для решения системы уравнений применялся метод конечных разностей.

Известно, что учет напряжений в срединной поверхности в теории пластин приводит к уравнениям Кармана

$$\begin{cases} \frac{D}{h} \Delta \Delta w = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \\ \frac{1}{E} \Delta \Delta \varphi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \end{cases} \quad (4.4)$$

где $w = w(x, y, t)$ – прогиб, $\varphi = \varphi(x, y, t)$ – функция напряжений, $D = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, h_0 – толщина пластины, x, y – координаты точек срединной поверхности пластины, t – время,

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \Delta \Delta w = \frac{\partial w^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

– операторы Лапласа и бигармонический оператор.

Пусть $w = w(x, y, t)$ – решение системы уравнений (4.4).

Для конечномерной аппроксимации задачи (4.1) – (4.4) применим метод сеток. Введем обозначения:

$$x_i = ih_x, \quad i \in 0..M, \quad y_j = jh_y, \quad j \in 0..N,$$

$$w_{i,j,k} = w(x_i, y_j, t_k), \varphi_{i,j,k} = \varphi(x_i, y_j, t_k), h_x = \frac{a}{M}, h_y = \frac{b}{N}.$$

Производные аппроксимируем конечноразностными отношениями

$$\frac{\partial w^2(x_i, y_j, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{w_{i+1,j,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k}}{h_x^2} = L_1(w_{i,j,k}), \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 w(x_i, y_j, t_k)}{\partial y^2} = \frac{w_{i,j+1,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j-1,k}}{h_y^2} = L_2(w_{i,j,k}), \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 w(x_i, y_j, t_k)}{\partial x \partial y} \approx \frac{w_{i+1,j+1,k} - w_{i-1,j,k} - w_{i,j-1,k} + w_{i-1,j-1,k}}{4h_x h_y} = L_3(w_{i,j,k}). \quad (4.7)$$

Для упрощения формул и расчетных схем далее будем считать, что

$$h_x = h_y = h,$$

(этого всегда можно добиться за счет выбора чисел M и N , при условии, что a и b соизмеримы). Тогда сеточный бигармонический оператор будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta\Delta}w_{i,j,k} &= \widetilde{\Delta\Delta}w(x_i, y_j, t_k) = \\ &\frac{1}{h^4}(20w_{i,j,k} - 8(w_{i,j+1,k} + w_{i+1,j,k} + w_{i-1,j,k} + w_{i,j-1,k}) + \\ &+ 2(w_{i+1,j+1,k} + w_{i+1,j-1,k} + w_{i-1,j-1,k} + w_{i-1,j+1,k}) + \\ &(w_{i,j+2,k} + w_{i+2,j,k} + w_{i-2,j,k} + w_{i,j-2,k})). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поскольку функции прогиба и напряжений зависят также и от времени t , то неявная разностная схема для системы уравнений (4.4) – (4.2) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta\Delta}\varphi_{i,j,k+1} &= E \left(\frac{w_{i+1,j+1,k+1} - w_{i-1,j,k+1} - w_{i,j-1,k+1} + w_{i-1,j-1,k+1}}{4h^2} \right)^2 - \\ &- E \frac{w_{i+1,j,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i-1,j,k+1}}{h^2} \times \frac{w_{i,j+1,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i,j-1,k+1}}{h^2}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{h_0} \widetilde{\Delta\Delta}w_{i,j,k+1} &= -\rho \frac{w_{i,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k-1}}{h_t^2} + \\ &+ \frac{\varphi_{i,j+1,k+1} - 2\varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i,j-1,k+1}}{h^2} \times \frac{w_{i+1,j,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i-1,j,k+1}}{h^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{w_{i,j+1,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i,j-1,k+1}}{h^2} \times \frac{\varphi_{i+1,j,k+1} - 2\varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i-1,j,k+1}}{h^2} - \\
& 2 \frac{w_{i+1,j+1,k+1} - w_{i-1,j,k+1} - w_{i,j-1,k+1} + w_{i-1,j-1,k+1}}{4h^2} \times \\
& \times \frac{\varphi_{i+1,j+1,k+1} - \varphi_{i-1,j,k+1} - \varphi_{i,j-1,k+1} + \varphi_{i-1,j-1,k+1}}{4h^2}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Уравнения (4.9) – (4.10) справедливы при

$$2 \leq i \leq M-2, \quad 2 \leq j \leq N-2, \quad k \geq 3.$$

Границные условия (4.1) дают равенства

$$w_{0,j,k} = w_{M,j,k} = 0, \quad w_{2,j,k} = 2w_{1,j,k}, \quad w_{M-2,j,k} = 2w_{M-1,j,k}, \tag{4.11}$$

$$w_{i,0,k} = w_{i,N,k} = 0, \quad w_{i,2,k} = 2w_{i,1,k}, \quad w_{i,N-2,k} = 2w_{i,N-1,k}, \tag{4.12}$$

а граничные условия (4.2) дают при $0 \leq j \leq N, 0 \leq i \leq M$

$$\varphi_{0,j,k} - 2\varphi_{1,j,k} + \varphi_{2,j,k} = 0, \quad \varphi_{M,j,k} - 2\varphi_{M-1,j,k} + \varphi_{M-2,j,k} = 0, \tag{4.13}$$

$$\varphi_{i,0,k} - 2\varphi_{i,1,k} + \varphi_{i,2,k} = 0, \quad \varphi_{i,N,k} - 2\varphi_{i,N-1,k} + \varphi_{i,N-2,k} = 0, \tag{4.14}$$

$$\varphi_{i+1,2,k} + \varphi_{i-1,0,k} - \varphi_{i-1,2,k} - \varphi_{i+1,0,k} = 0, \tag{4.15}$$

$$\varphi_{i-1,N-2,k} + \varphi_{i-1,N,k} - \varphi_{i+1,N-2,k} + \varphi_{i-1,N,k} = 0, \tag{4.16}$$

$$1 \leq i \leq M-1.$$

$$\varphi_{2,j+1,k} + \varphi_{0,j-1,k} - \varphi_{0,j+1,k} - \varphi_{2,j-1,k} = 0, \tag{4.17}$$

$$\varphi_{M,j+1,k} + \varphi_{M,j-1,k} - \varphi_{M-2,j-1,k} - \varphi_{M,j-1,k} = 0, \tag{4.18}$$

$$1 \leq j \leq N-1.$$

Границные условия (4.15) – (4.18) не все являются различными. Одни и те же равенства получаются, если в (4.15) подставить $i = 1$, а в (4.17) $j = 1$, также

(4.16) при $i = M - 1$ совпадает с (4.18) при $j = N - 1$, (4.16) при $i = 1$ совпадает с (4.17) при $j = N - 1$, (4.16) при $i = M - 1$ совпадает с (4.17) при $j = N - 1$. Это связано с тем, что функция $\varphi(x, y)$ из уравнений (4.4) может быть определена с точностью до произвольной афинной функции двух переменных вида

$$\varphi_0(x, y) = a + bx + cy.$$

Ясно, что можно потребовать выполнение равенств

$$\varphi_{0,0,k} = \varphi_{M,0,k} = \varphi_{0,N,k} = \varphi_{M,N,k} = 0. \quad (4.19)$$

Строго говоря, можно написать только любые три равенства из четырех, выполнение же четвертого следует из отсутствия касательных напряжений на кромках пластины.

Начальные условия (4.3) дают равенства

$$\varphi_{i,j,1} = u(x_i, y_j), \quad \varphi_{i,j,2} = \varphi_{i,j+1,1} + h_t v(x_i, y_j).$$

Пусть уже получены значения

$$\varphi_{i,j,k}, \quad w_{i,j,k}, \quad i \in 0..M, j \in 0..N, k \geq 2.$$

Введем векторы

$$\Phi(k) = \varphi_{i,j,k}, \quad W(k) = w_{i,j,k}, \quad i \in 0..M, j \in 0..N, k \geq 2.$$

Систему уравнений (4.10) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{D}{h_0} \widetilde{\Delta\Delta} w_{i,j,k+1} + \rho \frac{w_{i,j,k+1}}{h_t^2} = \rho \frac{2w_{i,j,k} - w_{i,j,k-1}}{h_t^2} + \\ & + \frac{\varphi_{i,j+1,k+1} - 2\varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i,j-1,k+1}}{h^2} \times \frac{w_{i+1,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k+1}}{h^2} + \\ & + \frac{w_{i,j+1,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i,j-1,k+1}}{h^2} \times \frac{\varphi_{i+1,j,k+1} - 2\varphi_{i,j,k+1} + \varphi_{i-1,j,k+1}}{h^2} - \\ & - 2 \frac{w_{i+1,j+1,k+1} - w_{i-1,j,k+1} - w_{i,j-1,k+1} + w_{i-1,j-1,k+1}}{4h^2} \times \\ & \times \frac{\varphi_{i+1,j+1,k+1} - \varphi_{i-1,j,k+1} - \varphi_{i,j-1,k+1} + \varphi_{i-1,j-1,k+1}}{4h^2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Обозначим через

$$NL_{ij}(w_{i,j,k+1}, \varphi_{i,j,k+1}; w_{i,j,k}, w_{i,j,k})$$

– правую часть системы уравнений (4.20), а через

$$\widetilde{NL}_{ij}(w_{i,j,k+1}, \varphi_{i,j,k+1})$$

правую часть системы уравнений (4.9); (NL_{ij} , $\widetilde{NL}(ij)$ – нелинейные операторы).

Тогда итерационная схема будет иметь вид:

$$\frac{D}{h_0} \widetilde{\Delta\Delta} w_{i,j,k+1}^{l+1} + \rho \frac{w_{i,j,k+1}^{l+1}}{h_t^2} = NL_{ij}(w_{i,j,k+1}^l, \varphi_{i,j,k+1}^l; w_{i,j,k}, w_{i,j,k}), \quad (4.21)$$

$$\widetilde{\Delta\Delta} \varphi_{i,j,k+1}^{l+1} = \widetilde{NL}_{ij}(w_{i,j,k+1}^l, \varphi_{i,j,k+1}^l), \quad (4.22)$$

$$2 \leq i \leq M-2, \quad 2 \leq j \leq N-2.$$

причем должны быть выполнены граничные условия (4.11) – (4.20),

т.е. $w_{i,j,k+1}^{l+1}$ должны удовлетворять равенствам (4.11) – (4.12), а $\varphi_{i,j,k+1}^{l+1}$ равенствам (4.13) – (4.20).

При проведении численных расчетов рассматривалась пластина со следующими параметрами:

$$E = 5000; \quad \rho = 0, 3; \quad \nu = 0, 3; \quad h = 0, 2; \quad a = b = 10.$$

В методе конечных разностей при аппроксимации в области вводилась сетка с числом точек $M = 40$ и $N = 40$ вдоль осей X и Y соответственно.

На рис.4.1 показано как ведет себя решение нелинейной задачи. В качестве начальных условий была принята функция

$$w_0 = 0.2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b},$$

график которой представлен первым (при $t = 0$) на рис.4.1. Видно, что вначале энергия пластины перераспределяется между несколькими близкими модами, затем, пройдя ряд последовательных стадий, пластина восстанавливает исходное положение с точностью до нескольких процентов. То есть учет нелинейных слагаемых приводит к так называемому «эффекту возврата». Восстановление

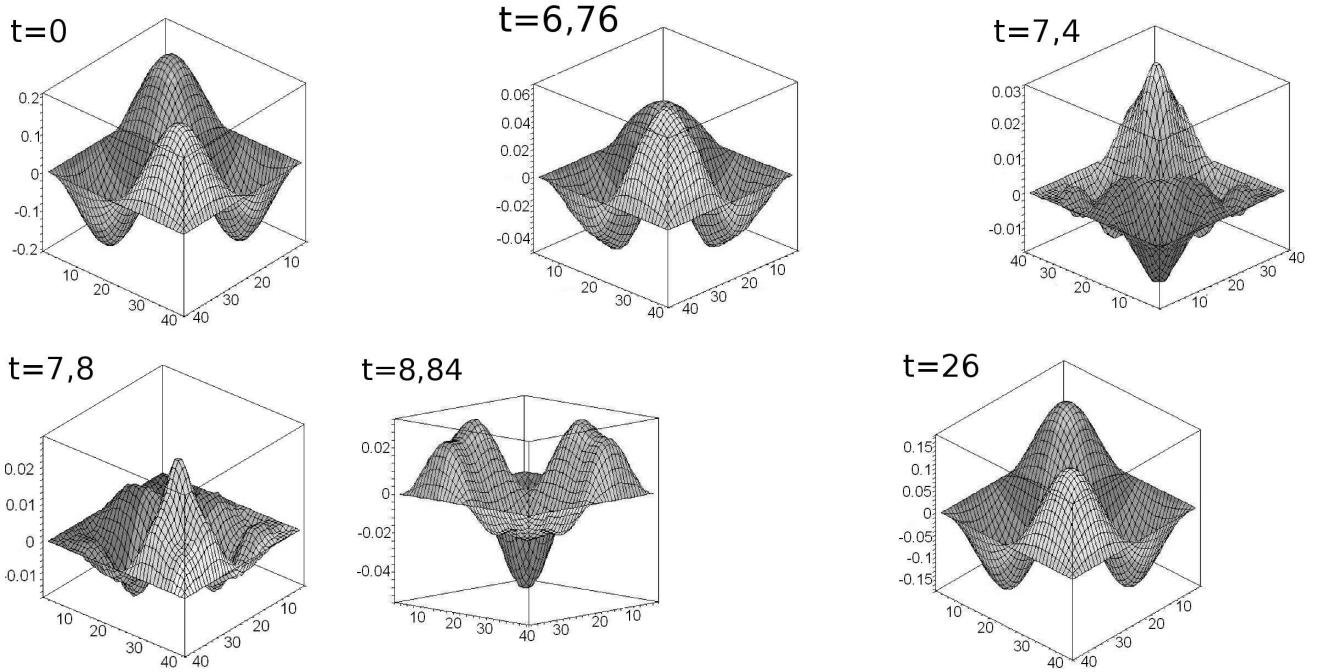


Рис. 4.1: Нелинейная задача.

начального приближения в нелинейных системах впервые наблюдали С. Улам и Д. Паста [79], которые в 1952 году по предложению Э. Ферми рассматривали ангармоническую цепочку из 32 грузиков, соединенных пружинами с нелинейной характеристикой. Предполагалось, что энергия первоначального возбуждения распределится по всем гармоникам, и установится термодинамическое равновесие. Но этого не происходило, процесс колебаний носил почти периодический характер, исходное состояние восстанавливалось практически полностью.

Параллельно была решена линейная задача изгиба жестких пластин, которая получается как частный случай уравнений Кармана при $\varphi = 0$:

$$\frac{D}{h} \Delta \Delta w = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23) можно решить методом разделения переменных. Его решение представимо в виде ряда

$$w = \sum_{m,n} (A_{mn} \sin(\omega_{mn}t) + B_{mn} \cos(\omega_{mn}t)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (4.24)$$

где ω_{mn} – частота собственных колебаний.

Функции

$$w_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

являются собственными функциями бигармонического оператора. Коэффициенты $A_{mn} = 0$, а B_{mn} определяются равенствами

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b w_0(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Тогда

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n} B_{mn} \cos(\omega_{mn}t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

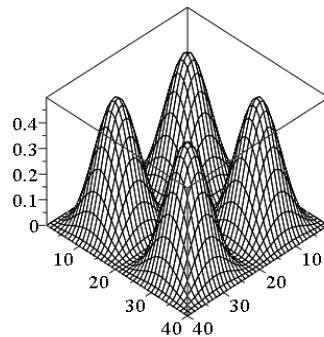
$$\omega_{mn} = \frac{1}{\sqrt{c_0}} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right),$$

где $c_0 = \frac{s}{D}$. Последние формулы использовались для проверки метода конечных разностей и подбора чисел N, M .

Для $M = 40$ и $N = 40$ метод конечных разностей хорошо аппроксимирует полученное решение. Нас интересовало различие графиков линейной и нелинейной задач при одинаковых параметрах в различные моменты времени.

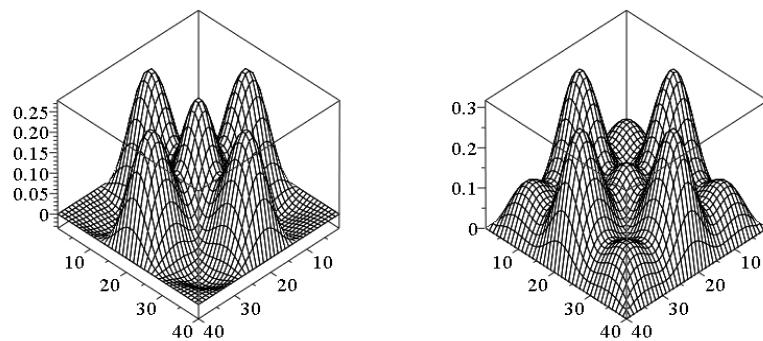
Для наглядности представим графики решений линейной и нелинейной задач при одинаковых параметрах. В качестве первоначального прогиба возьмем

$$w_0 = 0.4 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}.$$



$t=0$

Рис. 4.2

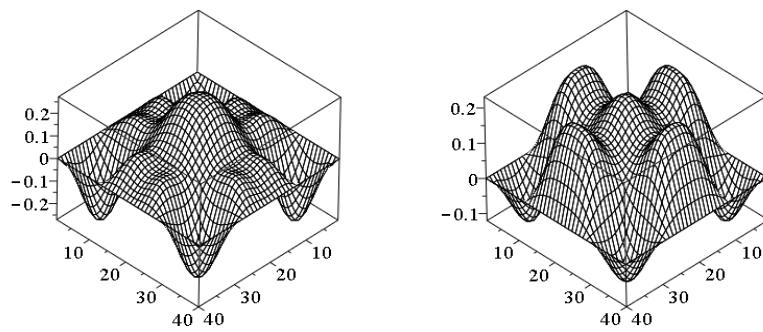


нелинейная задача

 $t = 7$

линейная задача

Рис. 4.3

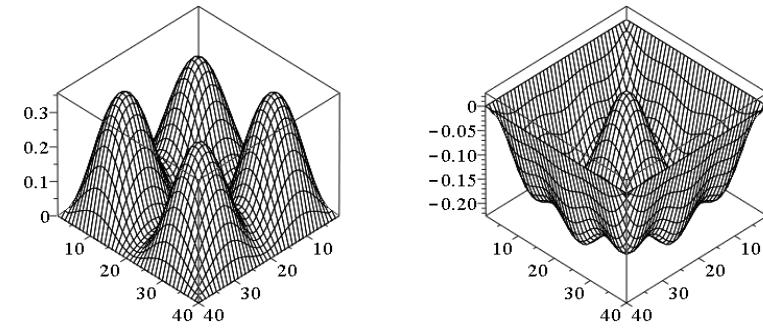


нелинейная задача

 $t = 9$

линейная задача

Рис. 4.4

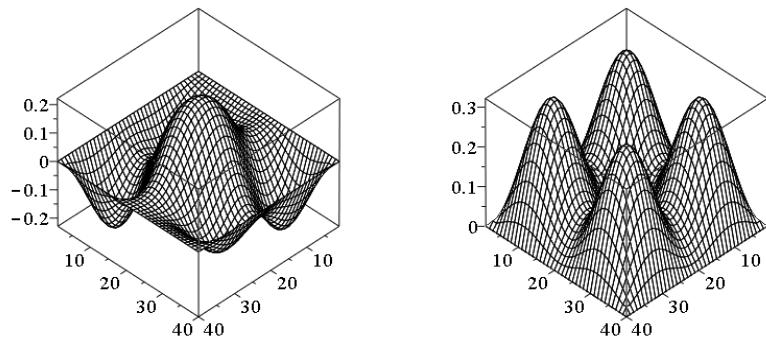


нелинейная задача

 $t = 73$

линейная задача

Рис. 4.5



нелинейная задача

 $t = 154$

линейная задача

Рис. 4.6

Из графиков видно, что в решениях рассматриваемых задач есть отличия. Период и амплитуда колебаний у линейной задачи больше. Также отличны формы колебаний. Отсюда можно сделать вывод, что цепные усилия имеют существенное влияние на колебания прямоугольных пластин.

Заключение

Итоги исследования: решены новые задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения:

- получены аналитические решения задач устойчивости сжимаемого продольной силой стержня, прогиб которого с одной стороны ограничен жестким препятствием, при граничных условиях свободного края;
- решены задачи устойчивости упругих колец, нагруженных нормальными или центральными силами, и подкрепленных упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий;
- численно исследована задача устойчивости прямоугольных пластин при односторонних ограничениях на перемещения с граничными условиями свободного края;
- решена задача устойчивости оболочек вращения в осесимметричном случае в наиболее точной нелинейной постановке с вычислением работы внешних сил по точной термодинамической формуле;
- приведены результаты численного анализа нелинейных колебаний прямоугольных пластин в рамках теории Кармана.

Рекомендации и перспективы: рекомендации по дальнейшему исследованию нелинейных и конструктивно–нелинейных задач устойчивости заключаются в проведении численных экспериментов, которые бы позволили оценить значение односторонних, неудерживающих связей в сложных конструкциях, а также в проведении анализа устойчивости цилиндрических оболочек, находящихся в жесткой обойме, в случае неосесимметричной деформации.

Список литературы

- [1] Алфутов Н.А., Еремчиев А.Н. Влияние односторонних связей на устойчивость оболочек при осевом сжатии // В сб. Расчеты на прочность. Л.: Машиностроение, 1989. С. 179–188.
- [2] Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н. Об устойчивости упругих систем с неудерживающими связями. // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2013. №3(15). С. 12-18.
- [3] Андрюкова В.Ю. Некоторые задачи устойчивости упругих систем с односторонними ограничениями на перемещения. // "Вычислительная механика сплошных сред". Пермь. 2014. Том 7, №4. С.412 – 422.
- [4] В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов Об устойчивости стержня при односторонних ограничениях на перемещения. // Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Инф. 2013. Вып. 18. С. 237–244.
- [5] Артюнов А.В, Тынянский Н.Т. Знакопределенность квадратичных форм на конусе. УМН, 1984. Т. 39. Вып. 2(236). С. 133–134.
- [6] Артюхин Ю.П. Механика пластин и оболочек при контактных воздействиях// Диссерт. на соискание уч. степ. д.ф.-м.н. Казань, 1979. 384 с.
- [7] Артюхин Ю.П., Карасев С.Н. Некоторые контактные задачи теории тонких пластин // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. Вып. 10. С. 159–166.
- [8] Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988. 448 с.
- [9] Баженов В.А., Е.А. Гоцуляк, Г.С. Кондаков, А.И. Оглобля Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями. Киев.: Выща школа, 1989. 399 с.

- [10] **Балакришнан А.В.** Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 383 с.
- [11] **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 280 с.
- [12] **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. Т.1. М.: Наука, 1966. Т.2. М.: Физматгиз, 1962.
- [13] **Болотин В.В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
- [14] **Будянский Б., Хатчинсон Дж.** Выпучивание: достижения и проблемы //Механика деформируемых твердых тел. Направления развития /Сб. статей под ред. Г.С. Шапиро. М.: Мир, 1983. С. 121–150.
- [15] **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. / - М.: Наука, 1967. 984 с.
- [16] **Вольмир А.С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
- [17] **Ворович И.И.** Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 376 с.
- [18] **Гельфанд И. М., Фомин С.В.** Вариационное исчисление. М.: Государственное издательство физико–математической литературы, 1961. 227 с.
- [19] **Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я.** Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986. 270 с.
- [20] **Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.** Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
- [21] **Гольденвейзер А.Л.** О геометрической теории устойчивости оболочек //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. N6. С. 143–154.

- [22] Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1972. 360 с.
- [23] Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.
- [24] Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. // М.: Наука, 1988. 235 с.
- [25] Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
- [26] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1968. 180 с.
- [27] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 431 с.
- [28] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
- [29] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций // М.: Наука, 1980. 352 с.
- [30] Крепс В.Л. О квадратичных формах, неотрицательных на ортанте. // ЖВМиМФ. 1984. Т. 24. № 4. С. 497-503.
- [31] Колпак Е.П. Устойчивость безмоментных оболочек при больших деформациях. СПб. 2000. 248 с. ISBN 5-7997-0218-2.
- [32] Корелин Н.А., Медзмариашвили Э.В., Тарасов В.Н. Устойчивость цилиндрических стержневых конструкций при нагружении центральными силами // Деп. в ВИНТИ 29.02.88, N4230 – B88, 22 с.
- [33] Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.

- [34] Красносельский М.А., Вайникко Т.М., Забрейко П.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.:Наука, 1969. 425 с.
- [35] Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
- [36] Лагранж Ж. Аналитическая механика. М.: Гостехиздат, 1950. Т.1. С. 97.
- [37] Ляв А. Математическая теория упругости. М., Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
- [38] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. С. 17–21.
- [39] Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука, 1981. 288 с.
- [40] Михайловский Е.И., Никитенков В.Л., Тарасов В.Н. Определение реакций упругоподатливых опор одностороннего действия под сосудами давления // Строительная механика и расчет сооружений. М. 1986. N3. С. 54–57.
- [41] Михайловский Е.И., Тарасов В.Н. Контактные задачи для гибких элементов конструкций // Проблемы нелинейной теории упругости. Калинин: Изд-во Калинин. политех. ин-та. 1989. С. 100–108.
- [42] Михайловский Е.И., Тарасов В.Н. Задачи со свободной границей для оболочки, подкрепленной ребрами одностороннего действия // В кн.: В.В. Новожилов - ученый, педагог, гражданин. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. С. 121–128.
- [43] Михайловский Е.И., Тарасов В.Н. Метод решения контактных задач с неизвестной областью взаимодействия // Новожиловский сб. (к 80-летию акад. В.В. Новожилова). СПб.: Судостроение, 1992. С. 17–26.

- [44] **Михайловский Е.И., Тарасов В.Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // РАН. ПММ. 1993. Т.57. Вып. 1. С. 128–136.
- [45] **Михайловский Е.И., Тарасов В.Н., Холмогоров Д.В.** Закритическое поведение продольно сжатого стержня с жесткими ограничениями на прогиб // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 156–160.
- [46] **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа., 1977. 432 с.
- [47] **Николаи Е.Л.** Труды по механике / М.: Изд-во технико-технической литературы, 1955. 584 с.
- [48] **Новожилов В.В.** Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
- [49] **Паймушин В.Н.** Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней.// ПММ Т71, 2007. Вып.5. С.880 - 893.
- [50] **Панагиотопулос П.** Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 494 с.
- [51] **Пановко Я.Г.** Механика деформируемого твердого тела. Современные концепции, ошибки, парадоксы. М.: Наука, 1985. 288 с.
- [52] **Пановко Я.Г.** Основы прикладной теории упругих колебаний. — М.: Издательство Машиностроение, 1967. — 316 с.
- [53] **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Издательство СКАД СОФТ. 2010. Т. 1. 704 с.
- [54] **Папкович П.Ф.** Строительная механика корабля. Л.: Государственное союзное изд-во судостроительной промышленности, 1941. Ч. 2. 960 с.

- [55] **Погорелов А.В.** Дифференциальная геометрия. // М.: Наука, 1974. 176 с.
- [56] **Погорелов А.В.** Геометрическая теория устойчивости оболочек. // М.: Наука, 1966. 296 с.
- [57] **Попов Е.П.** Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.
- [58] **Постон Т., Стюарт И.** Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
- [59] Прочность. Устойчивость. Колебания // Справочник в трех томах. Под общей редакцией И.А. Биргера, Я.Г. Пановко / М.: Машиностроение, 1988. 831 с.
- [60] **Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.** Численные методы в экстремальных задачах. // М.: Наука, 1975. 284 с.
- [61] **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
- [62] **Рапорт Л.Б.** Устойчивость по Ляпунову и закоопределенность квадратичной формы на конусе. ПММ, 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 674–679.
- [63] **Сапронов Ю.И.** Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах. Успехи математических наук, 1996. Т. 51. Вып. 1(307). С. 101-132.
- [64] **Стронгин Р.Г.** Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978.
- [65] **Сухарев А.Г.** Глобальный экстремум и методы его отыскания // Математические методы в исследовании операций. М.: Изд-во МГУ, 1983. 193 с.
- [66] **Тарасов В.Н.** Об устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения. // Труды института математики и механики.

Российская академия наук. Уральское отделение. Том 11, № 1, 2005. С. 177-188.

- [67] **Тарасов В.Н.** К решению задач на собственные значения для положительно однородных операторов // Актуальные проблемы фундаментальных наук. Тр. II Междунар. конф. М.: Техносфера - Информ, 1994. Т.2. Ч.2. С. В-8–В-11.
- [68] **Тарасов В.Н.** Методы оптимизации в исследовании конструктивно – нелинейных задач механики упругих систем/ Сыктывкар, 2013.
- [69] **Тарасов В.Н., Холмогоров Д.В.** Некоторые задачи и методы конструктивно-нелинейной механики упругих систем. Сыктывкар: Издво Сыктывкарского ун-та. 1992. 189 с.
- [70] **Тарасов В.Н., Холмогоров Д.В.** Устойчивость конструкций с односторонними связями // В сб. Автоклавы: Расчет и проектирование, опыт эксплуатации. Материалы Всесоюзного семинара "Автоматизация инженерных расчетов при проектировании автоклавов". /Под ред. проф. Е.И. Михайловского, Сыктывкарский ун-т. Сыктывкар, 1992. С. 198–214.
- [71] **Тимошенко С.П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек /Избр. работы под ред. Э.И. Григорюка. М.: Наука, 1971. 807 с.
- [72] **Тимошенко С.П.** Устойчивость упругих систем. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 531 с.
- [73] **Товстик П.Е.** Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.
- [74] **Феодосьев В.И.** Упругие элементы точного приборостроения. М.: Оборонгиз, 1949. 343 с.
- [75] **Феодосьев В.И.** Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.

- [76] **Феодосьев В.И.** О стесненном продольном изгибе упругого стержня // Известия АН СССР. МТТ. М.: Наука, 1987. С. 76–180.
- [77] **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. // М.: Государственное издательство физико–математической литературы. 1962. Том 3. 656 с.
- [78] **Фридман А.З.** Устойчивость защемленных по контуру прямоугольных пластин под действием комбинированных нагрузок. // Изв. АН ССР. Механика твердого тела. 1988. № 5. С. 148-151.
- [79] **С.Улам.** Нерешенные математические задачи. — М.: Наука, 1964. — 168 с.
- [80] **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
- [81] **Циглер Г.** Об устойчивости упругих систем / В сб. статей под общ. ред. Х. Драйдена и Т. Кармана. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. С. 116 -160.
- [82] **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.
- [83] **Falk J.E.,Soland R.M.** An algorithm for separable nonconvex programming problems. – "Management Sci.", 1969, **15**, N9, P. 550–569.
- [84] **Fichera G.** Problemi elaststatici con vincoli unilaterali; in problem di Signorini con ambigue condizioni al contorno // Mem. ANaz. Lincei, 1964. T. 8(7). P. 91–140.
- [85] **Gaddum J.** Linear inequalities quadratic forms. Pacific J. of Math., 1958, Vol. 8. P. 411–414.
- [86] **Lions J.L., Stampacchia G.** Variational inequalities // Comm. Pure Appl. Math., 1967, V. XX. P. 493–519.
- [87] **Soland R.M.** An algorithm for separable nonconvex programming problems II: Nonconvex Constraints. – "Management Sci.", 1971, **17**, N11, P. 759–773.

- [88] **Tarasov V.N., Kholmogorov D.V.** Some problem of a stabiliti and supercritical behaviour of elastic systems with one-sided connections// Transactions of St-Peterburg academy of sciences for strength problems. 1997. Vol. 1. P. 175-188. ISBN 5-87237-146-2.