

## **ОТЗЫВ**

официального оппонента на диссертационную работу  
Яковлевой Екатерины Михайловны на тему «Краевые задачи о смешанном  
нагружении тел с разрезами с учетом накопления рассеянных повреждений в  
связанной постановке», представленную на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 –  
механика деформируемого твердого тела

### **1. Структура и оформление диссертации.**

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованных источников из 160 наименований, содержит 124 страниц текста, включая 56 рисунков и 18 таблиц. По структуре и оформлению диссертация и автореферат диссертации соответствуют требованиям ГОСТ 7.0.11-2011 «Диссертация и автореферат диссертации. Структура и правила оформления».

### **2. Актуальность темы диссертации.**

Исследование распределения напряжений у вершины трещины в твердом теле в условиях пластического деформирования и ползучести приводит к нелинейным задачам, сложность которых не позволяет выяснить к настоящему времени некоторые качественные особенности процесса разрушения. Диссертация Е.М. Яковлевой посвящена исследованию асимптотики напряжений в теле с трещиной для несжимаемого материала со степенными определяющими соотношениями, отражающими реологию сред со степенным законом установившейся ползучести или степенным законом деформационного упрочнения в пластичности. Главный результат по этой задаче, полученный Хатчинсоном, Райсом и Розенгреном в 1968 году, а также масса работ, опубликованных позже, оставляют открытым вопрос об асимптотике напряжений, соответствующей смешанному нагружению. Экспериментальные результаты, полученные в последние пять лет группой В.Н. Шлянникова для механики трещин в условиях смешанного нагружения, требуют осмысления и актуализируют скорейшее развитие теории. Проблема

исследуется для плоского деформированного состояния, плоского напряженного состояния, а также в связанной постановке с учетом накопления континуально распределенных повреждений, то есть в рамках достаточно широкого спектра формулировок, несомненно актуальных и представляющих научную ценность для развития нелинейной механики разрушения и практический интерес в вопросах трещиностойкости и ресурса деталей машин, работающих в условиях высокотемпературного нагружения при сложном напряженном состоянии.

### **3. Основные результаты и научная новизна.**

Центральной проблемой, исследуемой автором, является нелинейная задача на собственные значения для азимутального распределения функции напряжений при первом члене ее асимптотического разложения по степеням радиальной координаты вблизи кончика трещины, — математическая проблема, решение которой позволило бы понять характер процесса раскрытия трещины в нелинейном деформируемом твердом теле. Данная проблема решалась автором для произвольного смешанного напряженного состояния, исследуемого асимптотически вблизи кончика трещины, что для нелинейной постановки представляет определенную сложность вследствие невозможности использования суперпозиции решений для трещин растяжения и продольного сдвига, изученных ранее.

В контексте работы располагаются два фундаментальных вопроса, ответу на которые подчинены формулировки всех решаемых задач:

1) Соответствуют ли собственным значениям Хатчинсона-Райса-Розенгрена собственные формы в виде смешанных напряженных состояний вблизи кончика трещины?

2) Существуют ли другие собственные значения задачи, соответствующие смешанным напряженным состояниям?

Судя по рис. 4-9 автор склоняется к утвердительному ответу на первый вопрос. На второй вопрос ответ автора также положительный, о чем свидетельствуют результаты работы. Для задачи, сформулированной в рамках плоского деформированного состояния и плоского напряженного состояния диссертантом получены новые показатели степени сингулярности

напряжений вблизи кончика трещины, содержательность которых продемонстрирована в задаче в связанной постановке с учетом накопления континуально распределенных повреждений, где, как оказалось, они обеспечивают сходимость рядов в отличие от показателя Хатчинсона-Райса-Резенгрена.

#### **4. Достоверность результатов диссертации.**

Для обеспечения достоверности автор независимо воспроизводит результаты, полученные численным решением задачи на собственные значения, с использованием методов возмущений. При этом используются адекватные численные методы решения нелинейных начальных задач с параметром и сведения краевых задач к начальным, а также специальные методы теории возмущений, обеспечивающие равномерную сходимость рядов по угловой координате. С помощью применяемого аппарата автором повторяются известные решения Хатчинсона-Райса-Розенгрена, что также косвенно свидетельствует в пользу его корректности. Необходимо отметить, что работа выполнена на фоне отсутствия качественного исследования рассматриваемых нелинейных задач на собственные значения, поэтому при исследовании довольно тонких вопросов автор вынужден был полагаться на результаты, полученные численными и численно-асимптотическими методами.

#### **5. Теоретическая и практическая ценность.**

Установленные в работе новые асимптотики напряжений вблизи кончика трещины в неупругом материале, соответствующие комбинированному напряженному состоянию, представляют собой новые фундаментальные знания в области механики трещин.

Все специализированные постановки задач (плоское деформированное и плоское напряженное состояние, а также постановка с учетом накопления повреждений) предполагают непосредственное практическое использование в вопросах трещиностойкости и ресурса деталей машин, работающих в условиях высокотемпературного нагружения при сложном напряженном состоянии.

**6. Апробация работы.** Диссертационная работа Е.М. Яковлевой в достаточной мере опубликована и апробирована. Основные положения работы опубликованы в шестнадцати научных журналах из перечня ВАК (в том числе входящих в международные системы цитирования) и докладывалась на тринадцати международных и всероссийских конференциях по профилю механики деформируемого твердого тела. Полностью работа докладывалась на шести профильных научных семинарах. Работа выполнялась в рамках проекта РФФИ, результаты которого проходят полноценную научную экспертизу.

### **7. Замечания по содержанию работы.**

1. Некоторые сомнения вызывает авторская переформулировка задачи.

Центральным объектом исследования является нелинейная однородная краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка с параметром (задача на собственные значения), описывающая азимутальное распределение функции напряжений  $f(\theta)$  при степени радиальной координаты с неизвестным показателем. Вследствие однородности задачи к ней справедливо добавляется условие нормировки  $f(0)=1$ . Для того, чтобы выделить собственную форму, соответствующую заданному значению коэффициента смешанности нагружения Ши  $M^p \in [0,1]$ , определенного при

$\theta=0$  соотношением  $M^p = \frac{2}{\pi} \arctg \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_{r\theta}} \Big|_{\theta=0} \right|$ , соискатель фактически<sup>1</sup> заменяет

краевую задачу парой краевых задач, определенных на отрезках  $[-\pi,0]$  и  $[0, \pi]$ , вводя тем самым границу слабого разрыва, соответствующую  $\theta=0$ . На образованной границе фактически ставятся условия непрерывности компонент напряжений  $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ , означающие условие равновесия на границе и требующие непрерывности  $f, f'$ , а также непрерывности компоненты напряжения  $\sigma_{rr}$ , требующей непрерывности  $f''$ . Соотношения на границе  $\theta=0$  дополняются до полного комплекта условием, согласно которому  $f'(0)$

---

<sup>1</sup> Последующее сведение каждой из краевых задач к начальной задаче не вызывает замечаний и на это здесь не заостряется внимание.

выбирается соответствующим заданному коэффициенту смешанности нагружения  $M^p = M_*^p$ .

Если при  $\theta=0$  вместо дополнительного условия на  $f'(0)$  потребовать непрерывность  $f'''$  (а следовательно, в силу уравнения совместности, и  $f^{IV}$ ), влияние границы слабого разрыва, введенной искусственно, на решение исходной задачи очевидно исчезнет. В предложенной соискателем переформулировке задачи условие надлежащей гладкости  $f(\theta)$  было заменено на условие  $M^p = M_*^p$ , которое, вообще говоря, эту гладкость не гарантирует, что демонстрирует рис.12 диссертационной работы. Без непрерывности третьей производной функции напряжений равновесие на линии  $\theta=0$  как многообразии внутренних точек континуума не обязано выполняться.

Поскольку для исследуемой нелинейной задачи на собственные значения не известны качественные характеристики спектра (дискретность /непрерывность, конечность/счетность, кратность элементов спектра, непрерывность зависимости собственных чисел от  $M^p$ ), представляется априори неочевидным, что из разрешимости переформулированной автором задачи, допускающей решения с разрывной третьей производной, следует разрешимость исходной задачи. Никем строго не доказано существование решения исходной задачи при произвольном  $M^p \in [0,1]$ .

2. Результаты, представленные на рис. 4-9 намекают на то, что собственному числу Хатчинсона-Райса-Розенгрена соответствует континуальное множество собственных форм с произвольным  $M^p \in [0,1]$ , однако это любопытное явление не обсуждается. Хотелось бы узнать мнение соискателя на этот счет.

3. Сравнение результатов автора, полученных прямым численным счетом (глава 2) и методом возмущений (глава 5), на наш взгляд, убедительно не показывают соответствия: в таблицах 1 и 17, соответствующих показателю степени определяющих соотношений  $n=2$ , некоторое совпадение удалось увидеть только при  $M^p = 0.9$ . Как можно увидеть соответствие, о котором говорится на с. 91?

4. В главе 3, где задача рассматривается в связанной постановке с учетом поврежденности, сообщается о расходимости рядов, представляющих напряжения и поврежденность вблизи кончика трещины, при условии сближения с асимптотикой Хатчинсона-Райса-Розенгрена в бесконечно удаленной точке, а также о сходимости этого ряда при условии сближения с новой асимптотикой. Сказанное относится к смешанным модам нагружения. К сожалению, не сказано, остается ли в силе этот факт в пределе неповрежденного материала. В главе 2 из упомянутого ряда для функции напряжений рассматривался лишь первый его член, и вопросы сходимости при смешанных модах нагружения, обусловленной новой асимптотикой, не обсуждались.

5. В формуле  $n_k = (-1)^k / (\lambda_0 - 1)^k$  на с. 92, вероятно, присутствует арифметическая ошибка.

6. Замечено, что найденная новая асимптотика соответствуют сингулярному полю перемещений, тогда как старая (Хатчинсон-Райс-Розенгрэн) регулярна вблизи кончика трещины. Интересно было бы обсудить эту особенность.

## **8. Заключение по диссертации.**

Квалификация соискателя как научного работника в области механики деформируемого твердого тела соответствует степени кандидата физико-математических наук. Оценивая работу в целом, считаю, что диссертация является законченной научно-квалификационной работой, выполненной соискателем самостоятельно на достаточно высоком научном уровне. Полученные результаты достоверны, выводы обоснованы. Работа базируется на достаточном объеме новых содержательных теоретических результатов, которые вносят заметный вклад в соответствующий раздел механики деформируемого твердого тела.

Полагаю, что диссертационная работа Яковлевой Екатерины Михайловны на тему «Краевые задачи о смешанном нагружении тел с разрезами с учетом накопления рассеянных повреждений в связанной постановке», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является завершённым научным

исследованием, выполненным на высоком научно-методическом уровне, соответствует специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела» и имеет важное научное и практическое значение. Рецензируемая диссертационная работа отвечает всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук положением о порядке присуждения ученых степеней, а её автор – Яковлева Екатерина Михайловна – заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

Официальный оппонент:

научный сотрудник Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН, доктор физико-математических наук (01.02.04)

Келлер Илья Эрнстович

20 сентября 2016 года

Служебный телефон: 8(342)2378307

E-mail: kie@icmm.ru

Служебный адрес: 614013, г.Пермь, ул. Акад. Королёва, д.1, ИМСС УрО РАН

Я, Келлер Илья Эрнстович, даю согласие на включение своих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и их дальнейшую обработку.

Подпись И.Э. Келлера заверяю  
Ученый секретарь ИМСС УрО РАН,  
кандидат физико-математических наук



Келлер И.Э.

Юрлова Н.А.