

**Самарский государственный аэрокосмический университет имени
академика С.П. Королева
(национальный исследовательский университет)**

На правах рукописи

Яковлева Екатерина Михайловна

**Краевые задачи о смешанном нагружении тел с
разрезами с учетом накопления рассеянных
повреждений в связанный постановке**

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

**Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент
Степанова Лариса Валентиновна

Самара — 2016

Содержание

Введение	4
1. Глава 1. О смешанном нагружении элемента конструкции с трещиной	14
1.1. О смешанном нагружении элемента конструкции с трещиной: краевые задачи и основные результаты	14
1.2. Краткие теоретические сведения из линейной механики разрушения	16
1.3. Краткие теоретические сведения из нелинейной механики разрушения	19
1.4. Смешанное деформирование элемента конструкции с дефектом	21
1.5. Многомасштабный характер разрушения	24
2. Глава 2. Смешанное нагружение бесконечного тела с полубесконечной трещиной в условиях плоского деформированного состояния	28
2.1. Математическая постановка задачи	28
2.2. Метод разложения по собственным функциям. Асимптотическое решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряжений и деформаций у вершины трещины в условиях смешанного деформирования	29
2.3. Численный алгоритм определения собственных значений и собственных функций	32
2.4. Выводы по второй главе	35
3. Глава 3. Связанная постановка задачи о неподвижной трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного деформирования и ее решение	45
3.1. Связанная постановка задачи о трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного деформирования. Промежуточная автомодельная асимптотика	45
3.2. Геометрия области полностью поврежденного материала	53
3.3. Амплитудный масштабный множитель \tilde{C}	59

3.4. Выводы по третьей главе	61
4. Глава 4. Смешанное нагружение тонкой пластины с разрезом.	
Плоское напряженное состояние	62
4.1. Математическая постановка задачи и основные уравнения. Метод разложения по собственным функциям	62
4.2. Численное решение нелинейной задачи на собственные значения. Собственные значения и собственные функции	64
4.3. Автомодельное решение задачи о трещине в среде с поврежден- ностью в условиях смешанного деформирования (плоское напря- женное состояние). Промежуточная автомодельная асимптотика. Основные уравнения	80
4.4. Выводы по четвертой главе	82
5. Глава 5. Метод возмущений (метод искусственного малого па- раметра)	86
5.1. Решение нелинейной задачи на собственные значения с помощью метода возмущений (метода малого параметра) в случае плоского деформированного состояния	86
5.2. Метод возмущений. Случай плоского напряженного состояния .	96
5.3. Выводы по пятой главе	103
Заключение	105
Список литературы	108

Введение

Актуальность темы

Асимптотический анализ распределений напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины является одной из фундаментальных задач механики трещин, представляющей интерес с теоретической, экспериментальной и вычислительной точки зрения. В настоящее время многие вопросы, связанные с нахождением напряженно – деформированного состояния вблизи вершины дефекта, остаются открытыми. Сейчас в механике трещин и, в целом, в механике разрушения сложилось понимание процесса разрушения как процесса многомасштабного и многоуровневого, для описания основных закономерностей которого следует прибегать к многомасштабным моделям [154]. В рамках многоуровневого подхода процесс разрушения моделируется с помощью различных определяющих соотношений на различных расстояниях от вершины трещины с помощью введения полей напряжений с различным асимптотическим поведением. При построении решения задачи в целом представления, работающие на разных расстояниях от кончика трещины, срацаиваются в зонах, где справедливы асимптотики соседних областей. Одним из наиболее распространенных математических методов построения распределений напряжений, деформаций и перемещений у кончика трещины является асимптотический анализ, базирующийся на подходах, развитых в асимптотической теории [19, 38, 71, 72].

Определение напряженно – деформированного состояния вблизи кончика трещины в материале со степенным законом упрочнения с помощью асимптотических разложений полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины и построение высших приближений асимптотических разложений являлись предметом многочисленных исследований на протяжении многих лет, начиная с классических работ Дж. Хатчинсона, Дж. Райса и Дж. Розенгrena до работ самого последнего времени [98, 104, 115, 139, 140]. В целом, задачи определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях пластического деформирования и ползучести рассматривались Астафьевым В.И., Ломакиным Е.В., Матвиенко Ю.Г., Морозовым Е.М., Никишковым Г.П., Шлянниковым В.Н., Anheuser M., Gross D., Hui C.Y., Hutchinson J.M., Murakami S., Rice J.R., Rosengren G.F., Riedel H., Ruine A., Shih G.F., Zhang X.,

Zhao J.

Целью данной работы является определение напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения элементов конструкций в материалах со степенными определяющими уравнениями и учет процессов накопления рассеянных повреждений вблизи кончика трещины в связанной (ползучесть – поврежденность) постановке задачи.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Построение математической модели задачи определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины для материала со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного нагружения. Сведение проблемы к нелинейной задаче на собственные значения.
2. Разработка численного метода определения всего спектра собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения полей напряжений, деформаций и перемещений в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого нормального отрыва до чистого поперечного сдвига.
3. Анализ собственного значения нелинейной задачи на собственные значения, отвечающего проблеме Хатчинсона – Райса – Розенгрена (ХРР) для смешанного деформирования в предположении реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояния: численное определение собственных значений и приближенное аналитическое определение собственных значений с помощью метода искусственного малого параметра.
4. Нахождение всего спектра собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы отыскания напряженно – деформированного состояния у вершины трещины при смешанном нагружении для плоского напряженного и плоского деформированного состояния.

5. Определение полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и поля сплошности вблизи вершины неподвижной трещины в условиях высокотемпературной ползучести при смешанном нагружении в связанной (ползучесть – поврежденность) постановке задачи.
6. Асимптотический анализ полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и поля сплошности в окрестности вершины трещины и определение геометрии области полностью поврежденного материала.
7. Проведение численных экспериментов для исследования конфигураций области полностью поврежденного материала, угловых распределений полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности для различных значений показателя ползучести и параметра смешанности нагрузления.

Методология и методы диссертационного исследования

В диссертационной работе построено асимптотическое решение задачи определения напряженно–деформированного состояния у вершины трещины в среде с поврежденностью. Полученный класс решений базируется на основных положениях механики сплошных сред: механики разрушения и континуальной механики поврежденности. Решение основывается на методологии и процедурах асимптотической теории и методов возмущений. В диссертации используется метод разложения по собственным функциям и метод искусственного малого параметра. Численные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений найдены посредством семейства методов Рунге – Кутты – Фельберга и используют классические алгоритмы численного анализа.

Предложена новая процедура отыскания всего спектра собственных значений, позволяющих рассмотреть весь диапазон смешанных форм деформирования. В отличие от рассмотрения трещин нормального отрыва и поперечного сдвига, при изучении которых используются соображения симметрии и антисимметрии, при решении задач о смешанном нагружении на продолжении трещины задавались значения параметра смешанности нагружения (определяющего вид нагружения), а затем задача решалась для верхней полуплоскости методами семейства Рунге – Кутты – Фельберга с помощью алгоритмов метода

пристрелки, реализованными в пакете Mathematica. После нахождения необходимых значений производных искомой функции второго и третьего порядка на линии продолжения трещины осуществлялось интегрирование уравнений для нижней полуплоскости. Собственные значения, полученные с помощью данной процедуры, приводят к сходящимся к некоторому предельному контуру границам области полностью поврежденного материала, и могут трактоваться, как новая промежуточная асимптотика напряжений у вершин трещины в условиях смешанного нагружения. Предлагаемый метод применяется для нахождения промежуточно-асимптотического представления поля напряжений в связанной (ползучесть - поврежденность) задаче о трещине в условиях смешанного напряжения в материале со степенными определяющими уравнениями теории установленвшейся ползучести.

Решение нелинейной задачи на собственное значение получено с помощью метода малого параметра, развитого в асимптотической теории и основанного на введении малого параметра, представляющего собой разность между собственным значением, отвечающим нелинейной квозмущенной задачи, и линейной кневозмущенной задачи, соответствующей линейному закону накопления повреждений. Проведенное качественное исследование собственных значений позволило использовать свойство автомодельности процесса накопления повреждений в твердом теле (для степенного закона накопления повреждений) и ввести новую автомодельную переменную.

Научная новизна:

1. Разработан новый метод и алгоритм численного определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения для полного диапазона смешанных форм деформирования.
2. Разработаны программы, реализующие численные алгоритмы нахождения полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности для различных значений показателя ползучести и параметра смешанности нагружения.
3. Найдена новая асимптотика поля напряжений у вершины трещины вне

зоны полностью поврежденного материала в условиях смешанного деформирования.

4. Построены конфигурации области полностью поврежденного материала для полного диапазона смешанных форм деформирования.

Практическая значимость диссертационной работы определяется тем, что полученный класс асимптотических решений дает возможность правильно описать структуру окрестности вершины трещины и построить конфигурации области полностью поврежденного материала, окружающей вершину трещины. После осуществления процедуры введения параметра сплошности в расчетную схему метода конечных элементов, полученный класс асимптотических решений может быть использован на практике для анализа напряженно – деформированного состояния реальных элементов конструкций, для создания современных экспертных систем, для разработки современных ремонтных технологий различных элементов конструкций.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается строгостью математической постановки задач, использованием фундаментальных положений механики сплошных сред, теории дифференциальных уравнений, асимптотической теории и методов возмущений и апробацией разработанных вычислительных алгоритмов и процедур на различных примерах.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих российских и международных конференциях:

- 19th European Conference on Fracture, Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety (Russia, Kazan, August 26 – 31 2012),
- Третья международная конференция "Математическая физика и ее приложения" (Россия, Самара, 27 августа – 1 сентября 2012),
- XL Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics" (Russia, Saint Petersburg, July 2 – 8 2012),
- Научный семинар лаборатории "Физики прочности и интеллектуальных диагностических систем" под руководством к. ф.-м. н. А. Ю. Виноградова, ТГУ (Россия, Тольятти, 11 июля 2013),

- XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред (Россия, Пермь, 18 – 22 февраля 2013),
- Всероссийская конференция "Актуальные проблемы математики и механики", посвященная 75-летию Г.И. Быковцева (Россия, Самара, 18 – 21 апреля 2013),
- XXI Петербургские чтения по проблемам прочности, К 100-летию со дня рождения Л.М Качанова и Ю.Н. Работнова (Россия, Санкт–Петербург, 15 – 17 апреля 2014),
- IV международная конференция "Математическая физика и ее приложения" (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014),
- 20th European Conference on Fracture (Trondheim, Norway, 30th of June – 4th of July 2014),
- XIV Зимняя школа по механике сплошных сред (Россия, Пермь, 24 – 27 февраля 2015),
- The Second International Conference on Damage Mechanics (France, Troyes, 8 – 11 July 2015),
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам прикладной и теоретической механики (Россия, Казань, 20 – 24 августа 2015),
- 9th European Solid Mechanics Conference (Spain, Madrid, 6 – 10 July 2015);
- на регулярных научных семинарах кафедры математического моделирования в механике Самарского государственного университета,
- Научный семинар Института механики сплошных сред (Россия, Пермь, декабрь 2015),
- Научный семинар кафедры Математического моделирования систем и процессов Пермского национального исследовательского политехнического университета (Россия, Пермь, февраль 2016),

- Объединенный научный семинар кафедры Вычислительной математики и механики и кафедры Композиционных материалов и конструкций Пермского национального исследовательского политехнического университета (Россия, Пермь, февраль 2016),
- Научный семинар Исследовательского центра проблем энергетики ФГБУН Казанского научного центра Российской академии наук (Россия, Казань, март 2016).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов:

- Проект РФФИ №13-01-97009-р-Поволжье-а "Численная обработка результатов оптоэлектронных измерений в механике разрушения: поляризационно – оптические методы (цифровая фотомеханика) и теневой метод каустик
- Проект РФФИ №12-08-00390-а "Развитие математических моделей нелинейного деформирования и поврежденности материалов и прогнозирование на их основе прочности и долговечности элементов конструкций".
- Проект "Многоскейлинговые модели процессов разрушения и нелинейного деформирования образцов с трещинами для анализа и прогнозирования прочности и долговечности элементов авиационных конструкций в процессе их длительной эксплуатации". Программа повышения конкурентоспособности федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева (национальный исследовательский университет)" среди ведущих мировых научно – образовательных центров на 2013 – 2020 гг.

Личный вклад. Автор принимал активное участие в разработке и реализации нового численного метода отыскания всего спектра собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного

деформирования; в построении угловых распределений компонент тензора напряжений и деформаций вблизи кончика трещины для новой найденной асимптотики и построении конфигурации областей диспергированного материала с использованием новой асимптотики дальнего поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработка численного метода определения всего спектра собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения полей напряжений, деформаций и перемещений в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого отрыва до попечечного сдвига.
2. Анализ собственного значения нелинейной задачи на собственные значения, отвечающего проблеме Хатчинсона – Райса – Розенгрена для смешанного деформирования в предположении реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояния: численное определение собственных значений и приближенное аналитическое определение собственных значений с помощью метода искусственного малого параметра.
3. Нахождение всего спектра собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы отыскания напряженно – деформированного состояния у вершины трещины при смешанном нагружении для плоского напряженного и плоского деформированного состояния.
4. Определение полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и поля сплошности вблизи вершины неподвижной трещины в условиях высокотемпературной ползучести при смешанном нагружении в связанный постановке задачи (ползучесть – поврежденность).
5. Асимптотический анализ полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и поля сплошности в окрестности вершины трещины и определение геометрии области полностью поврежденного материала.

6. Проведение численных экспериментов по исследованию конфигураций области полностью поврежденного материала, угловых распределений полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности для различных значений показателя ползучести и параметра смешанности нагрузления.

Общая характеристика работы

Настоящая диссертация посвящена решению краевых задач механики разрушения для смешанного нагружения элементов конструкции в материалах со степенными определяющими уравнениями и определению всего спектра собственных значений в задаче отыскания напряженно – деформированного состояния вблизи вершины трещины в условиях смешанного нагружения образца с трещиной в полном диапазоне смешанных форм деформирования.

В первой главе приведены краткие теоретические данные о проблемах смешанного нагружения элемента конструкции с трещиной, теоретические сведения из линейной и нелинейной механики разрушения для рассматриваемой тематики и показано, что процесс разрушения следует рассматривать как процесс многомасштабный и многоуровневый, для описания основных закономерностей которого следует прибегать к многомасштабным математическим моделям.

Во второй главе предложен метод отыскания всего спектра собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного деформирования. Найдены собственные значения, отличные от собственных значений, отвечающих задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена в условиях плоского деформированного состояния. Так же приведены результаты асимптотического и численного решения нелинейных задач на собственные значения, следующих из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне видов смешанного деформирования от нормального отрыва до поперечного сдвига.

В третьей главе построены угловые распределения компонент тензора на-

пряжений и деформаций вблизи кончика трещины для новой найденной асимптотики в условиях плоского деформированного состояния. Показано, что эти собственные значения определяют асимптотику дальнего поля напряжений в связанной задаче о трещине в среде с поврежденностью. С использованием новой асимптотики дальнего поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения построены конфигурации областей диспергированного материала.

В четвертой главе рассмотрена задача отыскания распределения напряжений и сплошности у вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния. Для решения задачи используется метод разложения по собственным функциям. Показано, что задача определения напряженно – деформированного состояния редуцируется к нелинейной задаче на собственные значения, численное решение которой получено. Развит численный метод нахождения всего спектра собственных значений задачи. Представленный метод применен к анализу полей напряжений и сплошности у вершины трещины в среде с поврежденностью. Принята гипотеза о существовании области полностью поврежденного материала и с помощью автомодельного представления решения найдена ее геометрия.

В пятой главе спектр собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного деформирования, найден с помощью метода возмущений (метод искусственного малого параметра). Показано, что метод малого параметра дает эффективный способ вычисления собственных значений нелинейной задачи, следующей из проблем нелинейной механики разрушения. Смешанное деформирование пластины с дефектом приводит к новому классу нелинейных задач на собственные значения, поскольку асимптотика собственных значений в случае смешанного нагружения начинает существенно зависеть от параметра смешанности нагрузки. Метод возмущений позволяет найти весь спектр собственных значений задачи, которые могут быть уточнены с помощью численного решения.

1. Глава 1. О смешанном нагружении элемента конструкции с трещиной

1.1. О смешанном нагружении элемента конструкции с трещиной: краевые задачи и основные результаты

Реакция твердого тела на очень большую нагрузку проявляется в виде большой его деформации и (или) разрушения. Явление разрушения, т. е. потеря сцепления между частями данного тела, – главный предмет исследований в механике разрушения, который с одной стороны, связан с изучением микромеханизмов процесса разрушения, с другой стороны, с обоснованием критериев разрушения и прогнозами развития разрушения на макроуровне [9, 20, 33, 34, 35, 69, 102].

Одной из основных задач современной механики деформируемого твердого тела является оценка прочности элементов конструкций, работающих в реальных условиях эксплуатации. Среди параметров, характеризующих прочность материала, важным является трещиностойкость. Процесс разрушения представляет собой совокупность явлений, который начинается гораздо раньше, чем появятся первые визуально заметные трещины. В материале, как правило, содержатся дефекты структуры, пустоты, раковины, вкрапления других материалов, которые со временем могут превратиться в макродефекты (трещины, полости).

В процессе эксплуатации элементов конструкции трещины в детали могут появиться и из-за конструкторских просчетов. Появившаяся в конструкции трещина, если она не будет обнаружена вовремя, может привести к катастрофическим последствиям [18, 154]. Для выявления такого рода скрытых дефектов необходим постоянный контроль уязвимых мест конструкции. Кроме того, причиной разрушения элементов конструкции в результате появления трещин могут быть коррозия и старение материала. Необоснованное продление срока эксплуатации конструкции чревато различного рода авариями [10, 19, 41, 120].

Разрушение может происходить внезапно, без "предостережения" в виде больших деформаций. Такая реакция возможна даже в материалах, обладаю-

щих высокой пластичностью. Очевидно, что такое поведение нежелательно и иногда может привести к катастрофическим последствиям – это обстоятельство послужило движущим мотивом большого количества исследований, проведенных в механике разрушения.

Методы механики разрушения позволяют по–новому подходить к выбору конструкционных материалов и проектированию конструкций, добиваясь не столько того, чтобы в них не появлялись трещины (что для сложных технических систем практически невозможно), а главным образом, чтобы не происходило их развитие.

Асимптотический анализ распределений напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины является одной из фундаментальных задач механики трещин [12, 19, 37, 71, 72]. Вершина трещины может находиться в упругом материале, пластической зоне или зоне, занятой деформациями ползучести; кончик трещины может принадлежать линии раздела нескольких изотропных или анизотропных материалов [36, 38, 120]. Все перечисленные факторы усложняют определение механических полей вблизи устья трещины и до настоящего времени многие вопросы, связанные с нахождением напряженно – деформированного состояния в нелинейной механике разрушения, остаются открытыми. Так, в настоящее время в механике трещин и в целом в механике разрушения сложилось понимание процесса разрушения как процесса много масштабного и многоуровневого, для описания основных закономерностей которого следует прибегать к многомасштабным моделям [95, 96, 142, 143, 144]. В рамках многоуровневого подхода процесс разрушения моделируется с помощью различных определяющих соотношений на различных расстояниях от вершины трещины с помощью введения полей напряжений с различным асимптотическим поведением. При построении решения задачи в целом представления, работающие на разных расстояниях от кончика трещины, срацаиваются в зонах, где справедливы асимптотики соседних областей. Для понимания многоуровневого или многомасштабного подхода целесообразно обратиться к исходным математическим моделям, используемым как в теории механики трещин, так и в инженерной практике [7, 150]. В рамках линейной теории упругости с помощью методов теории возмущений построено большое количество решений,

ставших классическими в механике хрупкого разрушения. Поэтому, обращаясь к современным методам оценки напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в материалах с нелинейными определяющими уравнениями, естественно сначала обратиться к результатам асимптотического анализа линейной теории упругости, ибо результаты, полученные средствами асимптотических методов в линейной теории упругости, служат теоретическим основанием инженерной практики.

1.2. Краткие теоретические сведения из линейной механики разрушения

В различных точных решениях линейной теории упругости обнаруживается сингулярный характер распределения напряжений и перемещений [120]. Сингулярный характер распределения напряжений появляется при решении краевых задач линейной теории упругости для таких областей, как двугранный угол, для областей, содержащих линию раздела двух и более сред. С физической точки зрения сингулярность поля напряжений соответствует тем зонам, в которых наблюдается концентрация напряжений, приводящая к необратимым деформациям (к развитию пластического течения и деформаций ползучести) и, в конечном итоге, разрушению элемента конструкции или образца. Вследствие указанных причин окрестность вершины трещины или углового выреза стала предметом интенсивных исследований с конца 18 века. По всей видимости, первый пример сингулярности поля напряжений в линейной теории упругости дает задача о сосредоточенной силе, действующей на прямолинейную границу бесконечно большой линейной упругой пластины (задача Фламана) [67, 113]. Существует фундаментальное решение задачи Фламана, называемое простым радиальным распределением напряжений. Любой элемент расположенный на расстоянии r от точки приложения сосредоточенной силы, подвергается простому сжатию в радиальном направлении. Компоненты тензора напряжений и поле перемещений определяются при этом выражениями

$$\sigma_{rr} = -2P \cos \theta / (\pi r), \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0, u_r(\theta = 0) = (2P/(\pi E)) \ln r + B. \quad (1.1)$$

Важной особенностью решения задачи Фламана является сингулярность как

поля напряжений, так и поля деформаций в точке приложения нагрузки. Более того, эта особенность поля напряжений и перемещений ведет к неинтегрируемой особенности энергии деформации:

$$W = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sigma_{rr}^2}{2E} r dr \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{P^2}{\pi E} \ln \frac{R}{\varepsilon} \right). \quad (1.2)$$

Поле напряжений (1.1) обладает особенностью вида $1/r$ при $r \rightarrow 0$. Математически, решение (1.1) краевой задачи линейной теории упругости о сосредоточенной силе, действующей на прямолинейной границе, приводит к парадоксу, поскольку это решение удовлетворяет всем фундаментальным уравнениям линейной теории упругости, однако, в то же самое время нарушает упрощающие предположения, принимаемые в линейной теории упругости: напряжения не должны превышать предела пропорциональности материала; градиенты перемещений должны быть малы; нагрузки должны действовать на недеформируемой поверхности в течение всего процесса нагружения. Для преодоления указанных сложностей предполагается, что малая область материала, примыкающая к точке приложения нагрузки, деформируется пластически и наблюдается пластическое течение вблизи точки приложения нагрузки. Другая особенность задачи Фламана заключается в том, что ее решение послужило основой для дальнейшего развития асимптотического анализа полей напряжений в линейно упругих телах. В 1907 г. К. Вигхардт впервые обратился к задаче определения поля напряжений вблизи углового выреза, нагруженного двумя сосредоточенными силами. Именно К. Вигхардт, решая обобщенную задачу Фламана, обнаружил факторизацию поля напряжений: поле напряжений может быть представлено в виде функции, представляющей собой произведение двух функций, одна из которых зависит от r , тогда как другая является функцией полярного угла θ . Для случая трещины К. Вигхардт обнаружил корневую особенность поля напряжений и начал дискуссию, касающуюся обоснования сингулярности поля напряжений у вершины трещины в линейно упругом материале. В 1933 г. Дж. Братц [101] опубликовал статью, в которой найдено поле напряжений у вершины острого выреза. В то время, когда работа К. Вигхарда была полностью забыта, Дж. Братц воспользовался идеей фон Кармана о введении функции на-

прожения Эри. Дж. Братц продемонстрировал возможность определения поля напряжений в упругом полупространстве (в двумерной постановке задачи) с общим распределением нормальных и касательных усилий, заданных на границе упругой области. Дж. Братц обобщил подход фон Кармана, показав, что метод может быть применим к любой клиновидной области, нагруженной нормальными и касательными усилиями на прямолинейных границах. В 1933 г. Вестергаард опубликовал работу, посвященную анализу напряжений у вершины трещины в бетонных элементах конструкций в случае изгиба. В его статье, являющейся, по всей видимости, одной из первых попыток использования механики разрушения для описания процесса разрушения квазихрупких материалов, было предложено следующее выражение для функции напряжений Эри

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m r^{m+3/2}}{2(m+1/2)(m+3/2)} \times \\ \times [(m-1/2) \sin(m+3/2)\theta - (m+3/2) \sin(m-1/2)\theta]. \quad (1.3)$$

Несмотря на упомянутые пионерские работы в области применения асимптотических методов в линейной механике разрушения, в полной мере возможность разделения переменных в решении задач для клиновидных областей была раскрыта М. Уильямсом [156, 157], предложившим метод разложения по собственным функциям функции напряжений Эри, компонент тензора напряжений и вектора перемещений. Именно в его работах [156, 157] функция напряжений Эри была представлена в форме произведения двух функций, одна из которых зависела от радиальной переменной r (r – расстояние от вершины клина до рассматриваемой точки), а вторая зависела от полярного угла θ :

$$\Phi(r, \theta) = \sum_j r^{\lambda_j + 1} f_j(\theta, \lambda_j), \quad (1.4)$$

где λ_j и $f_j(\theta)$ – собственные значения и соответствующие им собственные функции, определяемые из решения задач на собственные значения. Сравнительная простота и легкость использования представления (1.4) при решении краевых задач механики трещин были важным аспектом, который обусловил широкое распространение этого подхода [150]. Следует отметить, что, с другой стороны, природа разделения переменных в решении задач, сводящихся к бигармоническому уравнению, была уже установлена в механике линейно вязкой жидкости

при изучении двумерного течения Стокса – течения вязкой несжимаемой жидкости, которое может быть описано посредством функции тока, удовлетворяющей бигармоническому уравнению. В механике жидкости и газа применительно к бигармоническому уравнению относительно функции тока метод разложения по собственным функциям был предложен Дином и Монтагоном [110]. Они приложили метод разложения по собственным функциям к задачам о движении линейно вязкой жидкости вблизи угловых областей, что с математической точки зрения аналогично решению задач определения напряженно – деформированного состояния вблизи угловых вырезов в линейно упругих материалах. Упомянутые работы [105], посвященные построению асимптотик механических полей близи трещин и угловых вырезов, обеспечили основу для ответа на фундаментальные вопросы механики трещин: при каких условиях трещина получает возможность распространяться и продолжает расти? К. Вигхардт в своей работе сформулировал следующие вопросы: при каком значении сосредоточенной силы P для материала с заданными упругими и прочностными свойствами начнется разрушение материала, в каком месте и в каком направлении будет развиваться разрушение?

1.3. Краткие теоретические сведения из нелинейной механики разрушения

В современной нелинейной механике разрушения одним из наиболее распространенных методов анализа напряженно – деформированного состояния вблизи вершины трещины как в линейно упругих материалах, так в материалах с нелинейными определяющими уравнениями является метод разложения по собственным функциям [115, 116], восходящий к работам М. Уильямса [156, 157], в которых впервые было использовано разложение функции напряжений Эри в ряд по степеням расстояния от кончика трещины или вершины углового выреза в линейно упругом материале (разложение по собственным функциям). В ставших классическими работах Дж. Райса, Дж. Розенгrena и Дж. Хатчинсона [117, 118, 133] асимптотическое представление решения задачи определения напряженно – деформированного состояния в окрестности вершины трещины

в материале с определяющими уравнениями Рамберга – Огуда $\varepsilon = \sigma/E + \alpha\sigma^n$ разыскивалось в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(r, \theta) &= Kr^{-1/(n+1)}\tilde{\sigma}_{ij}(\theta), \sigma_e(r, \theta) = Kr^{-1/(n+1)}\tilde{\sigma}_e(\theta), \\ \varepsilon_{ij}^p(r, \theta) &= \alpha K^n r^{-1/(n+1)}\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta), u_i(r, \theta) = \alpha K^n r^{1/(n+1)}\tilde{u}_i(\theta).\end{aligned}\quad (1.5)$$

С тех пор асимптотический анализ распределения напряжений у кончика трещины стал неотъемлемой частью исследований, проводимых в механике разрушения [104, 120]. Только в самое последнее время метод разложения по собственным функциям полей напряжений и перемещений у вершины трещины или углового выреза был применен в целом ряде исследований [99, 115, 131].

Определение напряженного – деформированного состояния вблизи кончика трещины в материале со степенным законом упрочнения с помощью асимптотических разложений полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины и построение высших приближений асимптотических разложений являлись предметом многочисленных исследований на протяжении многих лет, начиная с классических работ Дж. Хатчинсона, Дж. Райса и Дж. Розенгрена [117, 118, 133] до работ самого последнего времени [55, 56, 60, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 105, 115, 131, 142, 143, 144, 139, 140, 150].

В работах Дж. Хатчинсона, Дж. Райса и Дж. Розенгрена [118, 133] показано, что компоненты тензора напряжений определяются в соответствии с равенством

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{J}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (1.6)$$

где J – инвариантный интеграл механики разрушения; r, θ – полярные координаты с полюсом в вершине трещины; B, n – материальные константы степенного закона упрочнения; $I_n = I_n(n)$ – безразмерный J -интеграл; $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ – универсальное угловое распределение напряжений, определяемое из решения краевой задачи.

Необходимо отметить важность и актуальность развития методов асимптотического анализа и их приложений к решению нелинейных задач на собственные значения в механике деформируемого твердого тела [91, 92] и, в частности, в нелинейной механике разрушения и континуальной механике поврежденности [95, 124, 154]. В нелинейной механике разрушения одним из наиболее часто

применяемых методов является метод разложения по собственным функциям [59, 61, 62, 124, 146, 147, 148, 154], который приводит к нелинейным задачам на собственные значения, решение которых, в свою очередь, требует привлечения развитых асимптотических методов и численных подходов и их сочетания. Например, в [61, 62, 124, 146, 147, 148, 154] показано, что накопление повреждений вблизи кончика трещины приводит к изменению напряженно – деформированного состояния вблизи дефекта и к более слабой особенности поля напряжений или к ее полному устраниению. Определение новой радиальной асимптотики полей напряжений и деформаций (или скоростей деформаций) сводится к нелинейным задачам на собственные значения, тщательное качественное исследование которых и составляет суть проблемы и обеспечивает решение задачи в целом. Полученное решение также представляется полезным при построении автомодельных решений второго рода [95, 96] и связанных с ними нелинейных задач на собственные значения [2, 61, 62, 95].

1.4. Смешанное деформирование элемента конструкции с дефектом

Поскольку элементы ответственных конструкций, находящихся в реальных эксплуатационных условиях, подвержены действию сложных систем механических нагрузок, характерной для них является эксплуатация в условиях сложного напряженного состояния при наличии различным образом ориентированных дефектов. Поэтому понятен интерес специалистов к задачам о наклонных трещинах и о трещинах, находящихся в условиях одновременно приложенных нормального растягивающего напряжения, поперечного и продольного сдвига, которые в механике разрушения относятся к классу смешанных мод нагружения.

В механике разрушения принято выделять три типа трещин, которые отвечают трем видам нагружения (рис. 1): трещины нормального отрыва, поперечного и продольного (антiplоского) сдвига [8, 23, 70, 72, 73, 76, 77, 152, 153]. Выделение трех видов трещин восходит к линейной механике разрушения, где суперпозиция решений, полученных для трех типов нагружения, дает решение,

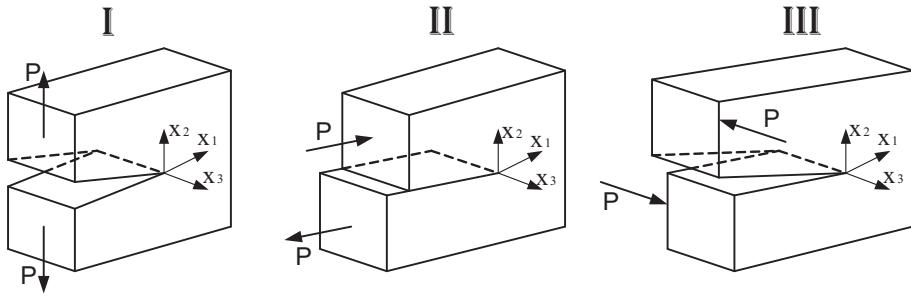


Рис. 1. Три вида нагружения образца с дефектом

справедливое вблизи кончика трещины, для произвольного нагружения тела с дефектом. Данные виды нагружения элемента конструкции с трещинами в линейно упругих материалах достаточно хорошо изучены и построено полное асимптотическое разложение поля напряжений вблизи вершины трещины для произвольного нагружения тела с дефектом в линейно упругом теле ($r \rightarrow 0$):

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_k^{m,ij}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (1.7)$$

где $f_k^{m,ij}(\theta)$ – угловые распределения компонент тензора напряжения, определяемые из решения краевых задач.

$$\begin{aligned} f_k^{1,11} &= \frac{k}{2} \left[\left(2 + \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right], \\ f_k^{1,22} &= \frac{k}{2} \left[\left(2 - \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta + \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right], \\ f_k^{1,12} &= \frac{k}{2} \left[\left(\frac{k}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta - \left(\frac{k}{2} + (-1)^k \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k^{2,11} &= -\frac{k}{2} \left[\left(2 + \frac{k}{2} - (-1)^k \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta - \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right], \\ f_k^{2,22} &= -\frac{k}{2} \left[\left(2 - \frac{k}{2} + (-1)^k \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta + \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta \right], \\ f_k^{2,12} &= \frac{k}{2} \left[\left(\frac{k}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 3 \right) \theta - \left(\frac{k}{2} - (-1)^k \right) \cos \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \theta \right], \end{aligned}$$

$$f_k^{3,13} = \sin(k/2 - 1)\theta, \quad f_k^{3,23} = \cos(k/2 - 1)\theta,$$

где r, θ – полярные координаты с полюсом в вершине трещины; K_I, K_{II}, K_{III} – коэффициенты интенсивности напряжений для трещин нормального отрыва,

поперечного и продольного сдвига:

$$K_I = \sqrt{2\pi}a_1^1, \quad K_{II} = -\sqrt{2\pi}a_1^2, \quad T = 4a_2^2, \quad K_{III} = \sqrt{2\pi}a_1^3.$$

Однако распределение напряжений, деформаций и перемещений вблизи кончика трещины в условиях смешанного нагружения образца с дефектом в нелинейных материалах изучено недостаточно и многие вопросы остаются открытыми.

Впервые обращение к исследованию смешанных видов деформирования в материале со степенным законом упрочнения, по всей видимости, было сделано в работах Дж. Ши [137, 138]. В [137, 138] были рассмотрены поля напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины, находящейся под действием растягивающей и сдвиговой нагрузок (т.о., рассматривалось смешанное нагружение, отвечающее трещинам типа I и типа II). Ши впервые ввел коэффициент смешанности нагружения [138]:

$$M^p = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right|, \quad (1.8)$$

который принимает нулевое значение для трещины поперечного сдвига, значение, равное единице, для чистого растяжения и значение $0 < M^p < 1$ для смешанных форм нагружения образца с дефектом.

В настоящее время сложилось ясное понимание о необходимости определения всего спектра собственных значений в задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена [117, 118, 133]. В линейной механике разрушения в качестве базового распределения может быть выбрано классическое решение Уильямса с корневой особенностью [156, 157]. Более сильная или более слабая особенности могут быть введены для моделирования степени поврежденности (степени разрушения) материала у кончика трещины на уровне мезо- и микроструктуры материала. Математически данная модель приводит к необходимости определения всего спектра собственных значений в задачах на собственные значения, следующих из проблем нахождения напряженно – деформированного состояния в непосредственной окрестности вершины трещины. Если в линейной механике разрушения весь спектр собственных значений найден (1.7) и построено полное асимптотическое представление полей напряжений и перемещений (решение M.

Уильямса), то в нелинейной механике разрушения остается открытым вопрос о спектре собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы отыскания полей напряжений у вершины трещины в материалах со степенными определяющими уравнениями.

В [123] численно определены собственные значения для нелинейной задачи на собственные значения, следующей из задачи определения напряженно – деформированного состояния у неподвижной трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния. Решение было получено методом Рунге – Кутты – Фельберга в сочетании с методом пристрелки. Однако в рассматриваемом случае (для задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига) метод пристрелки становится многопараметрическим и результаты требуют дополнительные обоснования.

Систематическое изложение расчетов угловых распределений напряжений и деформаций у вершины трещины в материале со степенным определяющим законом для различных значений параметра смешанности нагружения приведено в [84], где разработан метод и приведены результаты расчетов упруго-пластических коэффициентов интенсивности напряжений в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого нормального отрыва до чистого сдвига, что позволило рассмотреть состояние произвольно ориентированной прямолинейной трещины в виде математического разреза при двухосном нагружении различной интенсивности. На основе выполненных расчетов установлен характер влияния вида смешанных форм нагружения и пластических свойств материала, описываемых показателем деформационного упрочнения. В [141] собраны существенные результаты, полученные для смешанных форм деформирования, к 2003 году. Современное представление об экспериментальных результатах, полученных для смешанного нагружения элементов конструкций можно получить из работ [70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 139, 140]

1.5. Многомасштабный характер разрушения

В современной механике разрушения сложилось ясное понимание процесса нелинейного деформирования и разрушения как процесса многоуровневого, многомасштабного [21, 22, 31, 68], для описания которого следует вводить в

рассмотрение иерархическую цепочку зон, окружающих вершину трещины. В каждой из областей справедливо свое асимптотическое представление поля напряжений. Для определения асимптотики поля напряжений необходимо знать весь спектр собственных значений нелинейных задач на собственные значения, к которым редуцируется анализ напряженно – деформированного состояния у кончика трещины.

В настоящей диссертационной работе предложен численный метод определения всего спектра собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования для материала со степенными определяющими уравнениями (степенной закон деформационной теории пластичности, степенной закон установившейся ползучести). Предлагаемый численный метод может быть использован для нахождения промежуточно – асимптотического автомодельного представления поля напряжений в связанной (ползучесть – поврежденность) задаче о трещине в условиях смешанного нагружения в материале со степенными определяющими уравнениями теории установившейся ползучести. Следует дополнительно отметить, что класс нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения, представляется важным в связи с необходимостью применения многомасштабных, многоуровневых моделей [59, 61], в соответствии с которыми в окрестности вершины трещины необходимо вводить в рассмотрение совокупность областей с доминирующим действием различных асимптотик поля напряжений и проводить процедуру асимптотического сращивания получаемых решений. Аккуратное построение всех промежуточных зон с той или иной асимптотикой и проведение процедуры сращивания требует знания всего спектра собственных значений, и, по всей видимости, эти задачи до сих пор не решены. В литературе известны только две математически полностью реализованные процедуры сращивания: классическое решение Райса для трещины антиплоского сдвига [134] и аналитическое решение задачи о трещине конечной длины в бесконечной пластине [115].

Для отражения многомасштабного характера разрушения и отображения локальной повреждаемости на различных уровнях может быть использован

график, изображенный на рис. 2 и приведенный впервые в работе [50]. В [50] отмечается, что развитие концепций мезомеханики предполагает более последовательный подход к решению задач, находящихся в междисциплинарных областях, таких как материаловедение и механика сплошных сред. К таким задачам относятся проблемы усталостного разрушения, ползучести, задачи комплексного термического и механического взаимодействия. На рис. 2 представлена диаграмма различных сингулярностей напряжений вблизи дефектов большого и маленького размеров – дислокаций, микро- и макродефектов. Приведенная схема отражает необходимость использования многоуровневого подхода, предполагающего построение иерархической цепочки областей с различными порядками особенностей поля напряжений в окрестности вершины трещины, что с математической точки зрения ведет к необходимости определения всего спектра собственных значений, как правило, в нелинейных задачах на собственные значения, получающихся в результате применения метода разложения по собственным функциям при анализе полей напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины.

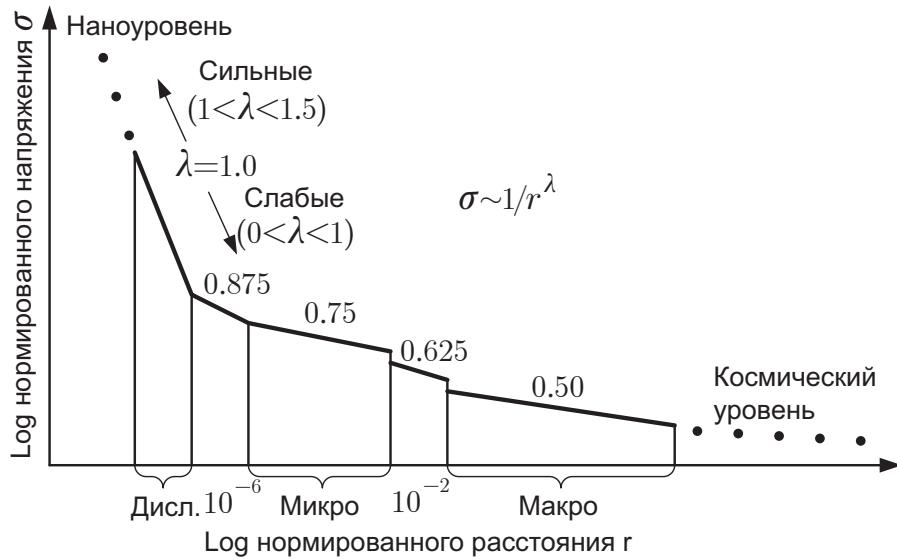


Рис. 2. Порядки сингулярности поля напряжений в окрестности вершины трещины

Определение всего спектра собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, даст возможность правильно описать структуру окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования и построить конфигурации области полностью поврежденного материала, окружающей вер-

шину трещины.

Асимптотические решения задач о трещинах нормального отрыва и попечного (антиплоского) сдвига в связанный постановке задачи с применением аналогичного подхода были получены в [62, 64, 65, 66]. В [62, 64, 65, 66] показано, что накопление повреждений влияет на распределение напряжений и скоростей деформаций ползучести в непосредственной окрестности вершины трещины и приводит к новой асимптотике поля напряжений и появлению области полностью поврежденного материала. В настоящей работе развита техника построения асимптотических решений, предложенных в [62, 64, 65, 66], на случай смешанного нагружения и применена к анализу смешанного деформирования тела с разрезом.

2. Глава 2. Смешанное нагружение бесконечного тела с полубесконечной трещиной в условиях плоского деформированного состояния

2.1. Математическая постановка задачи

Исследование напряженно – деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования элемента конструкции с дефектом в материале со степенными определяющими уравнениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}B\sigma_e^{n-1}s_{ij}, \quad (2.1)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформации, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ – компоненты девиатора тензора напряжений, $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ – интенсивность касательных напряжений, B , n – материальные константы; приводит к необходимости исследования уравнений равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2.2)$$

и условия совместности деформаций

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial r} + r\frac{\partial^2(r\varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \quad (2.3)$$

В предположении реализации плоского деформированного состояния определяющие соотношения (2.1) принимают вид

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{3}{4}B\sigma_e^{n-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{3}{2}B\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta}, \quad (2.4)$$

где интенсивность касательных напряжений определяется формулой

$$\sigma_e^2 = 3(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2/4 + 3\sigma_{r\theta}^2. \quad (2.5)$$

В полярных координатах r, θ компоненты тензора напряжений выражаются через функцию напряжений Эри $\chi(r, \theta)$ в следующем виде

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta\chi - \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right), \quad (2.6)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

– оператор Лапласса

Границные условия задачи есть классические условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0. \quad (2.7)$$

2.2. Метод разложения по собственным функциям. Асимптотическое решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряжений и деформаций у вершины трещины в условиях смешанного деформирования

Одним из наиболее распространенных методов определения напряженно – деформированного состояния в окрестности вершины трещины является метод разложения по собственным функциям [59, 120], в соответствии с которым асимптотическое представление функции напряжений Эри в окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$) разыскивается в форме

$$\chi(r, \theta) = r^{\lambda+1} f(\theta). \quad (2.8)$$

Тогда компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= Kr^{\lambda-1}(\lambda+1)\lambda f(\theta) = Kr^{\lambda-1}\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta), \\ \sigma_{rr}(r, \theta) &= Kr^{\lambda-1}[(\lambda+1)f(\theta) + f''(\theta)] = Kr^{\lambda-1}\tilde{\sigma}_{rr}(\theta), \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -Kr^{\lambda-1}\lambda f'(\theta) = Kr^{\lambda-1}\tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Асимптотическое представление интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины имеет форму $\sigma_e(r, \theta) = r^{\lambda-1}f_e(\theta)$, где

$$f_e(\theta) = \sqrt{[f''(\theta) + (1 - \lambda^2)f(\theta)]^2 + 4\lambda^2[f'(\theta)]^2}.$$

Поэтому компоненты тензора деформаций в окрестности вершины трещины имеют следующую структуру

$$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = -\varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = Br^{(\lambda-1)n}\tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta), \quad \varepsilon_{r\theta}(r, \theta) = Br^{(\lambda-1)n}\tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta), \quad (2.10)$$

где $\tilde{\varepsilon}_{rr} = 3f_e^{n-1}[f''(\theta) + (1 - \lambda^2)f(\theta)]/4$, $\tilde{\varepsilon}_{r\theta} = -3f_e^{n-1}\lambda f'(\theta)/2$.

Подстановка выражений (2.10) для компонент тензора деформаций в условие совместности (2.3) позволяет получить нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $f(\theta)$

$$2[(\lambda - 1)n + 1]\frac{d\tilde{\varepsilon}_{r\theta}}{d\theta} = \frac{d^2\tilde{\varepsilon}_{rr}}{d\theta^2} - (\lambda - 1)n[(\lambda - 1)n + 2]\tilde{\varepsilon}_{rr} \quad (2.11)$$

или

$$\begin{aligned} & f_e^2 f^{(4)} \left\{ (n-1) [(1-\lambda^2)f + f'']^2 + f_e^2 \right\} + (n-1)(n-3) \times \\ & \times \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\}^2 [(1-\lambda^2)f + f''] + \\ & + (n-1)f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f' + f''']^2 + [(1-\lambda^2)f + f''] (1-\lambda^2)f'' + \right. \\ & \left. + 4\lambda^2 (f''^2 + f' f''') \right\} [(1-\lambda^2)f + f''] + 2(n-1)f_e^2 \times \\ & \times \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\} [(1-\lambda^2)f' + f'''] + \\ & + C_1(n-1)f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\} f' + \\ & + C_1 f_e^4 f'' - C_2 f_e^4 [(1-\lambda^2)f + f''] + f_e^4 (1-\lambda^2)f'' = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где приняты обозначения

$$f_e^2 = [(1-\lambda^2)f + f'']^2 + 4\lambda^2 f'^2, \quad C_1 = 4\lambda[(\lambda - 1)n + 1],$$

$$C_2 = (\lambda - 1)n[(\lambda - 1)n + 2].$$

Решение нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка (2.12) должно удовлетворять краевым условиям, следующим из требования отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины (2.7)

$$f(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.12) вместе с краевыми условиями (2.13) представляет собой двухточечную краевую задачу на собственные значения: необходимо найти собственные значения λ , отвечающие нетривиальным решениям уравнения (2.12),

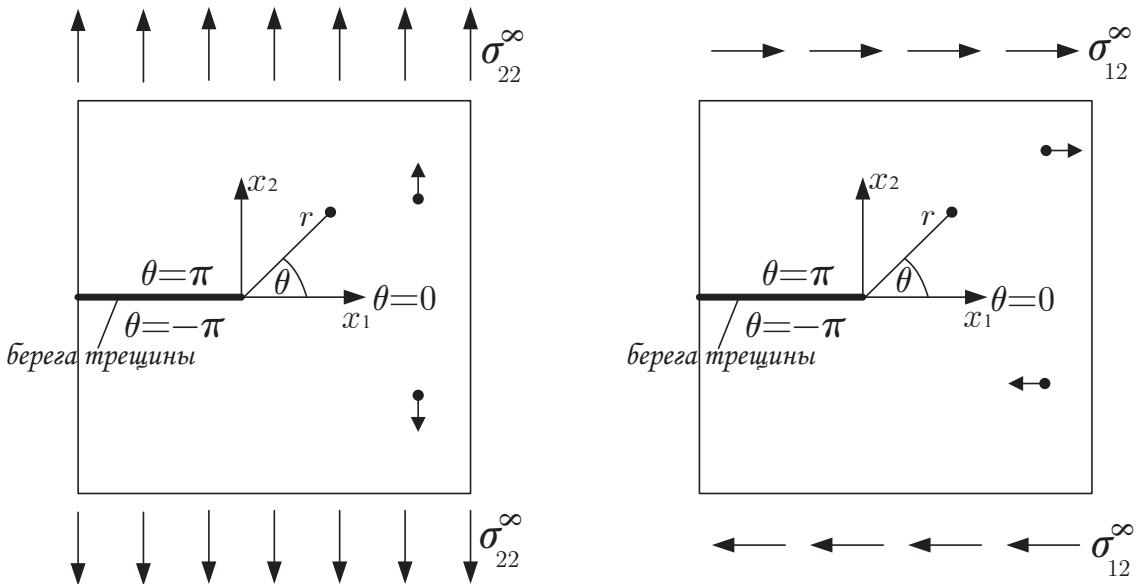


Рис. 3. Типы нагружения образца с трещиной: симметричное раскрытие берегов трещины, антисимметричное деформирование

удовлетворяющим краевым условиям (2.13). Для решения такого ряда задач обычно обращаются к численным методам: семейству методов Рунге – Кутты – Фельберга и методу пристрелки, в рамках которых первоначально необходимо перейти к задаче Коши для уравнения (2.12).

В механике разрушения выделяют три вида нагружения образца с дефектом: нормальный отрыв (тип I), поперечный сдвиг (тип II) и продольный (антитривеский) сдвиг (тип III).

Симметричное раскрытие берегов трещины (трещины типа I) (рис. 3) приводит к следующим начальным условиям:

$$f(\theta = 0) = 1, \quad f'(\theta = 0) = 0, \quad f''(\theta = 0) = A_2, \quad f'''(\theta = 0) = 0. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.12) вместе с начальными условиями (2.14) интегрируется численно. В случае трещины нормального отрыва находят два значения: λ и A_2 , таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу дефекта

$$f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0.$$

Для трещины типа II (антисимметричное деформирование) (рис. 3) начальные условия имеют вид:

$$f(\theta = 0) = 0, \quad f'(\theta = 0) = 1, \quad f''(\theta = 0) = 0, \quad f'''(\theta = 0) = A_3 \quad (2.15)$$

и для выполнения условий отсутствия поверхностных усилий подбираются значения параметров λ и A_3 .

Одно собственное значение хорошо известно и соответствует классической задаче Хатчинсона – Райса – Розенгrena [117, 118, 133]: $\lambda = n/(n + 1)$. Однако сейчас интерес представляют другие собственные значения, отличные от собственных чисел, отвечающих задаче Хатчинсона – Райса – Розенгrena [59, 61, 60].

2.3. Численный алгоритм определения собственных значений и собственных функций

В случае смешанного деформирования соображения симметрии и антисимметрии использованы быть не могут и необходимо искать решение уравнения (2.12) на отрезке $[-\pi, \pi]$. В условиях смешанного нагружения при численном решении уравнения (2.12) отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ можно разбить на два отрезка: $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$. Сначала уравнение (2.12) интегрируется на отрезке $[0, \pi]$ и краевая задача сводится к задаче Коши с начальными условиями

$$\begin{aligned} f(\theta = 0) &= 1, & f'(\theta = 0) &= (\lambda + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2), \\ f''(\theta = 0) &= A_2, & f'''(\theta = 0) &= A_3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Значение производной первого порядка $f'(\theta = 0)$ находится из условия смешанности нагружения (значение параметра смешанности нагружения (1.6), задающего вид нагружения, известно). Неизвестные постоянные A_2 и A_3 определяются таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу трещины:

$$f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0. \quad (2.17)$$

После того как подобраны постоянные A_2 и A_3 , уравнение (2.12) интегрируется на отрезке $[-\pi, 0]$. Вновь двухточечная краевая задача для уравнения (2.12) с граничными условиями

$$\begin{aligned} f(\theta = -\pi) &= 0, & f'(\theta = -\pi) &= 0, \\ f(\theta = 0) &= 1, & f'(\theta = 0) &= (\lambda + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

заменяется задачей Коши с начальными условиями

$$f(\theta = -\pi) = 0, f'(\theta = -\pi) = 0, f''(\theta = -\pi) = B_2, f'''(\theta = -\pi) = B_3. \quad (2.19)$$

Неизвестные постоянные B_2 и B_3 подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия равновесия элемента, расположенного на луче $\theta = 0$. Уравнения равновесия данного элемента требуют непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ на луче $\theta = 0$, что влечет за собой непрерывность функций $f(\theta)$ и $f'(\theta)$ при $\theta = 0$ (и, следовательно, краевые условия (2.18)). Поэтому две неизвестные постоянные B_2 и B_3 определяются таким образом, чтобы решение, разыскиваемое на отрезке $[-\pi, 0]$, удовлетворяло бы краевым условиям при $\theta = 0$. Если в качестве λ взять собственное значение, отвечающее задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена, т.е. $\lambda = n/(n + 1)$, можно построить угловые распределения компонент тензора напряжений σ_{RR} , $\sigma_{R\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ в окрестности вершины трещины для различных значений параметра смешанности нагружения (рис. 4 – 9).

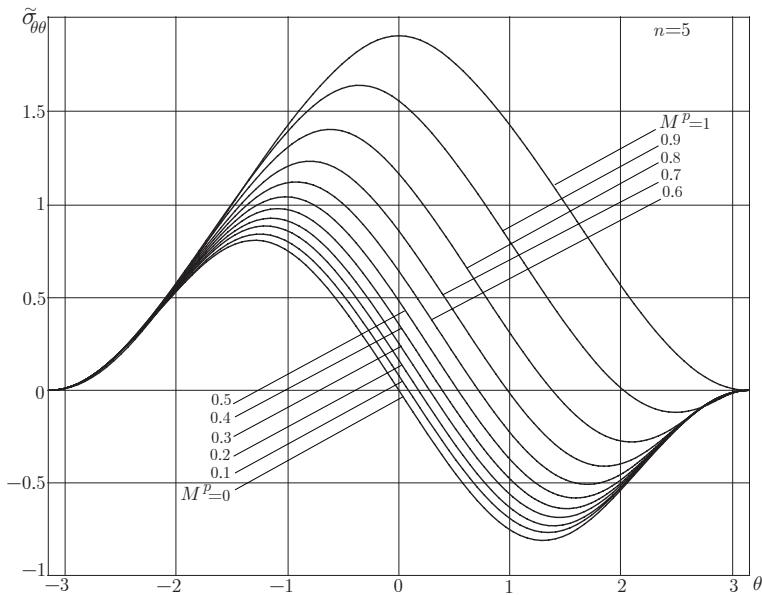


Рис. 4. Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ для $n = 5$ и различных значений параметра смешанности нагружения

Однако, если необходимо найти другие собственные значения задачи, отличные от $\lambda = n/(n + 1)$, и, в целом, весь спектр собственных значений, то возникает вопрос: какие дополнительные физические или математические со-

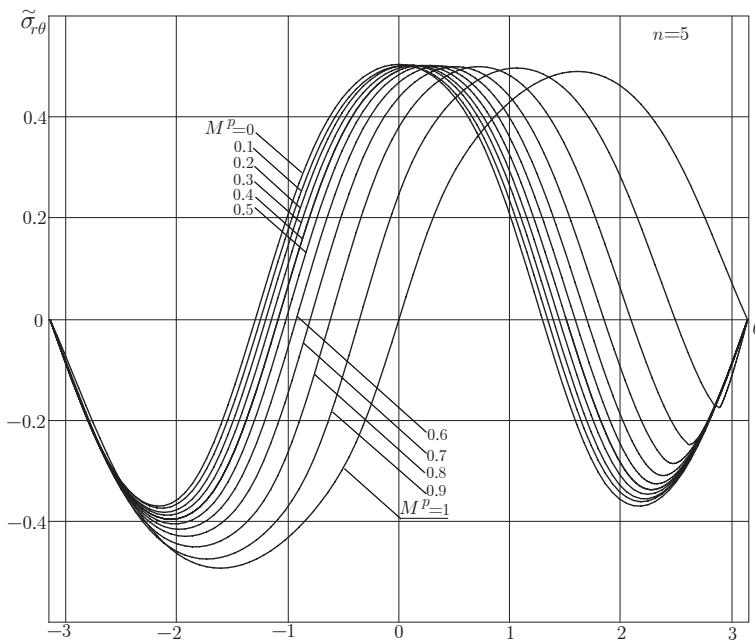


Рис. 5. Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{R\theta}$ для $n = 5$ и различных значений параметра смешанности нагружения

образования должны быть привлечены для отыскания всего спектра собственных значений. Если считать, что λ – искомая величина, то при интегрировании уравнения (2.12) имеется три неизвестных параметра λ , A_2 и A_3 и только два условия (2.17), из которых они могут быть определены. Очевидно, что для отыскания собственного значения λ необходимо дополнительное условие. С целью определения всего спектра собственных значений λ можно проанализировать поведение радиальной компоненты тензора напряжений σ_{rr} и из рис. 6, 9 увидеть, что радиальная компонента тензора напряжений является непрерывной функцией полярного угла для всех значений параметра смешанности нагружения и показателя упрочнения материала, тогда как при построении решения непрерывность этой компоненты не требовалась (т.е. до реализации процедуры построения численного решения было выбрано $\lambda = n/(n + 1)$ и компонента σ_{rr} оказалось непрерывной для всех значений параметра смешанности нагружения и показателя нелинейности материала). В связи с чем при отыскании собственных значений, отличных от собственных чисел Хатчинсона – Райса – Розенгрена, следует потребовать непрерывность радиальной компоненты тензора напряжений σ_{rr} при $\theta = 0$: $\sigma_{rr}|_{\theta=0-} = \sigma_{rr}|_{\theta=0+}$. Поэтому далее при построении новых собственных значений накладывалось дополнительное условие

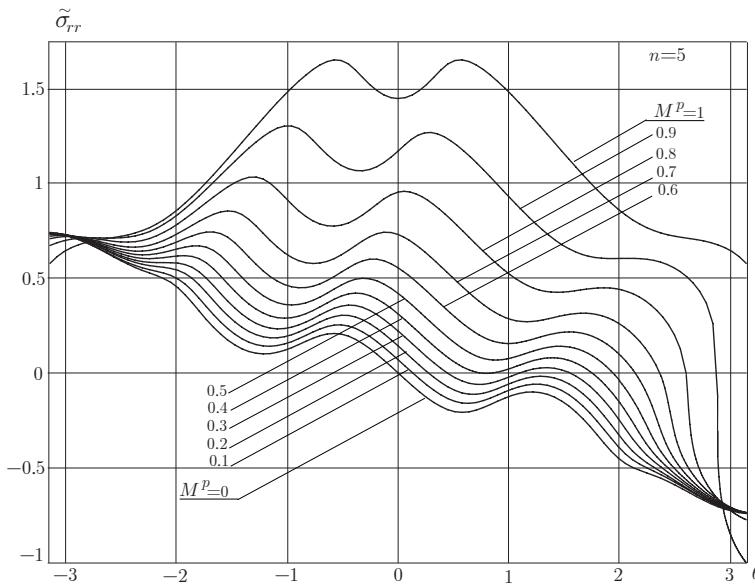


Рис. 6. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{RR} для $n = 5$ и различных значений параметра смешанности нагружения

– требование непрерывности радиальной компоненты тензора напряжений. Результаты вычислений приведены в таблицах 1 – 5, где собраны новые значения λ и пристрелочные значения $f''(\theta = 0)$, $f'''(\theta = 0)$, $f''(\theta = -\pi)$ и $f'''(\theta = -\pi)$ для всех значений параметра смешанности нагружения и практических важных значений показателя нелинейности материала. Построены угловые распределения компонент тензора напряжений для новых вычисленных собственных значений для практических важных значений параметра смешанности нагружения M^p , которые представлены на рис. 10 – 12.

2.4. Выводы по второй главе

В главе предложена процедура численного решения нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенным определяющим уравнением в условиях смешанного деформирования. Предложенная процедура позволяет численно отыскать весь спектр собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного

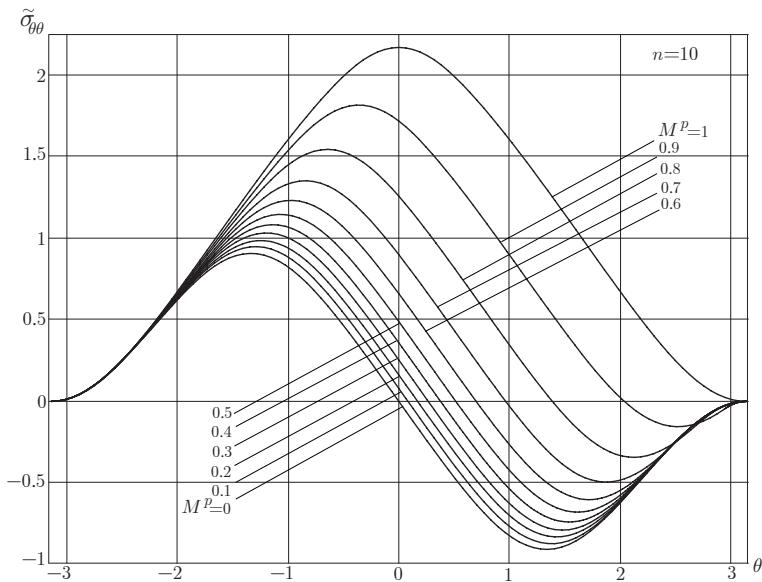


Рис. 7. Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ для $n = 10$ и различных значений параметра смешанности нагружения

деформирования в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого сдвига до чистого нормального отрыва. С помощью предложенного метода найдены собственные значения, отличные от собственных значений, отвечающих задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена. Полученные новые собственные значения могут быть использованы для многомасштабного, многоуровневого описания процессов разрушения в окрестности вершины трещины. Экспериментаторами установлено наличие взаимосвязанных разномасштабных промежуточных уровней деформаций внутри твердого тела. Структурные исследования проводились методами оптической, электронной растровой микроскопии и лазерной профилометрии, с помощью чего выявлен механизм "разрыхления" материала в вершине трещины. Через эту зону разрыхленного дефрагментированного объема распространяется трещина. Например, в работе [103] показано усталостное распространение трещины поперечного сдвига (рис.13). Из рисунка видно, что сначала образована трещина с вершиной в точке А посредством приложения растягивающей нагрузки. Отрезок АВ представляет собой распространение трещины поперечного сдвига. В точке В трещина отклоняется от направления, предсказываемого механикой хрупкого разрушения. В работе [124] показана область полностью поврежденного материала для меди в условиях ползучести (рис.14). Когда поликристаллические металлы подвержены влия-

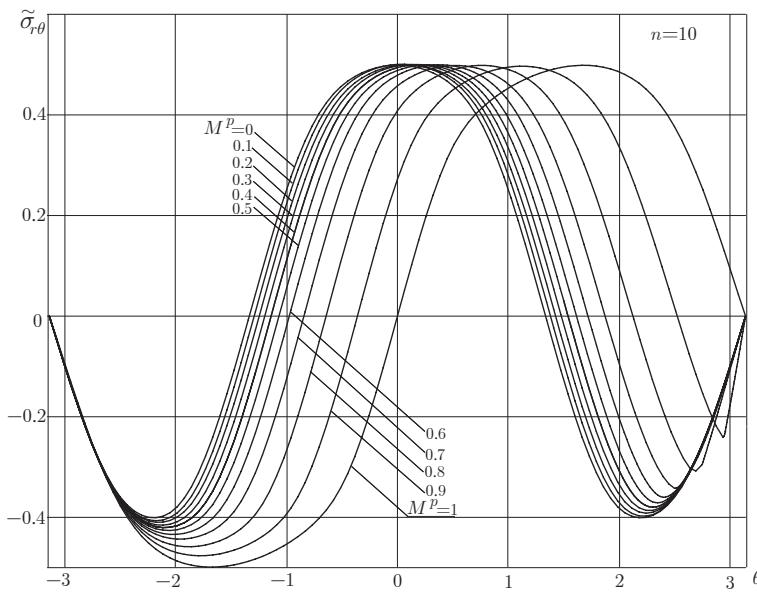


Рис. 8. Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{R\theta}$ для $n = 10$ и различных значений параметра смешанности нагружения

нию высоких температур, больших чем $1/3$ от абсолютной температуры плавления, микропоры и микротрешины зарождаются и растут в основном на границах зерен перпендикулярно растягивающему напряжению или на границах сращивания трех зерен. Такое поведение материала известно как разрушение в условиях ползучести. Полости в условиях ползучести распространяются и сливаются, что со временем приводит дальнейшему распространению трещины. В работе [18] показана кинетика накопления повреждений в процессе усталостных испытаний (рис.15). На первом снимке плотность микротрешин достигает критического значения, и в результате слияния микротрещин на боковой поверхности образца возникает макротрещина (второй снимок). В вершине макротрешины формируется пластическая зона, внутри которой происходит процесс накопления повреждений. В работе [100] показан процесс распространения трещины в условиях ползучести для стали 1/2CrMoV при $565^\circ C$ (рис.16) В работе [114] показаны образцы, выполненные из меди при $523^\circ C$ непосредственно перед разрушением (рис.17) В работе [112] показан процесс межзеренного порообразования в меди $600^\circ C$ (оптическая микроскопия)(рис.18) Проведенный численный анализ позволяет оценить асимптотику механических полей у вершины трещины, на расстояниях, сопоставимых с зоной разрыхления (с областью диспергированного материала).

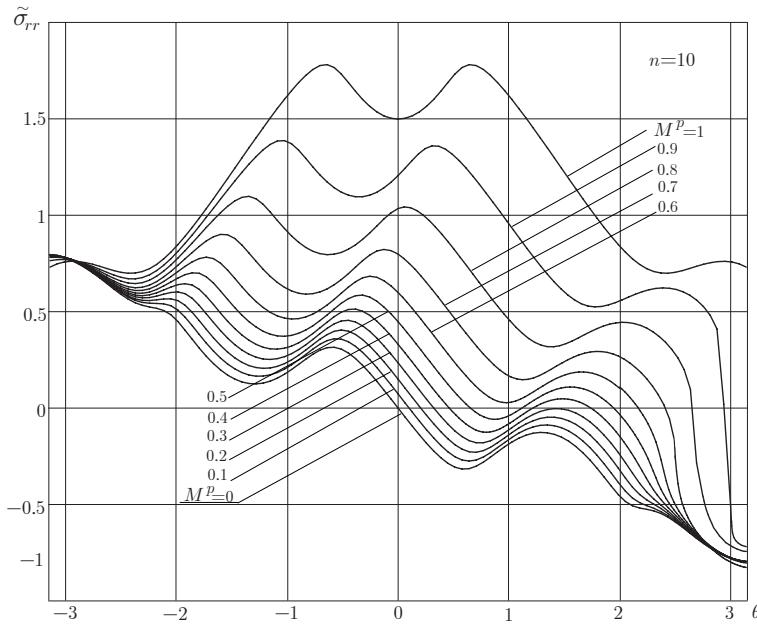


Рис. 9. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{RR} для $n = 10$ и различных значений параметра смешанности нагружения

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M_p=0.95$	-0.309869	-0.00688358	-0.40957700	0.74603759	-0.29255603
$M^p=0.9$	-0.309310	-0.00746148	-0.34463585	0.77731092	-0.31321778
$M^p=0.8$	-0.306884	-0.00996871	-0.21058584	0.78640537	-0.32799705
$M^p=0.7$	-0.302045	-0.01542396	-0.08978943	0.75741586	-0.32136781
$M^p=0.6$	-0.290875	-0.03362512	0.01979812	0.70249977	-0.29808470
$M^p=0.5$	-0.282566	-0.03627586	0.10896079	0.65049974	-0.27572247
$M^p=0.4$	-0.274875	-0.02411375	0.18635846	0.59034778	-0.24903185
$M^p=0.3$	-0.271672	-0.00707118	0.26039756	0.54384603	-0.23047317
$M^p=0.2$	-0.272741	0.00777103	0.33759891	0.50051568	-0.21560386
$M^p=0.1$	-0.275936	0.01259293	0.44276166	0.45968464	-0.20336002
$M^p=0.05$	-0.277383	0.00837850	0.51837610	0.43774348	-0.19699116

Таблица 1. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского деформированного состояния для $n = 2$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M^p=0.95$	-0.2615800	0.16526391	-0.78313224	0.91194750	-0.69420072
$M^p=0.9$	-0.2605200	0.16047619	-0.81748438	0.81341603	-0.61765105
$M^p=0.8$	-0.2560520	0.14417774	-0.83872814	0.58912056	-0.44276214
$M^p=0.7$	-0.2488700	0.12664254	-0.83107373	0.37238060	-0.27211349
$M^p=0.6$	-0.2407000	0.10925276	-0.81436588	0.16149307	-0.09010035
$M^p=0.5$	-0.2305125	0.08216350	-0.78775272	-0.10143826	0.11307991
$M^p=0.4$	-0.2267000	0.08306290	-0.78236357	-0.15537326	0.12520525
$M^p=0.3$	-0.2276690	0.09564659	-0.80147752	-0.21314184	0.16194873
$M^p=0.2$	-0.2350409	0.10437916	-0.82213218	-0.28023620	0.21073145
$M^p=0.1$	-0.2507830	0.09386121	-0.83715932	-0.36986985	0.28049608
$M^p=0.05$	-0.2620259	0.06749148	-0.80560180	-0.43124202	0.32992763

Таблица 2. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского деформированного состояния для $n = 3$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M^p=0.95$	-0.234510	0.23629790	-0.92802370	1.01421287	-0.89879170
$M^p=0.9$	-0.2345100	0.23494397	-0.96578525	0.91220986	-0.80833313
$M^p=0.8$	-0.2275300	0.21268658	-0.97478519	0.66767540	-0.58788978
$M^p=0.7$	-0.2204600	0.19173868	-0.95597136	0.44048988	-0.38497527
$M^p=0.6$	-0.2143800	0.17174714	-0.92891657	0.23274641	-0.20005442
$M^p=0.5$	-0.2068130	0.13976515	-0.88809969	-0.07220148	0.09265238
$M^p=0.4$	-0.2044960	0.13247925	-0.86779026	-0.13274409	0.11685835
$M^p=0.3$	-0.2067100	0.14209456	-0.87902312	-0.19835989	0.17205995
$M^p=0.2$	-0.2150000	0.14916286	-0.89865713	-0.27578999	0.24045659
$M^p=0.1$	-0.2335470	0.13351049	-0.93710024	-0.38072851	0.33718749
$M^p=0.05$	-0.2491400	0.10176768	-0.94712576	-0.45772536	0.41077325

Таблица 3. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского деформированного состояния для $n = 4$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M^p=0.95$	-0.221500	0.28582791	-1.02783586	1.07498192	-1.02460592
$M^p=0.9$	-0.218248	0.27626050	-1.05562675	0.95897619	-0.91152450
$M^p=0.8$	-0.210625	0.25206377	-1.05847935	0.70603672	-0.66675390
$M^p=0.7$	-0.204759	0.23006507	-1.03437364	0.47497228	-0.44625765
$M^p=0.6$	-0.200055	0.20816473	-1.00100530	0.26630294	-0.24894919
$M^p=0.5$	-0.194290	0.17545776	-0.95407952	-0.05398415	0.09326457
$M^p=0.4$	-0.192320	0.16081721	-0.92189756	-0.12006116	0.11215683
$M^p=0.3$	-0.194812	0.16846055	-0.92734213	-0.19053284	0.17756211
$M^p=0.2$	-0.202342	0.17310706	-0.94097518	-0.27412405	0.25706057
$M^p=0.1$	-0.221158	0.15595641	-0.98984496	-0.38760621	0.36933919
$M^p=0.05$	-0.237872	0.12120353	-1.04027203	-0.47379170	0.45783258

Таблица 4. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского деформированного состояния для $n = 5$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
$M^p=0.95$	-0.210800	0.31120751	-1.08697613	1.10415827	-1.09624005
$M^p=0.9$	-0.207204	0.30231092	-1.11496378	0.98516357	-0.97513726
$M^p=0.8$	-0.200080	0.27843964	-1.11576660	0.72959827	-0.71782714
$M^p=0.7$	-0.195100	0.25526013	-1.08775909	0.49617463	-0.48609996
$M^p=0.6$	-0.191250	0.23194856	-1.05006028	0.28618945	-0.27942962
$M^p=0.5$	-0.187000	0.20146662	-1.00220816	0.21886770	-0.03710250
$M^p=0.4$	-0.184800	0.17920893	-0.95879580	0.10887899	-0.11197716
$M^p=0.3$	-0.187200	0.18550116	-0.95997525	0.18076020	-0.18575105
$M^p=0.2$	-0.194070	0.18900929	-0.96835632	-0.27331750	0.26753598
$M^p=0.1$	-0.212455	0.17011750	-1.01745991	-0.39241154	0.39014040
$M^p=0.05$	-0.229370	0.13304842	-1.09550621	-0.48497154	0.48902078

Таблица 5. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского деформированного состояния для $n = 6$

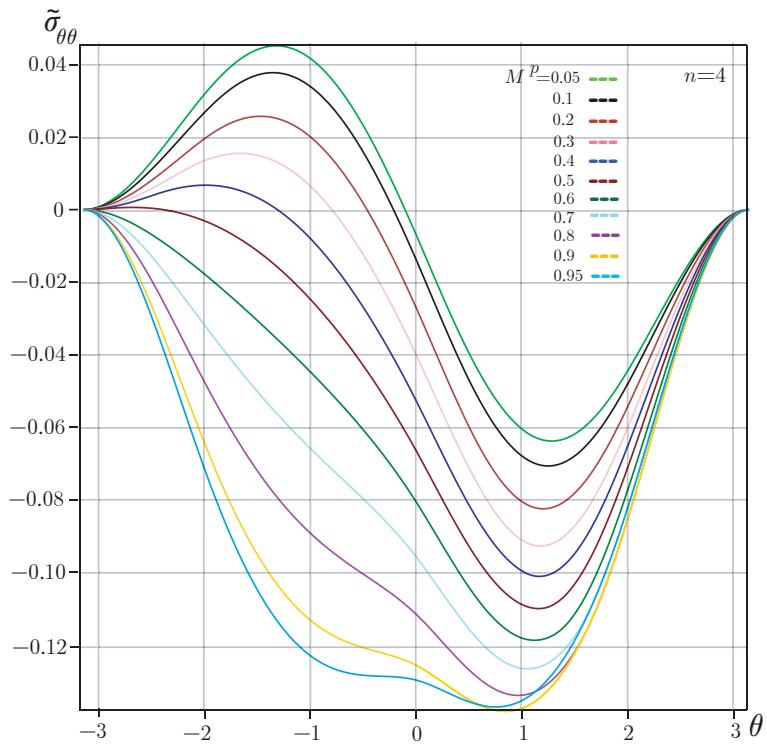


Рис. 10. Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ для $n = 4$ и различных значений параметра смешанности нагружения M^p

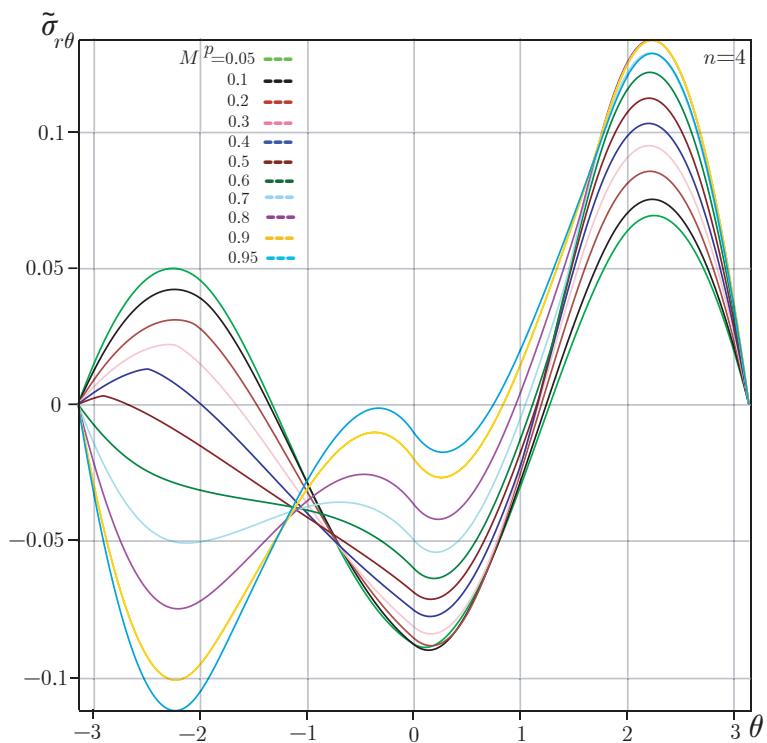


Рис. 11. Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{R\theta}$ для $n = 4$ и различных значений параметра смешанности нагружения M^p

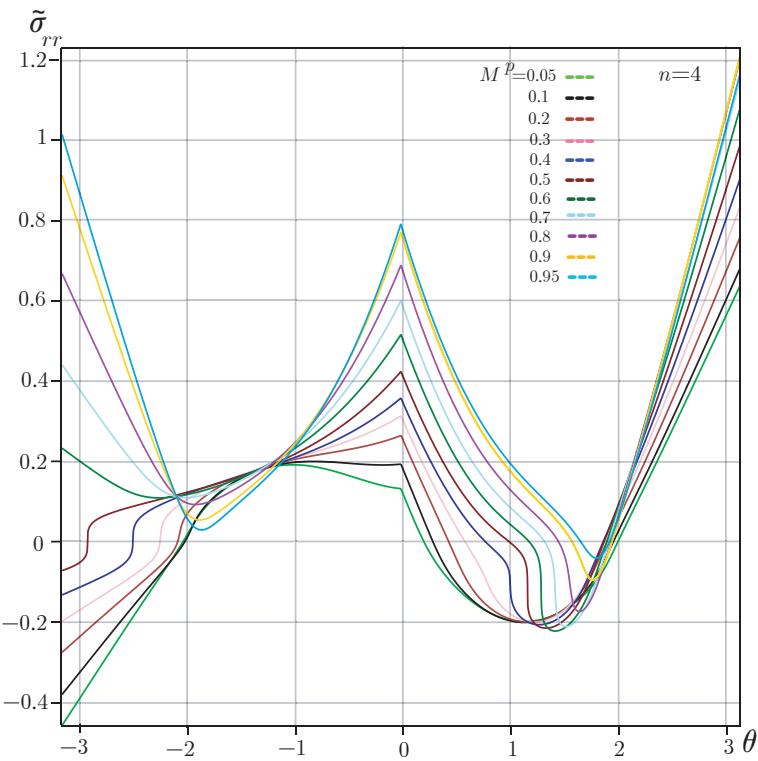


Рис. 12. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{RR} для $n = 4$ и различных значений параметра смешанности нагрузки M^p

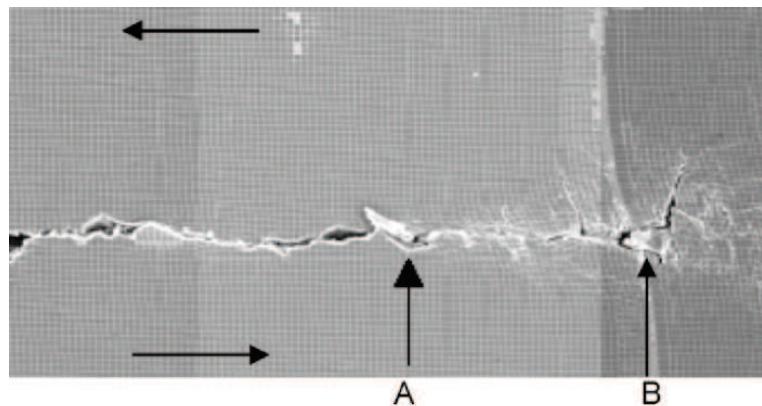


Рис. 13. Усталостное распространение трещины поперечного сдвига [103]

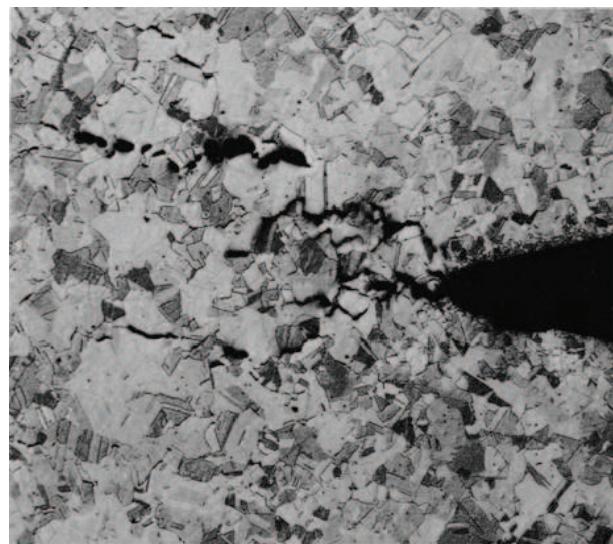


Рис. 14. Область разрыхленного материала в окрестности вершины трещины в образце из меди в условиях ползучести [124]

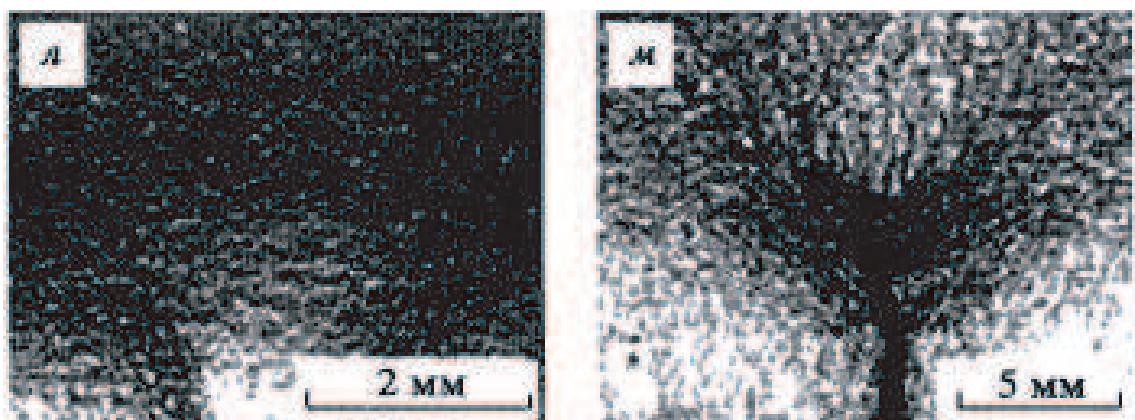


Рис. 15. Кинетика накопления повреждений в процессе усталостных испытаний [18]

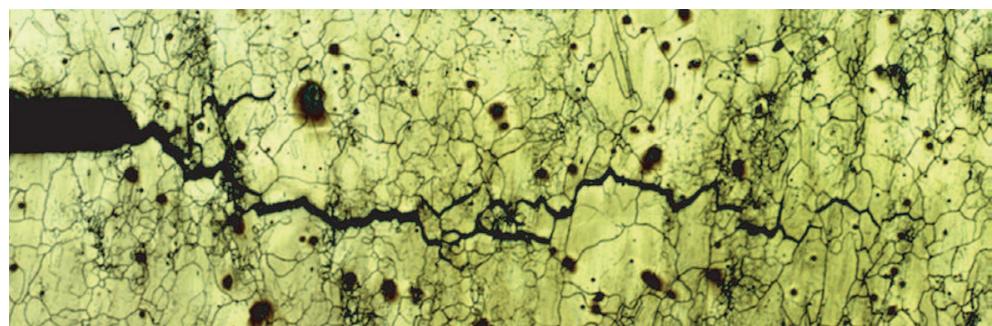


Рис. 16. Процесс распространения трещины в условиях ползучести [100]

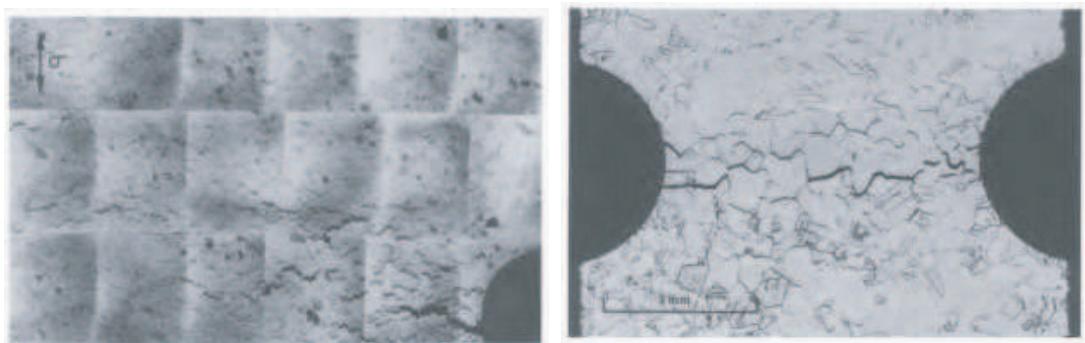


Рис. 17. Образцы, выполненные из меди при $523^{\circ}C$ [114]

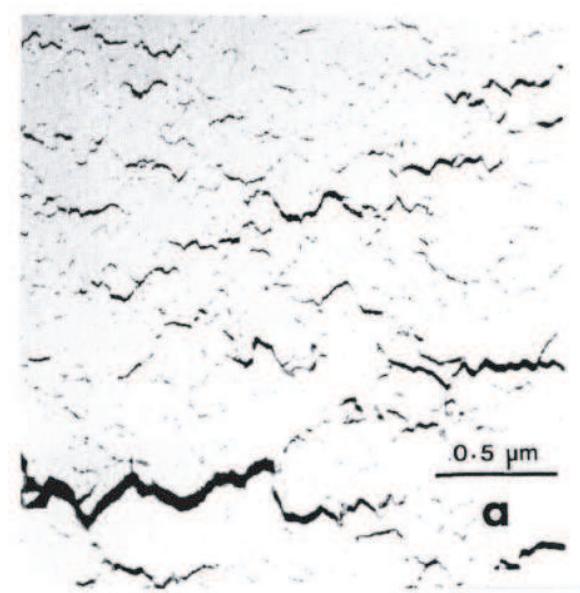


Рис. 18. Межзеренное порообразование в меди [112]

3. Глава 3. Связанная постановка задачи о неподвижной трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного деформирования и ее решение

3.1. Связанная постановка задачи о трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного деформирования. Промежуточная автомодельная асимптотика

В данном параграфе будет приведено приложение найденной новой асимптотики поля напряжений к задаче о стационарной трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного нагружения и будет построено автомодельное промежуточное асимптотическое решение задачи о трещине в связанной (ползучесть – поврежденность) постановке задачи.

Определяющие уравнения материала строятся на основе степенного закона Бейли – Нортона теории установившейся ползучести с применением концепции эффективного напряжения [27, 45, 107, 154]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (3.1)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести, ψ – параметр сплошности, эволюционирующий в соответствии со степенным законом накопления повреждений Качанова – Работнова [30, 46]

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m, \quad (3.2)$$

где A, m – постоянные материала, определяемые из эксперимента. Постоянные материала A, m для ряда металлов и сплавов приведены в [136]. Экспериментально установлен [17], что для большинства материалов $m = 0, 7n$.

Естественно предположить, что процесс активного накопления рассеянных повреждений происходит в непосредственной окрестности кончика трещины,

где образуется область полностью поврежденного (диспергированного) материала, а на удалении от нее параметр сплошности стремится к единице, что отвечает неповрежденному материалу, что позволяет сформулировать асимптотическое граничное условие в бесконечно удаленной точке как условие асимптотического сближения с решением Хатчинсона – Райса – Розенгрена – решением для степенных определяющих уравнений (3.1), где $\psi \equiv 1$ (таким образом, рассматривается непосредственная окрестность вершины трещины). В соответствии с гипотезой о маломасштабной поврежденности на больших расстояниях от вершины трещины (больших по сравнению с характерным линейным размером области полностью поврежденного материала, но все еще малых по сравнению с длиной трещины, характерным линейным размером образца), поле напряжений определяется решением Хатчинсона – Райса – Розенгрена (решением аналогичной задачи без учета процесса накопления повреждений $\psi \equiv 1$):

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (3.3)$$

где C^* – инвариантный интеграл, вводимый в механике разрушения при анализе деформаций ползучести [125, 126].

Начальное условие при $t = 0$ и граничное условие в бесконечно удаленной точке (3.3) совпадают, поскольку они задаются решением задачи для $\psi \equiv 1$.

Анализ размерности величин, входящих в уравнения (3.1)–(3.3), позволяет установить, что для определяющих соотношений (3.1), кинетического уравнения (3.2), начальных и граничных условий (3.3) существует автомодельная переменная

$$R = r(At)^{-(n+1)/m} BI_n / C^* \quad (3.4)$$

и система уравнений задачи допускает автомодельное представление решения:

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At)^{-1/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \theta), \quad \psi(r, \theta, t) = \hat{\psi}(R, \theta).$$

Выражение (3.4) и существование автомодельной переменной обосновывается с помощью анализа размерностей.

Перейдем к безразмерным величинам согласно формулам:

$$\hat{r} = \frac{r}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{((k(n))/L)^{1/(n+1)}}, \quad (3.5)$$

где $k(n) = C^*/(BI_n)$, L – некоторая характерна длина, T – характерное время. Характерные длина и характерное время могут быть связаны с помощью анализа кинетического уравнения накопления повреждений (3.2), которое позволяет установить, что

$$T = \frac{1}{A} \left(\frac{k(n)}{L} \right)^{-m/(n+1)}. \quad (3.6)$$

В этом случае безразмерные напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$ как функции от безразмерных переменных могут быть представлены в следующем виде

$$\hat{\sigma}_{ij}(\hat{r}, \theta, \hat{t}) = \frac{1}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}} \sigma_{ij}(r/L, \theta, tA(k(n)/L)^{m/(n+1)}). \quad (3.7)$$

Так как в рассматриваемой задаче отсутствует характерный линейный размер L , то необходимо его исключить из аргументов функции $\hat{\sigma}_{ij}$, что достигается с помощью введения автомодельной переменной

$$R = \frac{r/L}{[tA(k(n)/L)^{m/(n+1)}]^{(n+1)/m}}. \quad (3.8)$$

В результате имеем автомодельную переменную (3.4).

В этом случае напряжения и параметр сплошности представляются в виде

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At)^{(n+1)/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \theta), /quad \psi(r, \theta/t) = \hat{\psi}(R, \theta), \quad (3.9)$$

где $\hat{\sigma}_{ij}(R, \theta)$ и $\hat{\psi}(R, \theta)$ являются безразмерными функциями безразмерных переменных (R, θ) и подлежат определения в ходе решения задачи.

Следует отметить, что граничное условие в бесконечно удаленной точке может быть сформулировано в более общей по сравнению с (3.3) форме

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) \rightarrow \tilde{C} r^s \sigma_{ij}^-(\theta, n), \quad (3.10)$$

где показатель степени s подлежит определению в ходе решения задачи, \tilde{C} – амплитуда поля напряжений на бесконечности, определяемая геометрией реального образца и системой приложенных нагрузок. Для степенных определяющих соотношений (3.1), кинетического уравнения (3.2) и более общих граничных условий (3.10) существует автомодельная переменная

$$R = r(At\tilde{C}^m)^{1/sm}. \quad (3.11)$$

После введения автомодельной переменной уравнения равновесия (2.2), определяющие уравнения (3.1), условия совместности (2.3) сохраняют свою форму, а кинетическое уравнение накопления повреждений принимает вид

$$R\hat{\psi}_{,R} = -sm(\hat{\sigma}_e/\hat{\psi})^m. \quad (3.12)$$

Асимптотическое решение задачи для функции напряжений Эри и параметра сплошности вне области диспергированного материала, формирующейся у вершины трещины, (на больших расстояниях от вершины трещины $R \rightarrow \infty$) разыскивается в форме

$$\begin{aligned} \chi(R, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} R^{\lambda_k+1} f_k(\theta), \\ \psi(R, \theta) &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} R^{\gamma_k} g_k(\theta), \end{aligned} \quad (3.13)$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \chi(R, \theta) &= R^{\lambda_0+1} f_0(\theta) + R^{\lambda_1+1} f_1(\theta) + R^{\lambda_2+1} f_2(\theta) + R^{\lambda_3+1} f_3(\theta) + \\ &+ R^{\lambda_4+1} f_4(\theta) + o(R^{\lambda_4}), \\ \psi(R, \theta) &= 1 - R^{\gamma_0} g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) - R^{\gamma_2} g_2(\theta) - R^{\gamma_3} g_3(\theta) - \\ &- R^{\gamma_4} g_4(\theta) + o(R^{\gamma_4}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\chi(R, \theta)$ – функция напряжения Эри, $\lambda_k, \gamma_k, f_k(\theta), g_k(\theta)$ – неизвестные собственные значения и собственные функции, соответственно, подлежащие определению. В силу разложений (3.14) асимптотическое представление компонент тензора напряжений вне области диспергированного материала имеет вид

$$\sigma_{ij}(R, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} R^{\lambda_k-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\theta), \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{RR}^{(k)}(\theta) &= (\lambda_k + 1) f_k + (f_k)'', \\ \tilde{\sigma}_{R\theta}^{(k)}(\theta) &= -(\lambda_k + 1)(f_k)', \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(k)}(\theta) &= \lambda_k(\lambda_k + 1)f_k, \end{aligned}$$

или в раскрытой форме

$$\begin{aligned}
 \sigma_{RR}(R, \theta) &= R^{s_0}[(\lambda_0 + 1)f_0 + f_0''] + R^{s_1}[(\lambda_1 + 1)f_1 + f_1''] + \\
 &+ R^{s_2}[(\lambda_2 + 1)f_2 + f_2''] + R^{s_3}[(\lambda_3 + 1)f_3 + f_3''] + \\
 &+ R^{s_4}[(\lambda_4 + 1)f_4 + f_4''] + \dots, \\
 \sigma_{R\theta}(R, \theta) &= -R^{s_0}(\lambda_0 + 1)f_0' - R^{s_1}(\lambda_1 + 1)f_1' - R^{s_2}(\lambda_2 + 1)f_2' - \\
 &- R^{s_3}(\lambda_3 + 1)f_3' - R^{s_4}(\lambda_4 + 1)f_4' + \dots, \\
 \sigma_{\theta\theta}(R, \theta) &= R^{s_0}\lambda_0(\lambda_0 + 1)f_0 + R^{s_1}\lambda_1(\lambda_1 + 1)f_1 + R^{s_2}\lambda_2(\lambda_2 + 1)f_2 + \\
 &+ R^{s_3}\lambda_3(\lambda_3 + 1)f_3 + R^{s_4}\lambda_4(\lambda_4 + 1)f_4 + \dots,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

где $s_k = \lambda_k - 1$.

Асимптотический анализ уравнений задачи позволяет установить, что справедливы равенства $\lambda_k - \lambda_0 = k(\lambda_1 - \lambda_0)$ для всех k и асимптотическое представление интенсивности касательных напряжений принимает форму

$$\begin{aligned}
 \sigma_e(R, \theta) &= R^{\lambda_0-1}\sigma_e^{(0)}(\theta)[1 + R^{\lambda_1-\lambda_0}\sigma_e^{(1)}(\theta) + R^{2(\lambda_1-\lambda_0)}\sigma_e^{(2)}(\theta) + \\
 &+ R^{3(\lambda_1-\lambda_0)}\sigma_e^{(3)}(\theta) + R^{4(\lambda_1-\lambda_0)}\sigma_e^{(4)}(\theta)] + \dots,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

где

$$\begin{aligned}
 \sigma_e^{(0)} &= \sqrt{[(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0'']^2 + 4\lambda_0^2(f_0')^2}, \\
 \sigma_e^{(1)} &= f_e^{(1)} / (\sigma_e^{(0)})^2, \quad f_e^{(1)} = [(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''][(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''] + 4\lambda_0\lambda_1f_0'f_1',
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_e^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} - \left(\frac{f_e^{(1)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^2 \right], \\
 f_e^{(2)} &= [(1 - \lambda_0^2)f_1 + f_1'']^2 + 2[(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''][(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2''] + \\
 &+ 4\lambda_1^2f_1^2 + 8\lambda_0\lambda_2f_1'f_2',
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_e^{(3)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{f_e^{(3)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} - \frac{f_e^{(1)}f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^4} + \left(\frac{f_e^{(1)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^3 \right], \\
 f_e^{(3)} &= 2[(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''][(1 - \lambda_3^2)f_3 + f_3''] + 2[(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''] \times \\
 &\times [(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2''] + 8\lambda_0\lambda_3f_0'f_3' + 8\lambda_1\lambda_2f_1'f_2',
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\sigma_e^{(4)} = \frac{1}{8} \left[-5 \left(\frac{f_e^{(1)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^4 + 6 \left(\frac{f_e^{(1)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^2 \frac{f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{f_e^{(2)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \right)^2 - 4 \frac{f_e^{(1)} f_e^{(3)}}{(\sigma_e^{(0)})^4} + 4 \frac{f_e^{(4)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \Big], \\
f_e^{(4)} &= [(1 - \lambda_2^2) f_2 + f_2'']^2 + 2[(1 - \lambda_0^2) f_0 + f_0''][(1 - \lambda_4^2) f_4 + f_4''] + \\
& + 2[(1 - \lambda_1^2) f_1 + f_1''][(1 - \lambda_3^2) f_3 + f_3''] + 4\lambda_2^2(f_2')^2 + 8\lambda_0\lambda_4 f_0' f_4' + 8\lambda_1\lambda_3 f_1' f_3'.
\end{aligned}$$

Кинетическое уравнение накопления повреждений и гипотеза о том, что порядки малости слагаемых, последовательно появляющихся в этом уравнении в правой части, позволяют связать показатели степеней в асимптотических разложениях функции напряжения Эри и параметра сплошности (3.14): $\gamma_0 = (\lambda_0 - 1)m$, $\gamma_k = (\lambda_0 - 1)m + k(\lambda_1 - 1)$. Анализ асимптотических разложений компонент тензора скоростей деформаций ползучести дает возможность установить, что $\lambda_1 - \lambda_0 = \gamma_0 = (\lambda_0 - 1)m$. Откуда легко найти, что $\gamma_k = k(\lambda_0 - 1)m$ и получить следующие асимптотические представления компонент тензора скоростей деформаций ползучести вне области полностью поврежденного (диспергированного) материала:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{RR}(R, \theta) &= R^{(\lambda_0-1)n} \varepsilon_{RR}^{(0)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+m)} \varepsilon_{RR}^{(1)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+2m)} \varepsilon_{RR}^{(2)}(\theta) + \\
& + R^{(\lambda_0-1)(n+3m)} \varepsilon_{RR}^{(3)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+4m)} \varepsilon_{RR}^{(4)}(\theta) + \dots, \\
\dot{\varepsilon}_{R\theta}(R, \theta) &= R^{(\lambda_0-1)n} \varepsilon_{R\theta}^{(0)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+m)} \varepsilon_{R\theta}^{(1)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+2m)} \varepsilon_{R\theta}^{(2)}(\theta) + \\
& + R^{(\lambda_0-1)(n+3m)} \varepsilon_{R\theta}^{(3)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+4m)} \varepsilon_{R\theta}^{(4)}(\theta) + \dots,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

где угловые распределения компонент тензора деформаций ползучести определяются нижеприведенными формулами.

Угловые распределения главного члена асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций задаются соотношениями

$$\varepsilon_{RR}^{(0)}(\theta) = (\sigma_e^{(0)})^{n-1} [(1 - \lambda_0^2) f_0 + f_0''], \quad \varepsilon_{R\theta}^{(0)}(\theta) = -2(\sigma_e^{(0)})^{n-1} \lambda_0 f_0'. \tag{3.21}$$

Коэффициенты первого слагаемого в асимптотическом разложении компонент тензора скоростей деформаций имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{RR}^{(1)}(\theta) &= (\sigma_e^{(0)})^{n-1} \left\{ [(1 - \lambda_1^2) f_1 + f_1''] + [(1 - \lambda_0^2) f_0 + f_0''][(n-1)\sigma_e^{(1)} + n g_1] \right\}, \\
\varepsilon_{R\theta}^{(1)}(\theta) &= -2(\sigma_e^{(0)})^{n-1} \left\{ \lambda_1 f_1' + \lambda_0 f_0'[(n-1)\sigma_e^{(1)} + n g_1] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Коэффициенты второго слагаемого асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RR}^{(2)}(\theta) &= (\sigma_e^{(0)})^{n-1} \left\{ [(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2''] + [(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''][(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1] + \right. \\ &+ [(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''] \left\{ \frac{(n-1)}{2}[(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{n}{2}[(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} \right\}, \\ \varepsilon_{R\theta}^{(2)}(\theta) &= -2(\sigma_e^{(0)})^{n-1} \left\{ \lambda_2 f_2' + \lambda_1 f_1'[(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1] + \right. \\ &+ \lambda_0 f_0' \left\{ \frac{(n-1)}{2}[(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2}[(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} \right\}.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Коэффициенты третьего слагаемого асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RR}^{(3)}(\theta) &= (\sigma_e^{(0)})^{n-1} \left\{ [(1 - \lambda_3^2)f_3 + f_3''] + [(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2''][(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1] + \right. \\ &+ [(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''] \left\{ \frac{(n-1)}{2}[(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + \right. \\ &\left. + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2}[(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} + \\ &+ [(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''] \left\{ \frac{(n-1)}{3!}[(n-2)(n-3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n-2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \right. \\ &\left. + \frac{n}{3!}[(n+1)(n+2)g_1^3 + 6(n+1)g_1g_2 + 6g_3] + \right. \\ &\left. + \frac{n-1}{2}ng_1[(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \frac{n}{2}[(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} \right\}, \\ \varepsilon_{R\theta}^{(3)}(\theta) &= -2(\sigma_e^{(0)})^{n-1} \left\{ \lambda_3 f_3' + \lambda_2 f_2'[(n-1)\sigma_e^{(1)} + ng_1] + \right. \\ &+ \lambda_1 f_1' \left\{ \frac{(n-1)}{2}[(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n-1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2}[(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} + \\ &+ \lambda_0 f_0' \left\{ \frac{(n-1)}{3!}[(n+1)(n+2)g_1^3 + 6(n+1)g_1g_2 + 6g_3] + \right. \\ &\left. + \frac{n-1}{2}ng_1[(n-2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \right. \\ &\left. + \frac{(n-1)}{3!}[(n-2)(n-3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n-2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \right. \\ &\left. + \frac{n}{2}[(n+1)g_1^2 + 2g_2] \right\} \right\}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Коэффициенты четвертого слагаемого асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций задаются выражениями

$$\varepsilon_{RR}^{(4)}(\theta) = (\sigma_e^{(0)})^{n-1} \tilde{\varepsilon}_{RR}^{(4)}, \quad \varepsilon_{R\theta}^{(4)}(\theta) = (\sigma_e^{(0)})^{n-1} \tilde{\varepsilon}_{R\theta}^{(4)},$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{RR}^{(4)} &= (1 - \lambda_4^2)f_4 + f_4'' + [(1 - \lambda_3^2)f_3 + f_3''][(n - 1)\sigma_e^{(1)} + ng_1] + \\
&+ [(1 - \lambda_2^2)f_2 + f_2''] \left\{ \frac{(n - 1)}{2}[(n - 2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \right. \\
&+ n(n - 1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2}[(n + 1)g_1^2 + 2g_2] \Big\} + \\
&+ [(1 - \lambda_1^2)f_1 + f_1''] \left\{ \frac{(n - 1)}{3!}[(n - 2)(n - 3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n - 2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \right. \\
&+ \frac{(n - 1)}{2}[(n - 2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \frac{n}{2}(n - 1)\sigma_e^{(1)}[(n + 1)g_1^2 + 2g_2] + \\
&+ \frac{n}{3}[(n + 1)(n + 2)g_1^3 + 6(n + 1)g_1g_2 + 6g_3] \Big\} + \\
&+ [(1 - \lambda_0^2)f_0 + f_0''] \left\{ \frac{(n - 1)}{4!}[(n - 2)(n - 3)(n - 4)(\sigma_e^{(1)})^4 + \right. \\
&+ 12(n - 2)(n - 3)(\sigma_e^{(1)})^2\sigma_e^{(2)}] + \\
&+ \frac{(n - 1)}{4!}[24(n - 2)(\sigma_e^{(2)})^2 + 24(n - 2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(3)} + 24\sigma_e^{(4)}] + \\
&+ \frac{(n - 1)}{3!}ng_1[(n - 2)(n - 3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n - 2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \\
&+ \frac{n}{2}\frac{(n - 1)}{2}[(n + 1)g_1^2 + 2g_2][(n - 2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \\
&+ \frac{n}{3!}(n - 1)\sigma_e^{(1)}[(n + 1)(n + 2)g_1^3 + 6(n + 1)g_1g_2 + 6g_3] + \\
&+ \frac{n}{4!}[(n + 1)(n + 2)[(n + 3)g_1^4 + 12g_1^2g_2] + 24(n + 1)[g_2^2 + g_1g_3] + 24g_4] \Big\}, \tag{3.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{R\theta}^{(4)} &= \lambda_4 f'_4 + \lambda_3 f'_3[(n - 1)\sigma_e^{(1)} + ng_1] + \\
&+ \lambda_2 f'_2 \left\{ \frac{(n - 1)}{2}[(n - 2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + n(n - 1)g_1\sigma_e^{(1)} + \frac{n}{2}[(n + 1)g_1^2 + 2g_2] \right\} + \\
&+ \lambda_1 f'_1 \left\{ \frac{(n - 1)}{3!}[(n - 2)(n - 3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n - 2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \right. \\
&+ \frac{(n - 1)}{2}[(n - 2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] + \frac{n}{2}(n - 1)\sigma_e^{(1)}[(n + 1)g_1^2 + 2g_2] + \\
&+ \frac{n}{3}[(n + 1)(n + 2)g_1^3 + 6(n + 1)g_1g_2 + 6g_3] \Big\} + \\
&+ \lambda_0 f'_0 \left\{ \frac{(n - 1)}{4!}[(n - 2)(n - 3)(n - 4)(\sigma_e^{(1)})^4 + 12(n - 2)(n - 3)(\sigma_e^{(1)})^2\sigma_e^{(2)}] + \right. \\
&+ \frac{(n - 1)}{4!}[24(n - 2)(\sigma_e^{(2)})^2 + 24(n - 2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(3)} + 24\sigma_e^{(4)}] + \\
&+ \frac{(n - 1)}{3!}ng_1[(n - 2)(n - 3)(\sigma_e^{(1)})^3 + 6(n - 2)\sigma_e^{(1)}\sigma_e^{(2)} + 6\sigma_e^{(3)}] + \\
&+ \frac{n}{2}\frac{(n - 1)}{2}[(n + 1)g_1^2 + 2g_2][(n - 2)(\sigma_e^{(1)})^2 + 2\sigma_e^{(2)}] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n}{3!}(n-1)\sigma_e^{(1)}[(n+1)(n+2)g_1^3 + 6(n+1)g_1g_2 + 6g_3] + \\
& + \frac{n}{4!}[(n+1)(n+2)[(n+3)g_1^4 + 12g_1^2g_2] + 24(n+1)[g_2^2 + g_1g_3] + 24g_4].
\end{aligned}$$

Из условия совместности деформаций можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения угловых распределений компонент тензора напряжений. Для нахождения функции $f_0(\theta)$ получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, совпадающее с рассматриваемым ранее уравнением (2.12)

$$2[(\lambda_0 - 1)n + 1]\frac{d\varepsilon_{R\theta}^{(0)}}{d\theta} = \frac{d^2\varepsilon_{RR}^{(0)}}{d\theta^2} - (\lambda_0 - 1)n[(\lambda_0 - 1)n + 2]\varepsilon_{RR}^{(0)}. \quad (3.26)$$

Относительно функций $f_k(\theta)$ ($k \geq 1$) из условия совместности (2.3) следуют линейные обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}
& 2[(\lambda_0 - 1)(n + km) + 1]\frac{d\varepsilon_{R\theta}^{(k)}}{d\theta} = \frac{d^2\varepsilon_{RR}^{(k)}}{d\theta^2} - \\
& - (\lambda_0 - 1)(n + km)[(\lambda_0 - 1)(n + km) + 2]\varepsilon_{RR}^{(k)}.
\end{aligned} \quad (3.27)$$

Решение системы уравнений (3.26), (3.27) должно удовлетворять граничным условиям $f_k(\theta = \pm\pi) = 0$ и $f'_k(\theta = \pm\pi) = 0$. Численное решение системы уравнений (3.26), (3.27) на отрезке $[-\pi, \pi]$ разыскивалось с помощью описанного выше алгоритма в пакете Mathematica V. 5.1. Результаты представлены на рис. 19 – 26.

Решение уравнения (3.26) вместе с условиями отсутствия поверхностных усилий приводит к ранее рассмотренной нелинейной задаче на собственные значения.

3.2. Геометрия области полностью поврежденного материала

После нахождения численного решения системы уравнений (3.26), (3.27) можно определить границу области диспергированного материала в окрестно-

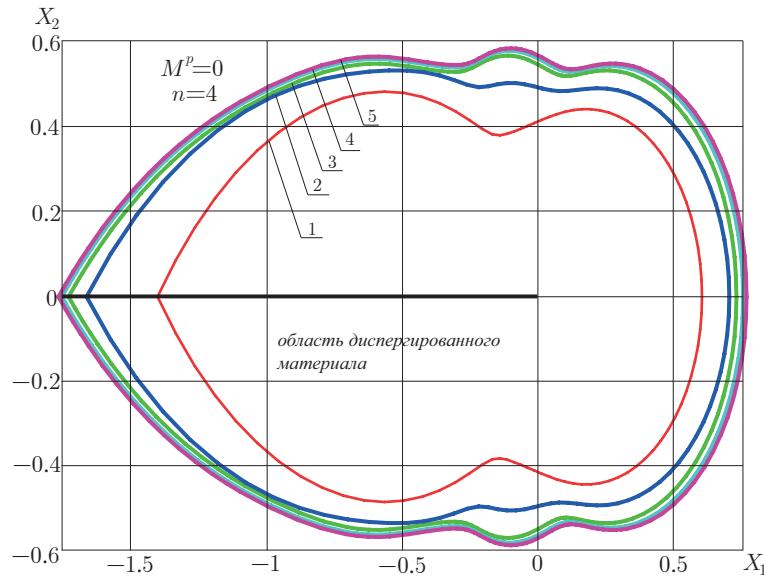


Рис. 19. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0$

сти вершины трещины с помощью уравнений

$$\psi(R, \theta) = 1 - R^{\gamma_0} g_0(\theta) = 0,$$

$$\psi(R, \theta) = 1 - R^{\gamma_0} g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) = 0,$$

$$\psi(R, \theta) = 1 - R^{\gamma_0} g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) - R^{\gamma_2} g_2(\theta) = 0,$$

$$\psi(R, \theta) = 1 - R^{\gamma_0} g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) - R^{\gamma_2} g_2(\theta) - R^{\gamma_3} g_3(\theta) = 0,$$

$$\psi(R, \theta) = 1 - R^{\gamma_0} g_0(\theta) - R^{\gamma_1} g_1(\theta) - R^{\gamma_2} g_2(\theta) - R^{\gamma_3} g_3(\theta) - R^{\gamma_4} g_4 = 0,$$

.....,

или в более общей форме

$$\psi(R, \theta) = 1 - \sum_{j=0}^N R^{\gamma_j} g_j(\theta) = 0.$$

Оказалось, что если в качестве условия в бесконечно удаленной точке принять условие асимптотического сближения с решением Хатчинсона – Райса – Розенгрена ($\lambda = n/(n+1)$) и предположить, что вне области активного накопления повреждений решение выходит на асимптотику Хатчинсона – Райса – Розенгрена, то границы области диспергированного материала, построенные с помощью двучленного и трехчленного асимптотических разложений параметра сплошности, значительно отличаются друг от друга по своей форме и размерам, что свидетельствует о том, что разложения (3.14) не имеют асимптотиче-

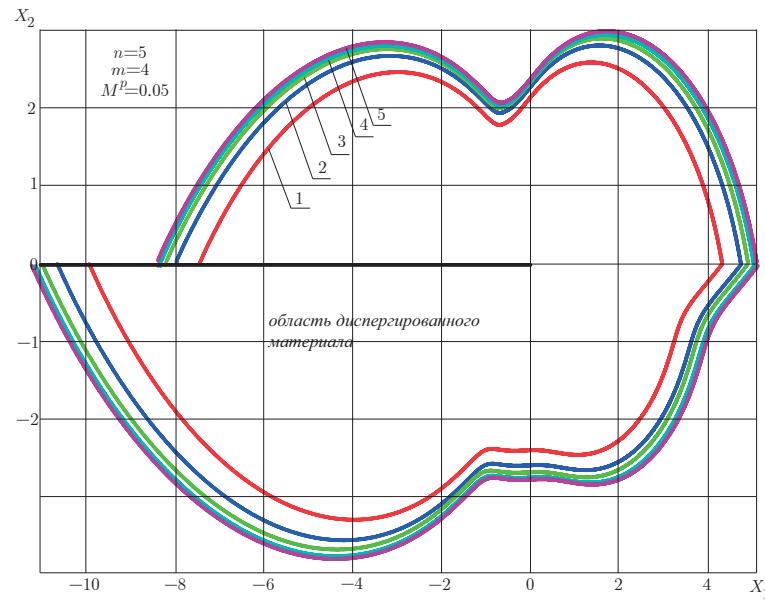


Рис. 20. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.05$

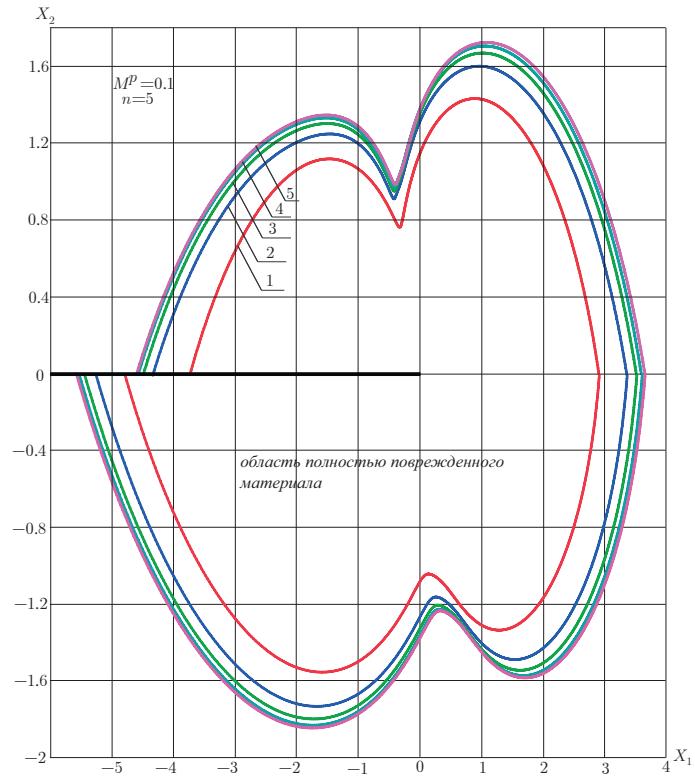


Рис. 21. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.1$

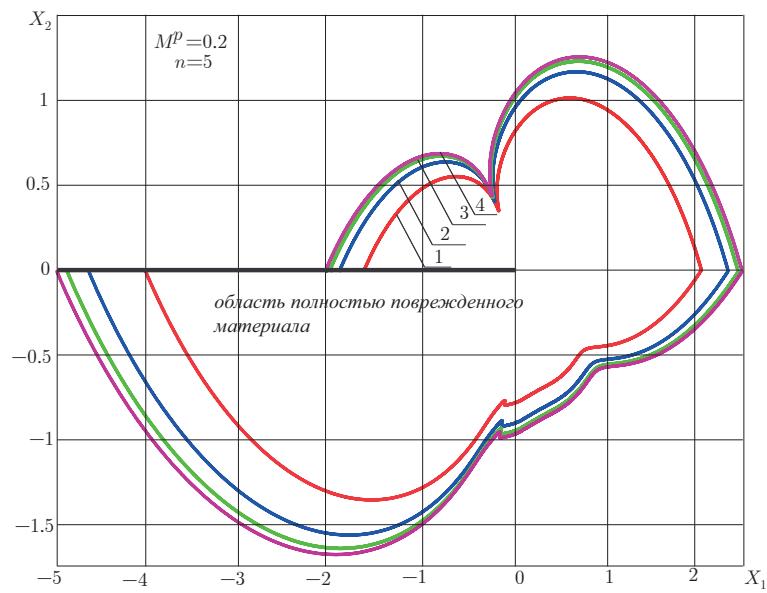


Рис. 22. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.2$

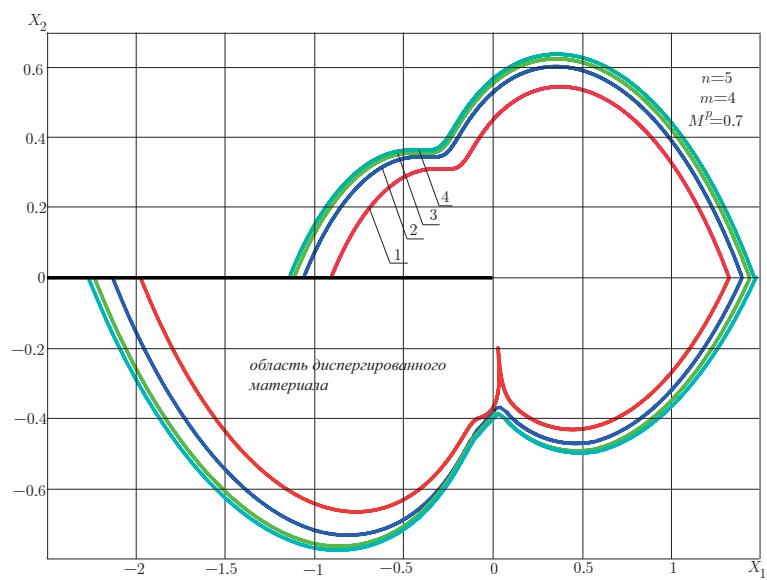


Рис. 23. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.7$

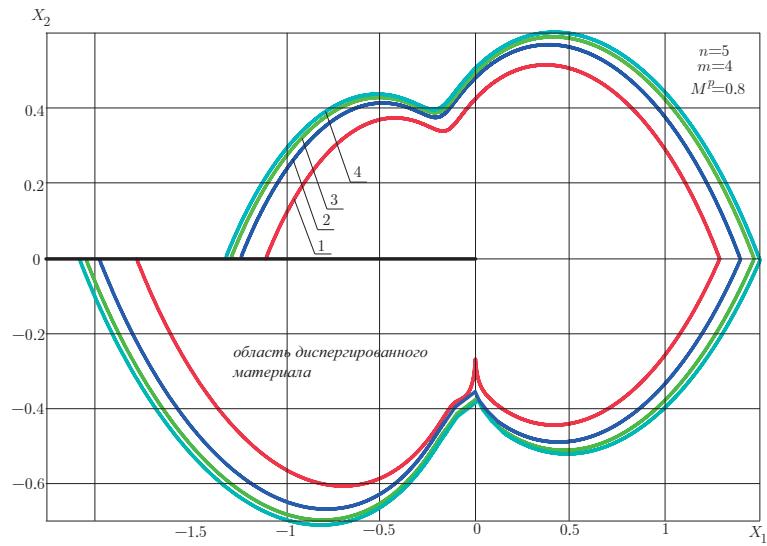


Рис. 24. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.8$

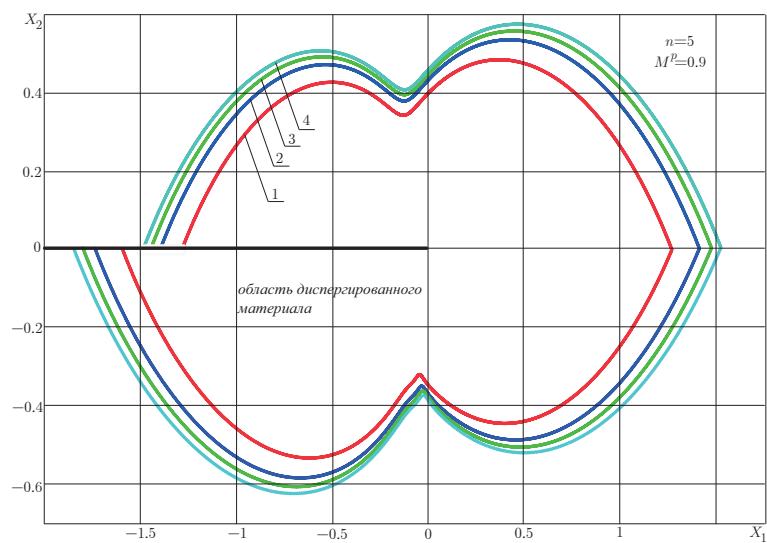


Рис. 25. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.9$

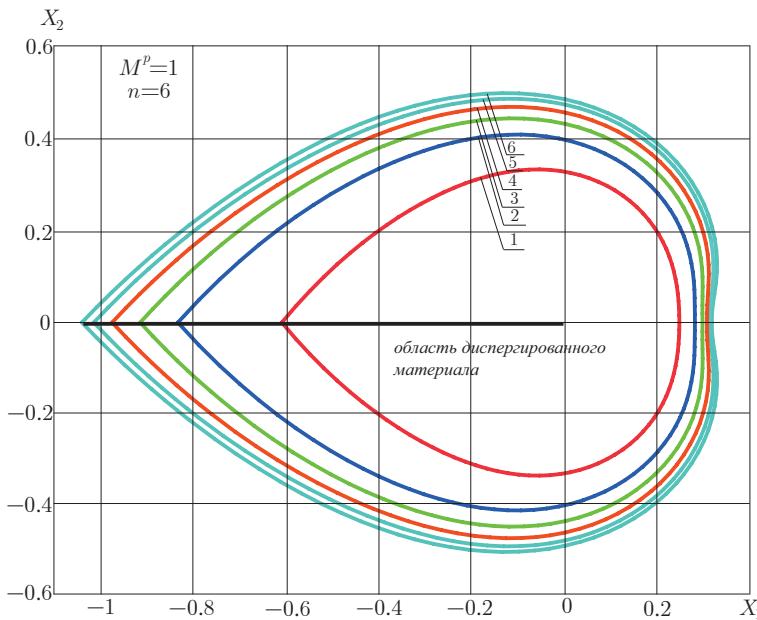


Рис. 26. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 1$

ской природы, ибо каждое следующее слагаемое в асимптотическом разложении должно быть малой поправкой к предыдущему.

Однако, если предположить, что в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования имеется область с промежуточной асимптотикой поля напряжений (где собственные значения отличаются от значений задачи Хатчинсона – Райса – Розенгрена и определяются значениями, приведенными в Таблицах 1 – 5), то асимптотические разложения (3.14) приводят к границам области диспергированного материала, сходящимся к предельному контуру.

Новое промежуточно – асимптотическое поведение напряжений в задаче о трещине нормального отрыва в среде с поврежденностью в связанный постановке было найдено и конфигурации областей полностью поврежденного материала представлены на рис. 19 – 26.

3.3. Амплитудный масштабный множитель \tilde{C}

После возвращения к исходным переменным (r, θ, t) поле напряжений вне области диспергированного материала определяется соотношением

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At^m)^{-1/m} \tilde{C} \left[R^{\lambda_0-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{\lambda_1-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta) + R^{\lambda_2-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}(\theta) + \dots \right], \quad (3.28)$$

где $R = r(At\tilde{C}^m)^{1/((\lambda-1)m)}$. Особенностью полученного равенства является зависимость поля напряжений только от одного амплитудного множителя \tilde{C} , который отражает влияние геометрии реального образца и системы приложенных нагрузок на поле напряжений вблизи вершины трещины. Таким образом для нахождения поля напряжений в окрестности вершины трещины достаточно определить только один масштабный множитель \tilde{C} . В традиционной механике трещин используется подход, который приводит к задаче нахождения трех или более коэффициентов асимптотических разложений поля напряжений. В последнее время в нелинейной механике разрушения, одной из задач которой является определение напряженно – деформированного состояния в непосредственной окрестности вершины трещины, большое внимание уделяется построению высших приближений в асимптотических разложениях механических величин (полей напряжений, деформаций и перемещений) вблизи кончика трещины в нелинейных материалах. Для материалов, следующих степенному закону установившейся ползучести $\dot{\varepsilon}_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2$, асимптотические разложения компонент тензора напряжений могут быть представлены в следующем виде

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 r^{s_2-1} \sigma_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 r^{s_3-1} \sigma_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots . \quad (3.29)$$

Это поле строится по аналогии с решением, полученным для пластических сред:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{J}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 r^{s_2-1} \sigma_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 r^{s_3-1} \sigma_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots . \quad (3.30)$$

Первое слагаемое в (3.30) в литературе носит название решения Хатчинсона – Райса – Розенгрена. В (3.29) фигурирует C^* – интеграл, определяемый соотно-

шением

$$C^* = \int_{\Gamma} (\dot{W} dx_2 - \sigma_{ij} n_j \dot{u}_{i,1} ds), \quad (3.31)$$

где $\dot{W} = \int_0^{\dot{\varepsilon}_{kl}} \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{n}{n+1} \sigma_e \dot{\varepsilon}_e$.

Детальный асимптотический анализ асимптотического разложения интенсивности касательных напряжений показал, что показатели степеней в (3.29) связаны между собой $s_3 - s_1 = 2(s_2 - s_1)$. Асимптотический анализ трехчленного асимптотического разложения компонент тензора напряжений (3.29) и интенсивности касательных напряжений позволяет установить, что константы A_2 и A_3 связаны равенством $A_3/A_1 = (A_2/A_1)^2$, т.е. они не являются независимыми. В литературе имеется достаточно большое число оценок инвариантного C^* – интеграла, полученных для различных образцов, которые наиболее часто используются в эксперименте [76, 78, 79, 80, 81, 125, 126]. Однако многие вопросы, связанные с определением второго коэффициента в асимптотических разложениях A_2 , на данный момент остаются открытыми. Естественно предположить, что A_2 в общем случае является функцией приложенных нагрузок, геометрических характеристик образца и показателя нелинейности материала n . Определение этого коэффициента и составляет одну из важных задач нелинейной механики разрушения, поскольку даже известные оценки, которые приведены в справочной литературе, дают существенную погрешность. Например, для образца с односторонним боковым надрезом для инвариантного C^* – интеграла имеется оценка $C^* = B\sigma_0\epsilon_0 W(1-a)ah_1(P/P_0)$, где $P_0 = 1,4555\eta W(1-a)\sigma_0$, h_1 – безразмерная функция приложенной нагрузки и геометрии образца. Оказывается, что уточненные вычисления, проведенные в последнее время, показали, что значения функции h_1 могут отличаться от приведенных в справочниках более чем на сто процентов. Следовательно, с появлением вычислительных комплексов, таких как Simulia Abaqus, предоставляется возможность получения более точных оценок для параметров механики разрушения, что и составляет одну из задач современной механики деформируемого твердого тела. Известно, что амплитудные коэффициенты, входящие в структуру полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины, являются характеристиками сопротивления материала разрушению. Эти коэффициенты могут описывать текущее состоя-

ние или принимать предельные значения в зависимости от уровня накопленных повреждений в исследуемом образце. Для нахождения оставшейся постоянной A_2 применяются различные подходы, включающие конечно – элементный анализ для образцов различной конфигурации, находящихся при действии различных нагрузок. Однако в общем случае исследование данной проблемы не является математически завершенным и требует объединения полученных разными исследователями результатов в единый справочник, подобный существующим справочникам, содержащим оценки коэффициентов интенсивности напряжений и J -интеграла [25, 26, 151]. Альтернативой описанному выше подходу является учет процессов накопления повреждений вблизи кончика трещины, что приводит к асимптотическому представлению механических полей в окрестности вершины трещины (3.28), содержащему только один амплитудный множитель, что значительно упрощает решение задачи. Один амплитудный фактор \tilde{C} может быть определен с помощью инкорпорирования скалярного параметра сплошности (поврежденности) в расчетные комплексы, осуществляющие конечно – элементный анализ, например Simulia Abaqus, Mechanical ANSYS.

3.4. Выводы по третьей главе

В третьей главе получено асимптотическое решение задачи о стационарной трещине в условиях ползучести при смешанном нагружении в полном диапазоне смешанных форм нагружения. Найдено новое асимптотическое поведение напряжений у вершины трещины в среде с поврежденностью. Новую асимптотику поля напряжений можно интерпретировать как промежуточную асимптотику поля напряжений и параметра сплошности, справедливую на расстояниях, много больших характерного линейного размера области поврежденного материала, но все еще много меньших по сравнению с длиной трещины, с характерным линейным размером тела. С использованием новой асимптотики дальнего поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения построены конфигурации областей диспергированного материала. Шестичленные асимптотические разложения параметра сплошности приводят к контурам области полностью поврежденного материала, сходящимся к некоторому предельному контуру.

4. Глава 4. Смешанное нагружение тонкой пластины с разрезом. Плоское напряженное состояние

4.1. Математическая постановка задачи и основные уравнения. Метод разложения по собственным функциям

Исследование напряженно – деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования элемента конструкции в материале со степенными определяющими уравнениями (2.1) приводит к необходимости исследования уравнений равновесия (2.2) и условия совместности деформаций (2.3).

В предложении реализации плоского напряженного состояния определяющие соотношения принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{2}B\sigma_e^{n-1}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}B\sigma_e^{n-1}(2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{3}{2}B\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta},\end{aligned}\tag{4.1}$$

где интенсивность касательных напряжений определяется формулой

$$\sigma_e^2 = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2.$$

Степенной характер определяющих уравнений задачи (4.1) позволяет обратиться к представлению функции напряжений Эри в виде разложения по собственным функциям:

$$\chi(r, \theta) = r^{\lambda+1}f(\theta).\tag{4.2}$$

Тогда компоненты тензора деформации принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}(r, \theta) &= \frac{1}{2}r^{(\lambda-1)n}f_e^{n-1}[(\lambda+1)(2-\lambda)f(\theta) + 2f''(\theta)], \\ \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{2}r^{(\lambda-1)n}f_e^{n-1}[(\lambda+1)(2\lambda-1)f(\theta) - f''(\theta)], \\ \varepsilon_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{3}{2}r^{(\lambda-1)n}f_e^{n-1}\lambda f'(\theta),\end{aligned}\tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned} f_e^2(\theta) = & [(\lambda + 1)f(\theta) + f''(\theta)]^2 + \lambda^2(\lambda + 1)^2f^2(\theta) - \\ & - [(\lambda + 1)f(\theta) + f''(\theta)]\lambda(\lambda + 1)f(\theta) + 3\lambda^2f'^2(\theta). \end{aligned}$$

Условие совместности деформаций (2.3) приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции $f(\theta)$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\theta^2} \left\{ f_e^{n-1} [(\lambda+1)(2-\lambda)f(\theta) + 2f''(\theta)] \right\} + 6[(\lambda-1)n+1] \frac{d}{d\theta} [f_e^{n-1} f'(\theta)] - \\ & - (\lambda-1)n f_e^{n-1} [(\lambda+1)(2-\lambda)f(\theta) + 2f''(\theta)] + \\ & + [(\lambda-1)n+1](\lambda-1)n f_e^{n-1} [(\lambda+1)(2\lambda-1)f(\theta) - f''(\theta)] = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Границные условия задачи традиционно есть условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (4.5)$$

Таким образом, метод разложения по собственным функциям (4.2) (метод разделения переменных) приводит к нелинейной задаче на собственные значения: необходимо найти значения λ , при которых существуют нетривиальные решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (4.4), подчиняющиеся краевым условиям (4.5). При построении решений для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига могут быть использованы условия симметрии (для трещины типа I) или антисимметрии (для трещины типа II) решения относительно луча $\theta = 0$ и решение строится лишь для одной полу平面ости, например, для верхней, когда $0 \leq \theta \leq \pi$. При анализе напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного деформирования принцип суперпозиции решений использован быть не может и необходимо искать решение задачи во всей плоскости $-\pi \leq \theta \leq \pi$ и соображения симметрии или антисимметрии использованы быть не могут. Для построения численного решения необходимо учесть значение параметра смешанности нагрузки M^p , задающего вид смешанного нагружения. С этой целью в рамках настоящего подхода предполагается построение численного решения

уравнения (4.4) на отрезке $[0, \pi]$ с краевыми условиями

$$\begin{aligned} f(\theta = 0) &= 1, & f'(\theta = 0) &= (\lambda + 1)/tg(M^p\pi/2), \\ f(\theta = \pi) &= 0, & f'(\theta = \pi) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Первое граничное условие представляет собой условие нормировки, которое можно наложить в силу однородности уравнения (4.4). На следующем этапе строится численное решение нелинейного дифференциального уравнения (4.4) на отрезке $[-\pi, 0]$ с краевыми условиями

$$\begin{aligned} f(\theta = -\pi) &= 0, & f'(\theta = -\pi) &= 0, \\ f(\theta = 0) &= 1, & f(\theta = 0) &= (\lambda + 1)/tg(M^p\pi/2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Подобный подход был реализован для определения поля напряжений в области кончика трещины в условиях смешанного нагружения при плоском деформированном состоянии. При осуществлении процедуры построения численного решения, как правило, предполагается, что собственное значение рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения равно собственному значению задачи Хатчинсона – Райса – Розенгрена $\lambda = n/(n+1)$. Однако при построении численного решения для уравнения (4.4) оказалось, что радиальное напряжение $\sigma_{rr}(r, \theta)$ при $\theta = 0$ претерпевает разрыв, тогда как для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига, т.е. для $M^p = 1$ и $M^p = 0$, поле напряжений непрерывно.

4.2. Численное решение нелинейной задачи на собственные значения. Собственные значения и собственные функции

Обычно при исследовании смешанного нагружения предполагается известным собственное значение рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения $\lambda = n/(n+1)$. Однако данное предположение приводит к разрывному полю радиального напряжения и, как показывает приближенный анализ рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения, не может быть использовано в случае плоского напряженного состояния. В силу указанных

причин определим собственное значение задачи, ведущее к непрерывному полю радиального напряжения. Аналогичный подход был применен для нахождения всего спектра собственных значений в параграфе 2.3, где было получено, что такой метод нахождения собственных значений приводит к контурам области диспергированного материала, сходящимся к некоторому предельному контуру. Процедура численного определения собственных значений основывается на следующих представлениях. В случае смешанного деформирования соображения симметрии и антисимметрии использованы быть не могут и необходимо искать решение уравнения (4.4) на отрезке $[-\pi, \pi]$. В условиях смешанного нагружения при численном решении уравнения (4.4) отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ можно разбить на два отрезка: $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$. Сначала уравнение (4.4) интегрируется на отрезке $[0, \pi]$ и краевая задача сводится к задаче Коши с начальными условиями

$$\begin{aligned} f(\theta = 0) &= 1, & f'(\theta = 0) &= (\lambda + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2), \\ f''(\theta = 0) &= A_2, & f'''(\theta = 0) &= A_3. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Значение производной первого порядка находится из условия смешанности нагружения (значение параметра смешанности нагружения (1.8), задающего вид нагружения, известно). Неизвестные постоянные A_2 и A_3 определяются таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу трещины:

$$f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0. \quad (4.9)$$

После того как подобраны постоянные A_2 и A_3 , уравнение (4.4) интегрируется на отрезке $[-\pi, 0]$. Вновь двухточечная краевая задача для уравнения (4.4) с граничными условиями (4.7) заменяется задачей Коши с начальными условиями

$$f(\theta = -\pi) = 0, \quad f'(\theta = -\pi) = 0, \quad f''(\theta = -\pi) = B_2, \quad f'''(\theta = -\pi) = B_3. \quad (4.10)$$

Неизвестные постоянные B_2 и B_3 подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия равновесия элемента, расположенного на луче $\theta = 0$. Уравнения равновесия данного элемента требуют непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ на луче $\theta = 0$, что влечет за собой непрерывность функций $f(\theta)$ и $f'(\theta)$ при $\theta = 0$ (и, следовательно, краевые условия (4.10)). Поэтому

две неизвестные постоянные B_2 и B_3 определяются таким образом, чтобы решение, разыскиваемое на отрезке $[-\pi, 0]$, удовлетворяло бы краевым условиям при $\theta = 0$.

При использовании описанного численного метода предполагается, что собственное значение известно и отвечает собственному значению решения Хатчинсона – Райса – Розенгрена $\lambda = n/(n + 1)$. Однако, при построении численного решения уравнения (4.4) оказалось, что данное предположение приводит к разрывному полю радиального напряжения σ_{rr} в случае смешанного нагружения образца с дефектом, так как для трещины нормального отрыва (трещины типа I) и поперечного сдвига (трещины типа II), т.е. для $M^p = 1$ и $M^p = 0$, радиальное поле напряжений непрерывно. Таким образом, как показывает приближенный анализ на собственные значения рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения, собственное значение отвечающее решению Хатчинсона – Райса – Розенгрена не может быть использовано в случае смешанного нагружения для плоского напряженного состояния.

С помощью приведенного в параграфе 2.3 численного метода были уточнены собственные значения, отвечающие задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена, для случая плоского напряженного состояния. Результаты вычислений приведены в таблицах 6 – 12, где собраны новые значения λ и пристрелочные значения $f''(\theta = 0)$, $f'''(\theta = 0)$, $f''(\theta = -\pi)$ и $f'''(\theta = -\pi)$ для различных значений параметра смешанности нагружения M^p и практических важных значений показателя нелинейности материала n . Угловые распределения компонент тензоров напряжений и деформаций, полученные в результате численного анализа для новых собственных значений, показаны на рис. 27 – 30. Линии равных значений интенсивности касательных напряжений в окрестности вершины трещины изображены на рис. 31 – 35.

С помощью разработанного численного метода были найдены другие собственные значения задачи, отличные от собственного значения, отвечающего задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена. Результаты вычислений приведены в таблицах 13 – 16. Построены угловые распределения компонент тензоров напряжений $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ и σ_{rr} , для новых собственных значений (рис. 36 – 41).

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.9	0.710960	-0.878015	-0.059127	-0.724120	0.428064
0.8	0.721666	-0.889149	-0.501650	-0.898579	0.348145
0.7	0.733089	-0.921053	-1.087827	-1.143866	0.311439
0.6	0.740101	-0.951096	-1.774144	-1.465507	0.290927
0.5	0.744332	-0.974435	-2.613062	-1.898950	0.276300
0.4	0.746893	-0.991172	-3.732943	-2.521575	0.262339
0.3	0.748445	-1.002588	-5.438885	-3.518917	0.244099
0.2	0.749363	-1.009899	-8.639267	-5.450935	0.210905
0.1	0.749848	-1.013963	-17.857405	-11.119908	0.112696

Таблица 6. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагрузки в условиях плоского напряженного состояния для $n = 3$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.9	0.813057	-0.918935	-0.078809	-0.934756	0.294866
0.8	0.813522	-0.910480	-0.379570	-1.085758	0.244019
0.7	0.821183	-0.942182	-0.945119	-1.353750	0.223389
0.6	0.826595	-0.980308	-1.877300	-1.720923	0.214889
0.5	0.829711	-1.010626	-2.474608	-2.217574	0.211543
0.4	0.831456	-1.031834	-3.692485	-2.931140	0.210848
0.3	0.832434	-1.045751	-5.310084	-4.075287	0.211815
0.2	0.832975	-1.054353	-8.270256	-6.295063	0.214040
0.1	0.833249	-1.059014	-17.175345	-12.817403	0.217377

Таблица 7. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагрузки в условиях плоского напряженного состояния для $n = 5$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.9	0.84177785	-0.65176078	-0.06902450	-0.70653361	0.18084768
0.8	0.84202705	-0.57395163	-0.24463436	-0.72417013	0.13443608
0.7	0.84667285	-0.50332097	-0.47689697	-0.76445660	0.10651094
0.6	0.85145875	-0.44198314	-0.71463082	-0.81738465	0.08737114
0.5	0.85418185	-0.37678736	-0.89711104	-0.86832378	0.07204136
0.4	0.85565325	-0.30541344	-1.02717175	-0.90933069	0.05807172
0.3	0.85644585	-0.23530069	-1.14009661	-0.95988212	0.04563737
0.2	0.85687015	-0.16066518	-1.22620969	-1.00338089	0.03288647
0.1	0.85707955	-0.08275264	-1.29886808	-1.04711530	0.01956806

Таблица 8. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагрузки в условиях плоского напряженного состояния для $n = 6$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.9	0.863005	-0.939455	-0.117494	-1.070440	0.230710
0.8	0.863118	-0.931654	-0.409135	-1.230020	0.194901
0.7	0.865837	-0.941813	-0.850487	-1.498387	0.181311
0.6	0.870107	-0.983152	-1.789715	-1.900363	0.178418
0.5	0.872529	-1.017364	-2.369760	-2.444916	0.180489
0.4	0.873794	-1.040530	-3.427356	-3.225923	0.186395
0.3	0.874448	-1.054980	-5.004927	-4.477821	0.197231
0.2	0.874787	-1.063523	-8.019713	-6.907737	0.218081
0.1	0.874951	-1.068014	-16.399514	-14.051259	0.275592

Таблица 9. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагрузки в условиях плоского напряженного состояния для $n = 7$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.9	0.892132	-0.951743	-0.148784	-1.166821	0.191437
0.8	0.892187	-0.945074	-0.441700	-1.335332	0.164138
0.7	0.892756	-0.938703	-0.786691	-1.605170	0.154589
0.6	0.896185	-0.979984	-1.473179	-2.032212	0.154562
0.5	0.898187	-1.017020	-2.446724	-2.613278	0.159358
0.4	0.899167	-1.041283	-3.428549	-3.445052	0.168585
0.3	0.899637	-1.055617	-4.929978	-4.777032	0.184458
0.2	0.899986	-1.063699	-7.757085	-7.364961	0.214921
0.1	0.899969	-1.067810	-15.870539	-14.973046	0.300772

Таблица 10. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагрузки в условиях плоского напряженного состояния для $n = 9$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.9	0.911123	-0.959920	-0.172574	-1.239380	0.164364
0.8	0.911145	-0.954022	-0.468121	-1.415250	0.142450
0.7	0.911361	-0.945900	-0.796175	-1.696655	0.135580
0.6	0.913531	-0.975351	-1.415360	-2.133091	0.137003
0.5	0.915260	-1.014674	-2.235656	-2.742892	0.143208
0.4	0.916060	-1.039712	-3.250966	-3.614202	0.154108
0.3	0.916414	-1.053681	-4.740118	-5.009507	0.172524
0.2	0.916575	-1.061186	-7.505140	-7.718823	0.207926
0.1	0.916646	-1.064886	-15.509504	-15.687120	0.308561

Таблица 11. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагрузки в условиях плоского напряженного состояния для $n = 11$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.95	0.924459	-0.967010	-0.044076	-1.245296	0.162210
0.9	0.924460	-0.965742	-0.190855	-1.295977	0.144355
0.8	0.924467	-0.960475	-0.489375	-1.478170	0.126133
0.7	0.924700	-0.958252	-0.828902	-1.777736	0.121104
0.6	0.925895	-0.970589	-1.366626	-2.212890	0.123306
0.5	0.927433	-1.011819	-2.331595	-2.845877	0.130222
0.4	0.928110	-1.037485	-3.273920	-3.748906	0.141919
0.3	0.928389	-1.051006	-4.705468	-5.194292	0.161542
0.2	0.928507	-1.057923	-7.398140	-8.001191	0.199333
0.1	0.928557	-1.061240	-15.147594	-16.257399	0.307317

Таблица 12. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагрузления в условиях плоского напряженного состояния для $n = 13$

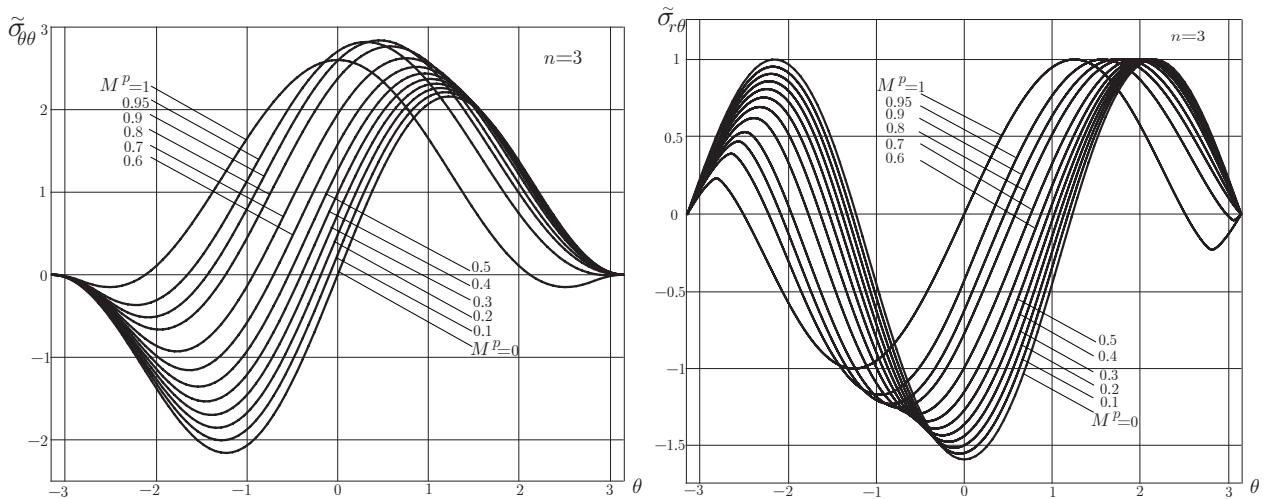


Рис. 27. Угловые распределения компонент тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ для различных значений параметра смешанности нагрузления для $n = 3$

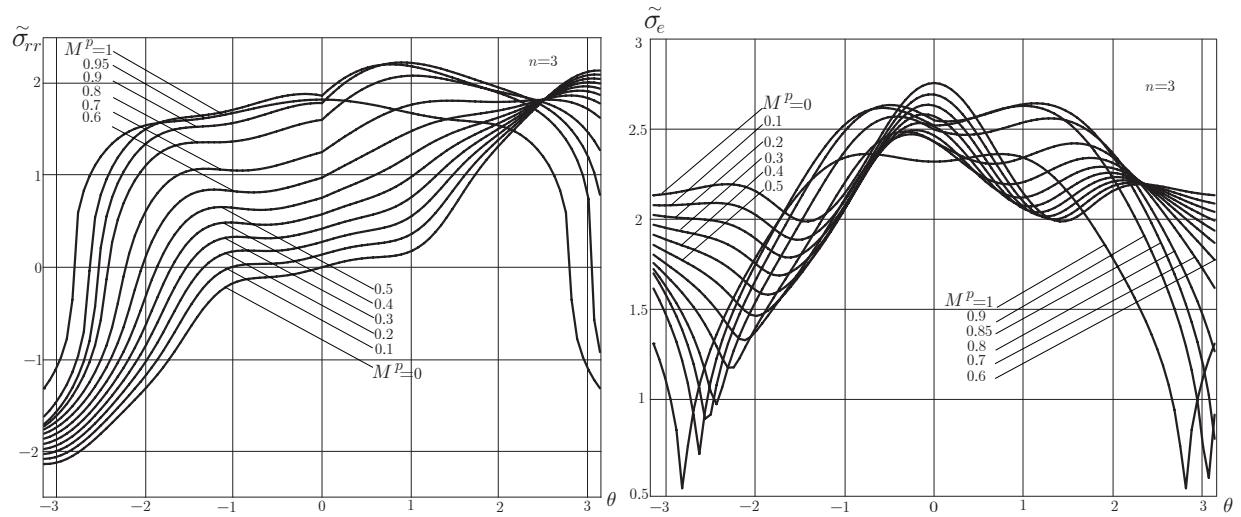


Рис. 28. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{rr} и интенсивности напряжений σ_e для различных значений параметра смешанности нагружения для $n = 3$

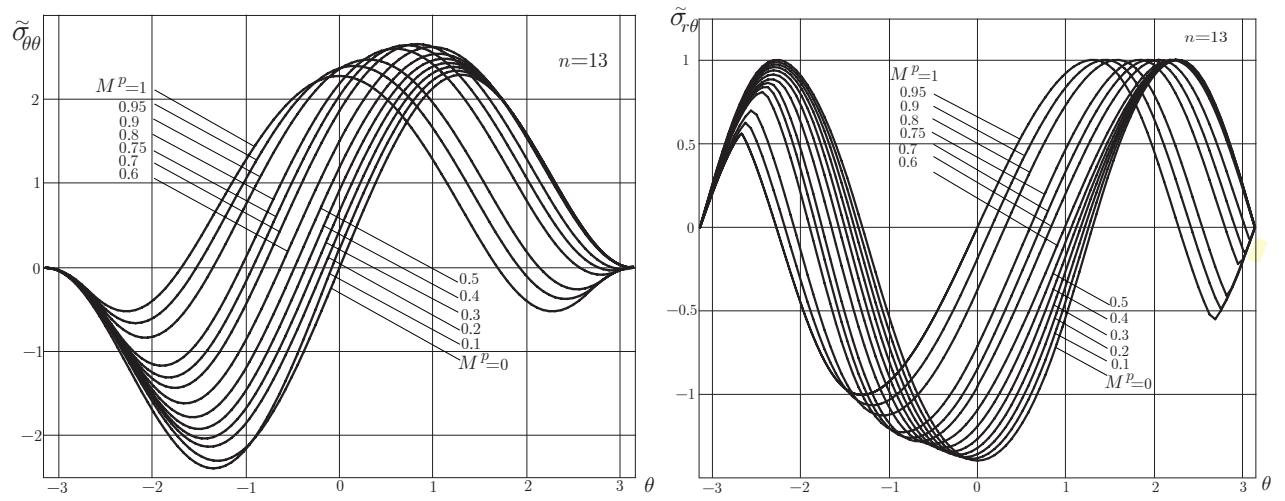


Рис. 29. Угловые распределения компонент тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ для различных значений параметра смешанности нагружения для $n = 13$

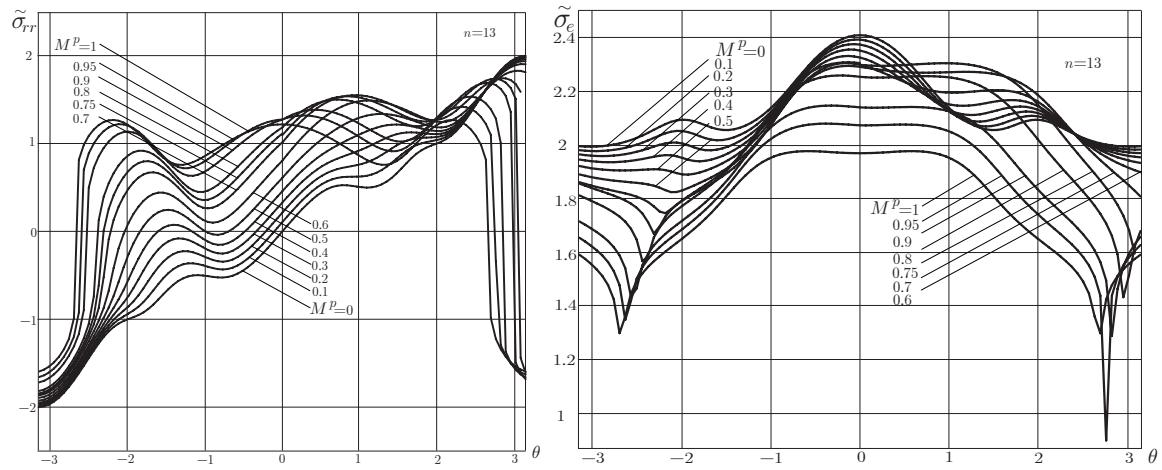


Рис. 30. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{rr} и интенсивности напряжений σ_e для различных значений параметра смешанности нагрузки для $n = 13$

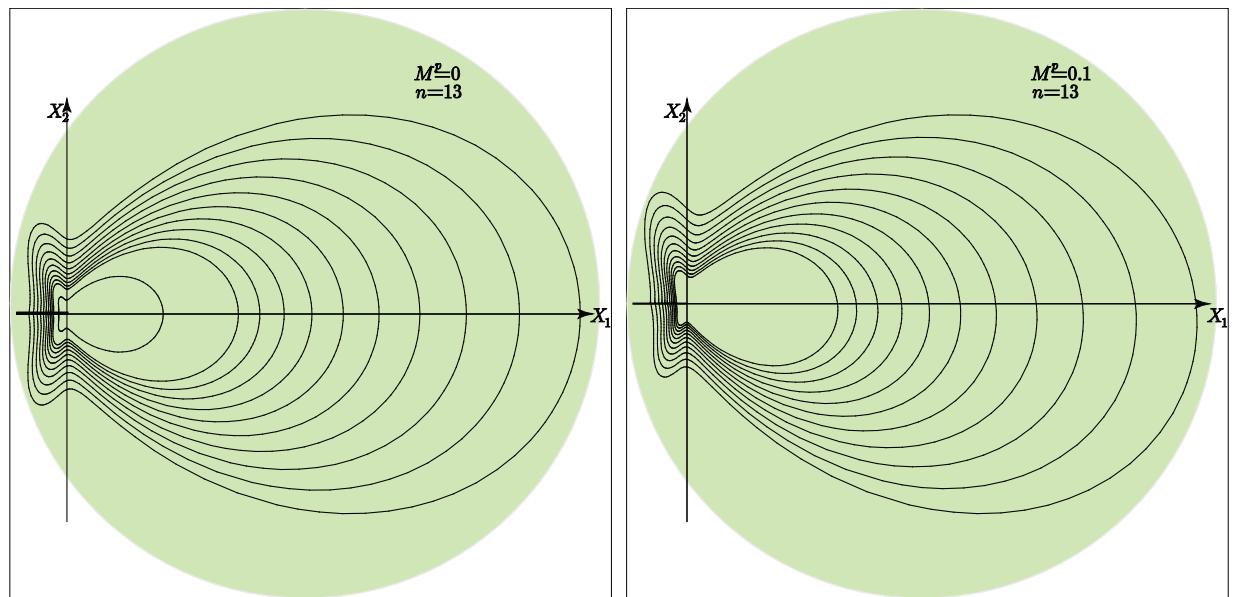


Рис. 31. Линии равных значений интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$

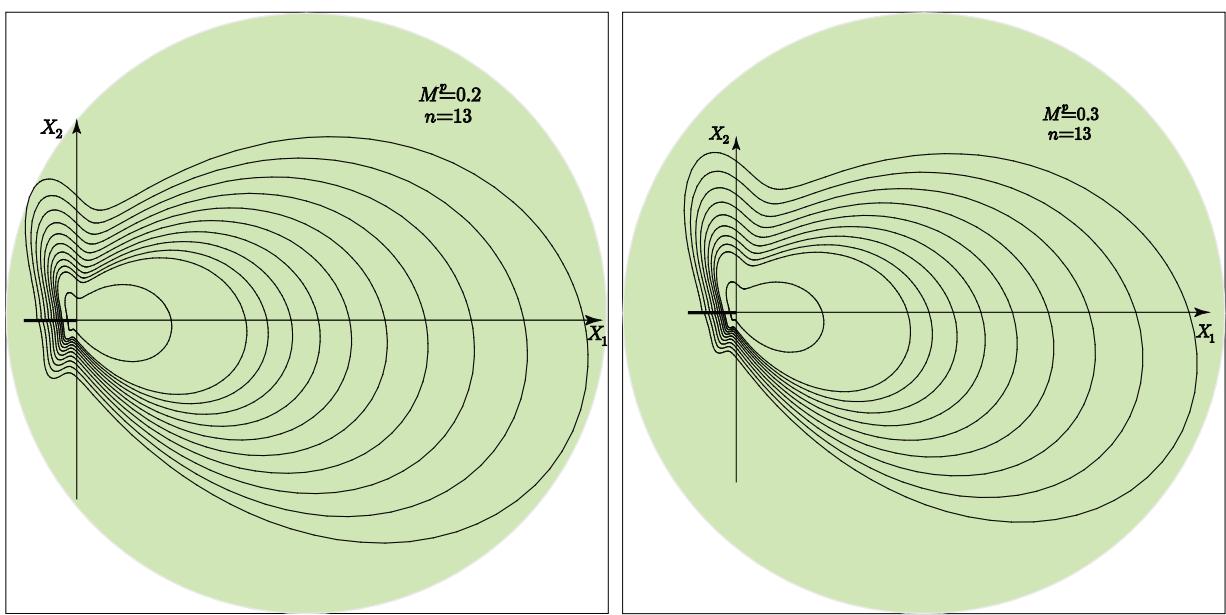


Рис. 32. Линии равных значений интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$

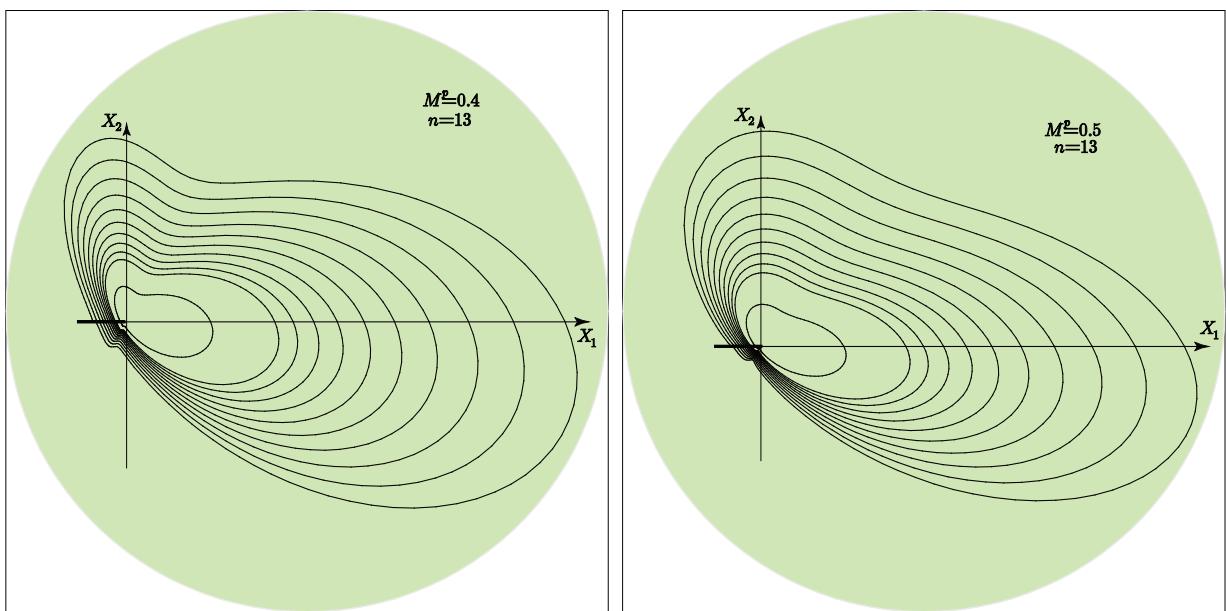


Рис. 33. Линии равных значений интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$

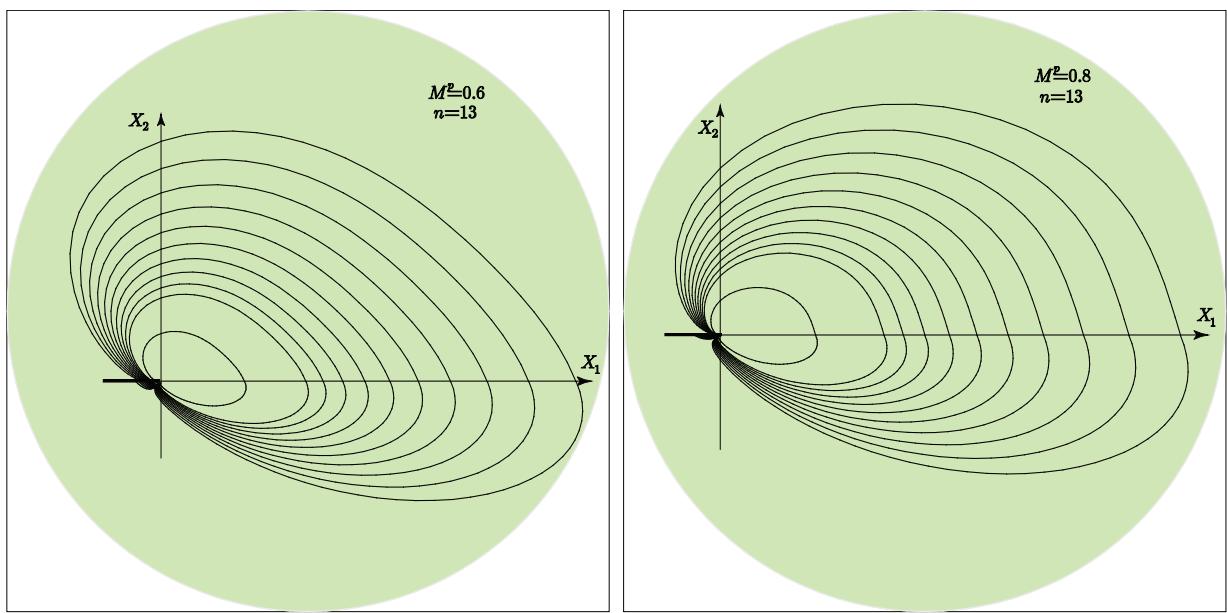


Рис. 34. Линии равных значений интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$

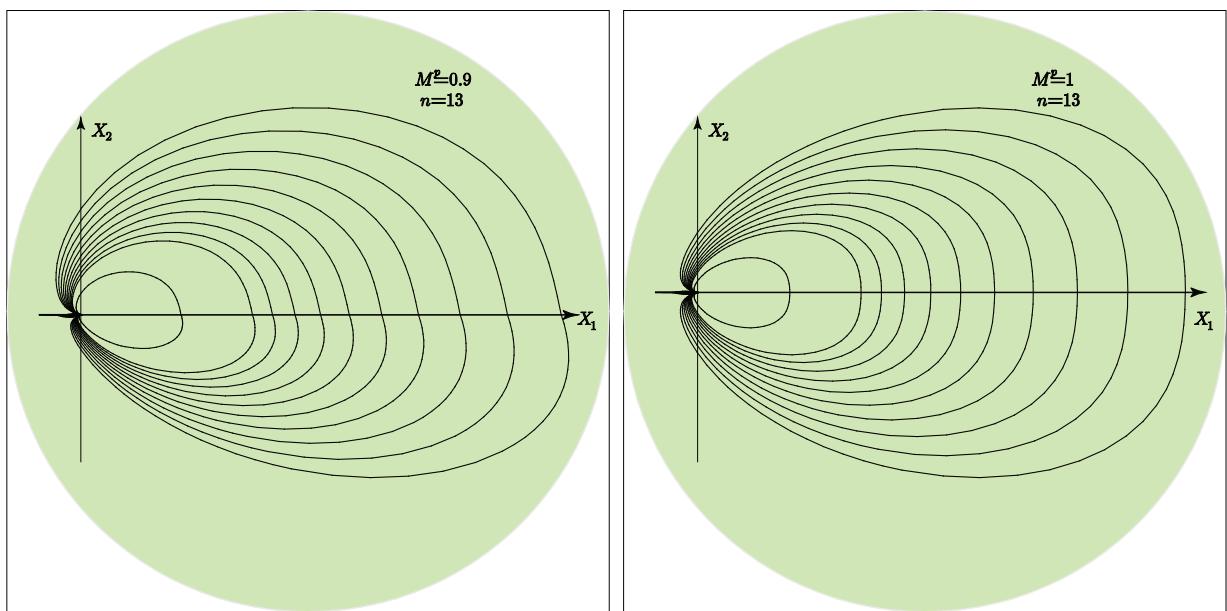


Рис. 35. Линии равных значений интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.95	-0.30224000	-0.17838613	-0.32726986	0.33594102	0.22794107
0.9	-0.30032000	-0.17807072	-0.36638151	0.25757002	0.29266806
0.8	-0.28609000	-0.19277155	-0.40773063	-0.08847114	0.76923928
0.7	-0.26789000	-0.21510771	-0.42940752	-0.20241990	0.29326170
0.6	-0.26093000	-0.20903335	-0.46689645	-0.24431256	0.20723945
0.5	-0.25233200	-0.19374162	-0.51971346	-0.27003206	0.15753439
0.4	-0.24369800	-0.16813339	-0.58474357	-0.28589563	0.12061844
0.3	-0.23701900	-0.13661385	-0.66110710	-0.30216004	0.09234782
0.2	-0.23247900	-0.09692922	-0.72180731	-0.31593958	0.06727842
0.1	-0.22987230	-0.05108541	-0.76311846	-0.33109678	0.04441395
0.05	-0.22923480	-0.02605873	-0.77363995	-0.33866456	0.03329830

Таблица 13. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского напряженного состояния $n = 2$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.95	-0.25900000	0.04629790	-0.55419298	0.72846823	-0.35679279
0.9	-0.25560000	0.04406862	-0.58851966	0.64305199	-0.31327725
0.8	-0.24450000	0.03844407	-0.62048181	0.44863117	-0.21332594
0.7	-0.23350000	0.03360764	-0.63046050	0.25111280	-0.10350409
0.6	-0.22020000	0.01214818	-0.62343451	-0.12080748	0.15205916
0.5	-0.21079000	0.00930530	-0.62654773	-0.17000369	0.10345478
0.4	-0.20527000	0.02336484	-0.63658775	-0.20717906	0.10637036
0.3	-0.20303000	0.04389149	-0.66358299	-0.24807286	0.11989478
0.2	-0.20573000	0.06316817	-0.69754463	-0.29279477	0.13853316
0.1	-0.21570000	0.06967787	-0.75066197	-0.34994818	0.16554296
0.05	-0.22414000	0.05626185	-0.77745018	-0.38772810	0.18452266

Таблица 14. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского напряженного состояния $n = 4$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.95	-0.23620000	0.09228488	-0.64055702	0.80223219	-0.50450593
0.9	-0.23000000	0.08844537	-0.67205912	0.70701434	-0.44223887
0.8	-0.21800000	0.08483824	-0.70096443	0.50555768	-0.31288401
0.7	-0.20880000	0.08294619	-0.70775884	0.31432641	-0.19258038
0.6	-0.19930000	0.06961604	-0.69835863	-0.07508317	0.31168510
0.5	-0.19078000	0.05906719	-0.68862491	-0.13772451	0.08886904
0.4	-0.18870000	0.07168357	-0.69112246	-0.17995932	0.10943686
0.3	-0.19332000	0.09102863	-0.71349880	-0.22787683	0.13820627
0.2	-0.20619500	0.10616627	-0.74878502	-0.28289753	0.17335141
0.1	-0.23041870	0.10484263	-0.83311265	-0.35687923	0.22332722
0.05	-0.24985460	0.08478226	-0.91296933	-0.41029679	0.26107325

Таблица 15. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского напряженного состояния $n = 6$

M^p	λ	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0.95	-0.22400000	0.11333333	-0.68462687	0.83130874	-0.57265834
0.9	-0.21670000	0.10959383	-0.71535351	0.73222044	-0.50130470
0.8	-0.20540000	0.10745680	-0.74380118	0.52878999	-0.35856813
0.7	-0.19740000	0.10717509	-0.74958474	0.33783813	-0.22750817
0.6	-0.18981000	0.09845337	-0.74042327	0.12604887	-0.07917506
0.5	-0.18176000	0.08236757	-0.72319570	-0.12302450	0.08335711
0.4	-0.18230000	0.09315039	-0.72322888	-0.16798263	0.11174738
0.3	-0.19170000	0.11057837	-0.74628248	-0.21915749	0.14687900
0.2	-0.20987000	0.12286058	-0.78579354	-0.27881899	0.18978795
0.1	-0.23832000	0.11877385	-0.89259541	-0.35953080	0.25064804
0.05	-0.26170350	0.09706907	-1.03515266	-0.41910254	0.29785114

Таблица 16. Собственные значения для различных значений параметра смешанности нагружения в условиях плоского напряженного состояния $n = 8$

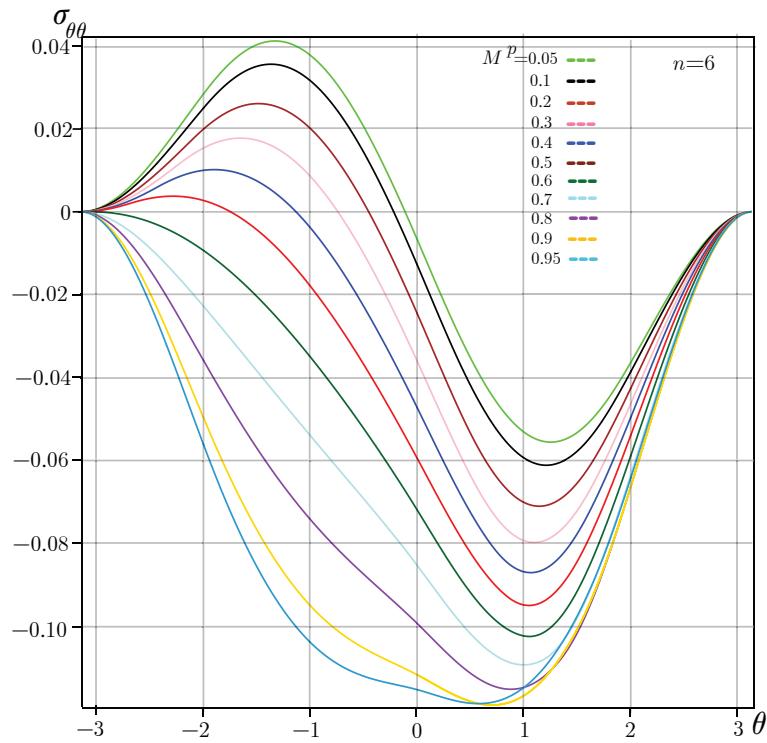


Рис. 36. Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ для $n = 6$

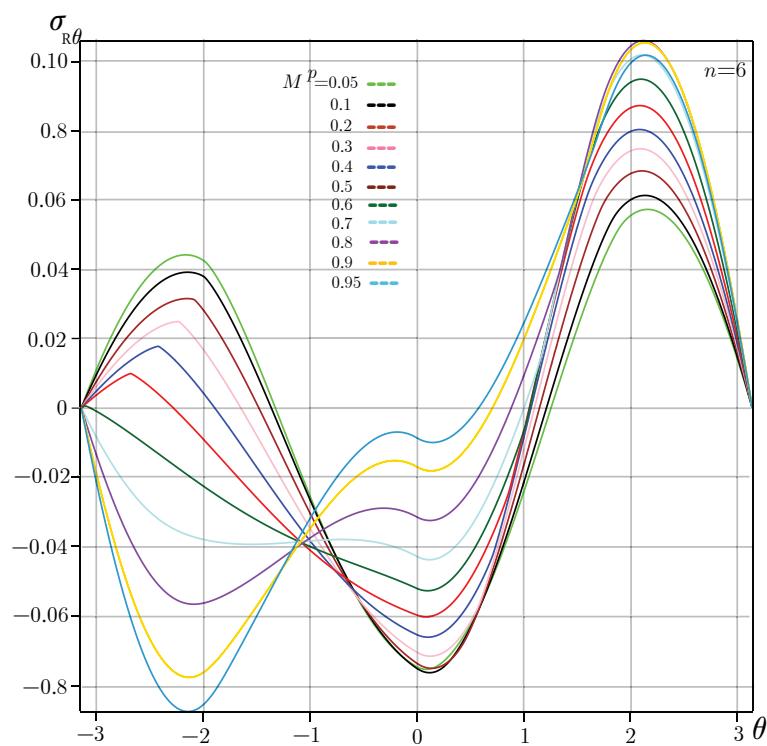


Рис. 37. Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{R\theta}$ для $n = 6$

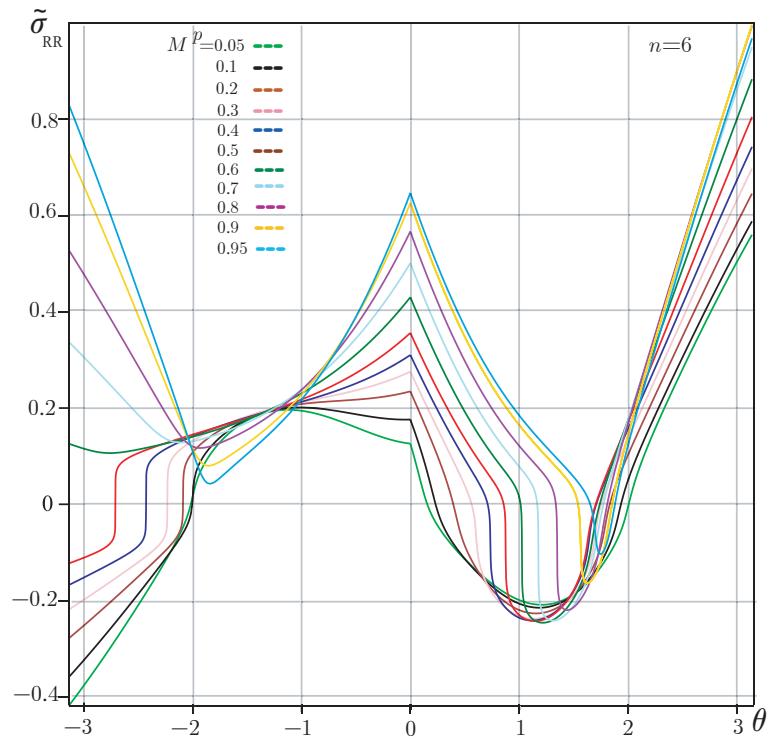


Рис. 38. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{RR} для $n = 6$

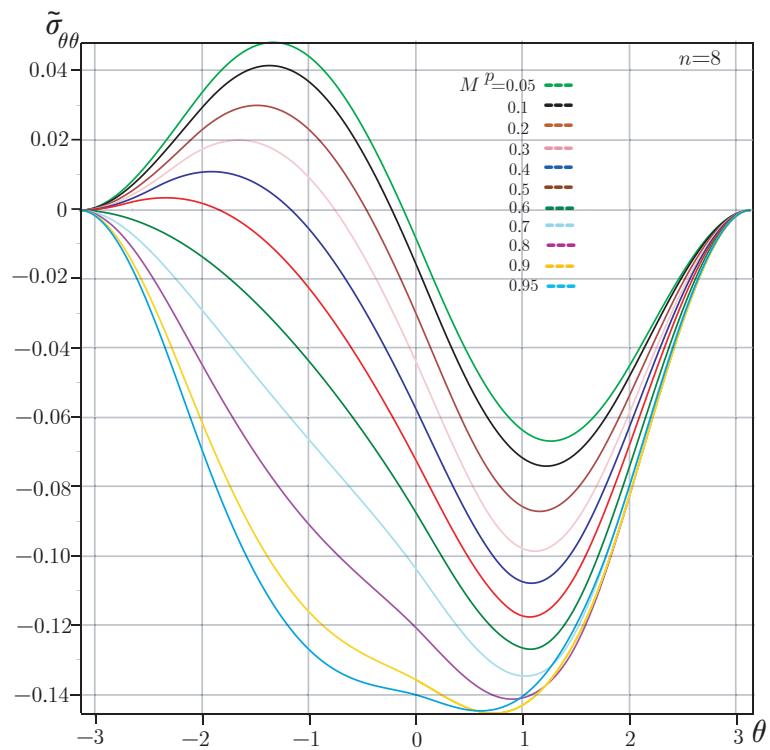


Рис. 39. Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{θθ}$ для $n = 8$

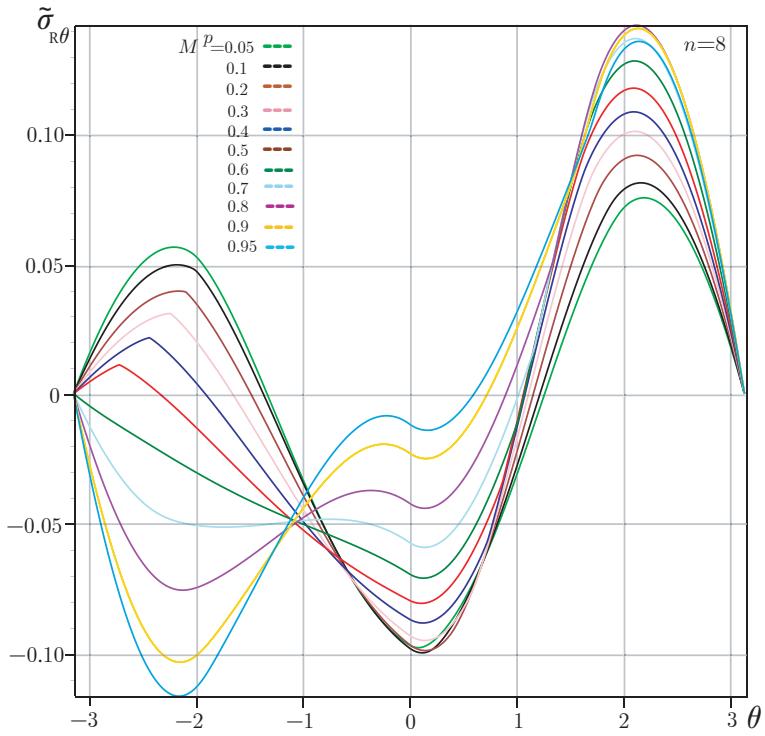


Рис. 40. Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{R\theta}$ для $n = 8$

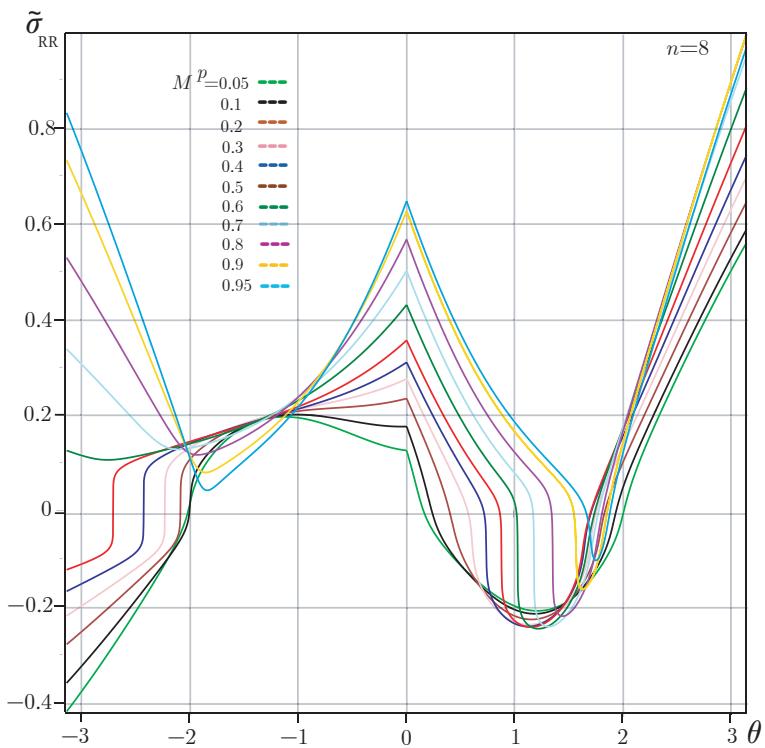


Рис. 41. Угловые распределения компонент тензора напряжений σ_{RR} для $n = 8$

4.3. Автомодельное решение задачи о трещине в среде с поврежденностью в условиях смешанного деформирования (плоское напряженное состояние). Промежуточная автомодельная асимптотика. Основные уравнения

Определяющие уравнения материала строятся на основе степенного закона Бейли – Нортона теории установившейся ползучести с применением концепции эффективного напряжения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (4.11)$$

где ψ – параметр сплошности, эволюционирующий в соответствии со степенным законом накопления повреждений

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m. \quad (4.12)$$

В силу (4.11) соотношения для компонент тензора скоростей деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}_{ij}$ для плоского напряженного состояния принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= \frac{3}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\theta}}{\psi}, & \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{1}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\psi}, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{\psi}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где интенсивность касательных напряжений определяется выражением

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2}.$$

Асимптотическое решение задачи разыскивается в форме (3.14) – (3.17), где

$$\begin{aligned} \sigma_e^{(0)} &= [(\lambda_0 + 1)f_0 + f_0'']^2 + \lambda_0^2(\lambda_0 + 1)^2 f_0^2 - \\ &- [(\lambda_0 + 1)f_0 + f_0'']\lambda_0(\lambda_0 + 1)f_0 + 3\lambda_0^2 f_0'^2, \\ \sigma_e^{(1)} &= f_e^{(1)} / (\sigma_e^{(0)})^2, \\ f_e^{(1)} &= [(\lambda_0 + 1)f_0 + f_0''][(\lambda_1 + 1)f_1 + f_1''] + \lambda_0(\lambda_0 + 1)\lambda_1(\lambda_1 + 1)f_0f_1 - \\ &- ((\lambda_0 + 1)f_0 + f_0'')\lambda_1(\lambda_1 + 1)f_1 + (\lambda_1 + 1)f_1 + f_1'')\lambda_0(\lambda_0 + 1)f_0 + \\ &+ 3\lambda_0\lambda_1 f_0' f_1'. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Кинетическое уравнение накопления повреждений и гипотеза о том, что порядки малости слагаемых, последовательно появляющихся в этом уравнении в правой части одинаковы, позволяют связать показатели степеней в асимптотических разложениях функции напряжения Эри и параметра сплошности (3.14): $\gamma = (\lambda_0 - 1)m$, $\gamma_k = (\lambda_0 - 1)m + k(\lambda_1 - 1)$. Анализ асимптотических разложений компонент тензора скоростей деформаций ползучести дает возможность установить, что $\lambda_1 - \lambda_0 = \gamma = (\lambda_0 - 1)m$. Откуда легко найти, что $\gamma_k = k(\lambda_0 - 1)m$ и получить следующие асимптотические представления компонент тензора скоростей деформаций ползучести вне области полностью поврежденного (диспергированного) материала:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{RR}(R, \theta) &= R^{(\lambda_0-1)n} \varepsilon_{RR}^{(0)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+m)} \varepsilon_{RR}^{(1)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+2m)} \varepsilon_{RR}^{(2)}(\theta) + \dots, \\ \dot{\varepsilon}_{R\theta}(R, \theta) &= R^{(\lambda_0-1)n} \varepsilon_{R\theta}^{(0)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+m)} \varepsilon_{R\theta}^{(1)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+2m)} \varepsilon_{R\theta}^{(2)}(\theta) + \dots, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(R, \theta) &= R^{(\lambda_0-1)n} \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+m)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) + R^{(\lambda_0-1)(n+2m)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)}(\theta) + \dots,\end{aligned}\quad (4.15)$$

где угловые распределения главного члена асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций определяются формулами:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RR}^{(0)}(\theta) &= \frac{1}{2}(\sigma_e^{(0)})^{n-1}[(1 + \lambda_0)(2 - \lambda_0)f_0 + 2f_0''], \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) &= \frac{1}{2}(\sigma_e^{(0)})^{n-1}[(1 + \lambda_0)(2\lambda_0 - 1)f_0 - (f_0)''], \\ \varepsilon_{R\theta}^{(0)}(\theta) &= -\frac{3}{2}(\sigma_e^{(0)})^{n-1}\lambda_0 f_0',\end{aligned}\quad (4.16)$$

коэффициенты первого слагаемого в асимптотическом разложении компонент тензора скоростей деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RR}^{(1)}(\theta) &= (\sigma_e^{(0)})^{n-1}[2[(1 + \lambda_1)f_1 + f_1''] - \lambda_1(1 + \lambda_1)f_1 + \\ &\quad + [(1 + \lambda_0)(2 - \lambda_0)f_0 + f_0'']f_0][(n + 1)\sigma_e^{(1)} + ng_0]\sigma_e^{(0)}], \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) &= (\sigma_e^{(0)})^{n-1}\left\{2\lambda_1(1 + \lambda_1)f_1 - f_1'' - (1 + \lambda_1)f_1 +\right. \\ &\quad \left.+ [(2\lambda - 1)(1 + \lambda_0)f_0 - f_0''][(n + 1)\sigma_e^{(1)} + ng_0]\sigma_e^{(0)}\right\}, \\ \varepsilon_{R\theta}^{(1)}(\theta) &= -3(\sigma_e^{(0)})^{n-1}\left\{-\lambda_1 f_1' - \lambda_0 f_0'[(n + 1)\sigma_e^{(1)} + ng_0]\sigma_e^{(0)}\right\}.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Из условия совместности деформаций (2.3) можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения угловых распределений компонент тензора напряжений, решение системы уравнений которой

должно удовлетворять граничным условиям $f_k(\theta = \pm\pi) = 0$ и $f'_k(\theta = \pm\pi) = 0$. Численное решение системы уравнений на отрезке $[-\pi, \pi]$ разыскивалось с помощью описанного выше алгоритма в пакете Mathematica V. 5.1.

Новое промежуточно – асимптотическое поведение напряжений в задаче о трещине в среде с поврежденностью в связанной постановке было найдено и конфигурации областей полностью поврежденного материала представлены на рис. 42 – 45, где кривая 1 – контур области полностью поврежденного материала, полученный с помощью двучленного асимптотического разложения параметра сплошности $\psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g^{(0)}(\theta)$, кривая 2 – контур области полностью поврежденного материала, полученный с помощью трехчленного асимптотического разложения параметра сплошности $\psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g^{(0)}(\theta) - R^{\gamma_1} g^{(1)}(\theta)$.

Так же была построена геометрия области полностью поврежденного материала для уточненного решения задачи Хатчинсона – Райса – Розенгрена, приведенного в работе [57] (рис. 46). Из рисунка видно, что конфигурации области полностью поврежденного материала, полученные с помощью двучленного и трехчленного асимптотического разложения, сильно отличаются друг от друга, что противоречит предположению, что каждое следующее слагаемое асимптотического разложения параметра сплошности должно быть лишь малым дополнением к предыдущему. Таким образом, в данной работе показано, что новая промежуточная асимптотика позволяет построить конфигурации областей диспергированного материала, поскольку построенные разложения имеют асимптотическую природу.

4.4. Выводы по четвертой главе

Построены угловые распределения компонент тензора напряжений и деформаций вблизи кончика трещины для новой найденной асимптотики в условиях плоского деформированного состояния. Показано, что эти собственные значения определяют асимптотику дальнего поля напряжений в связанной задаче о трещине в среде с поврежденностью. С использованием новой асимптотики дальнего поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения построены конфигурации областей диспергированного материала. Показано, что новая промежуточная асимптотика позволяет построить конфигурации

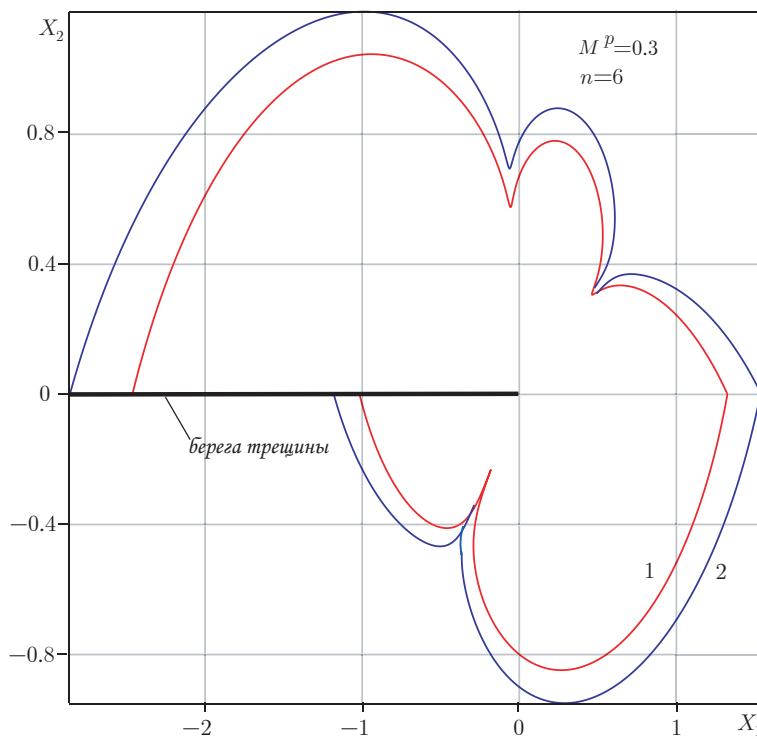


Рис. 42. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.3, n = 6$

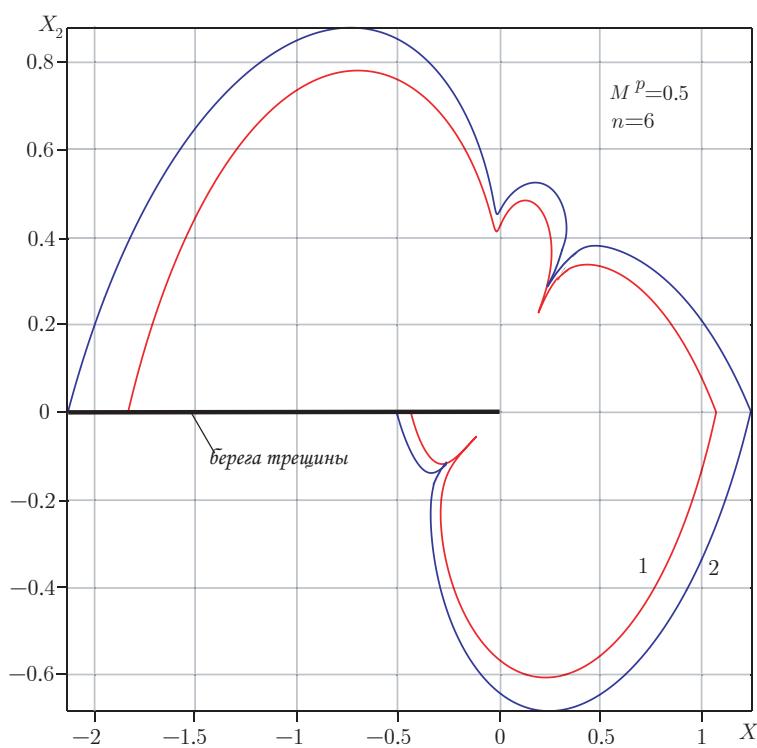


Рис. 43. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.5, n = 6$

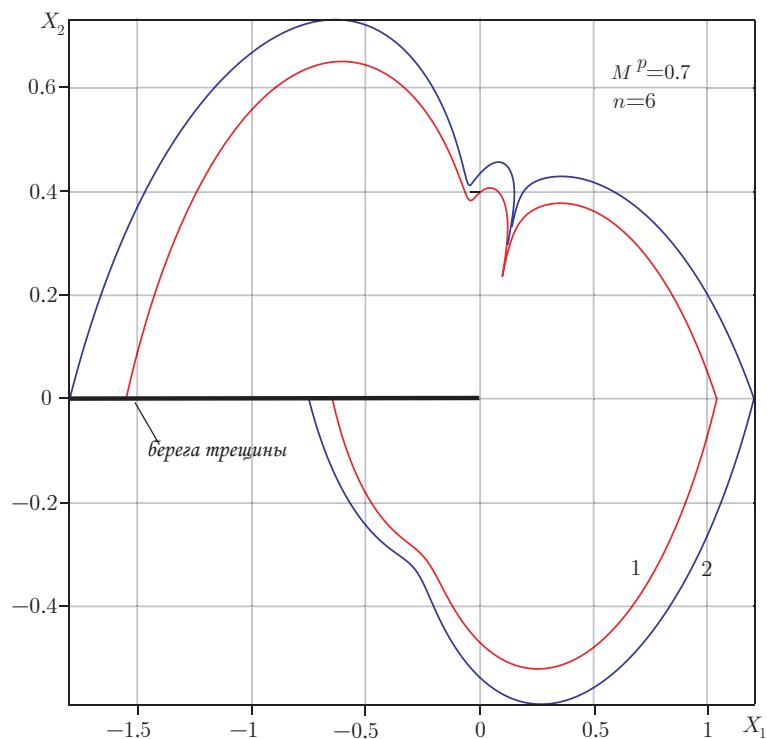


Рис. 44. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.7, n = 6$

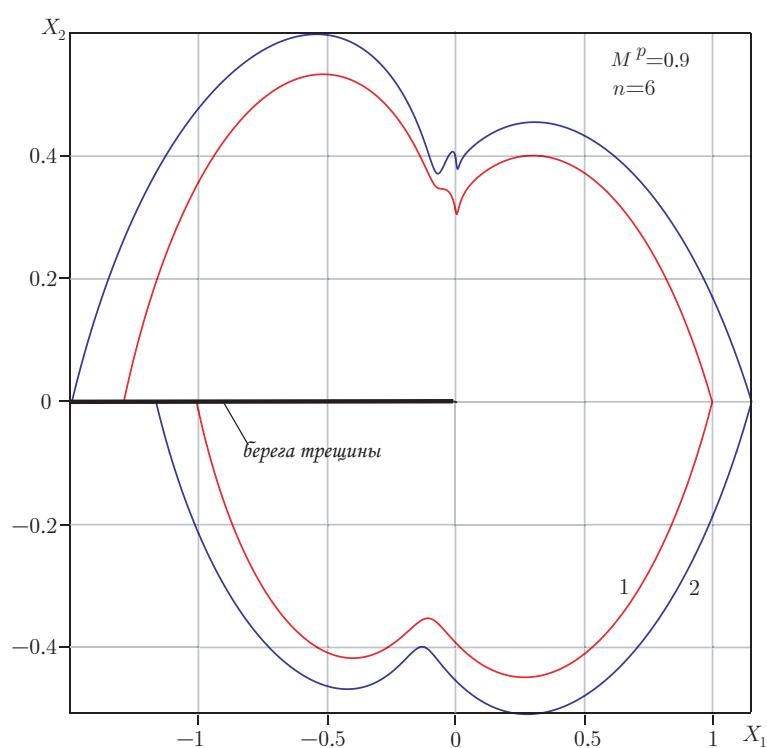


Рис. 45. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.9, n = 6$

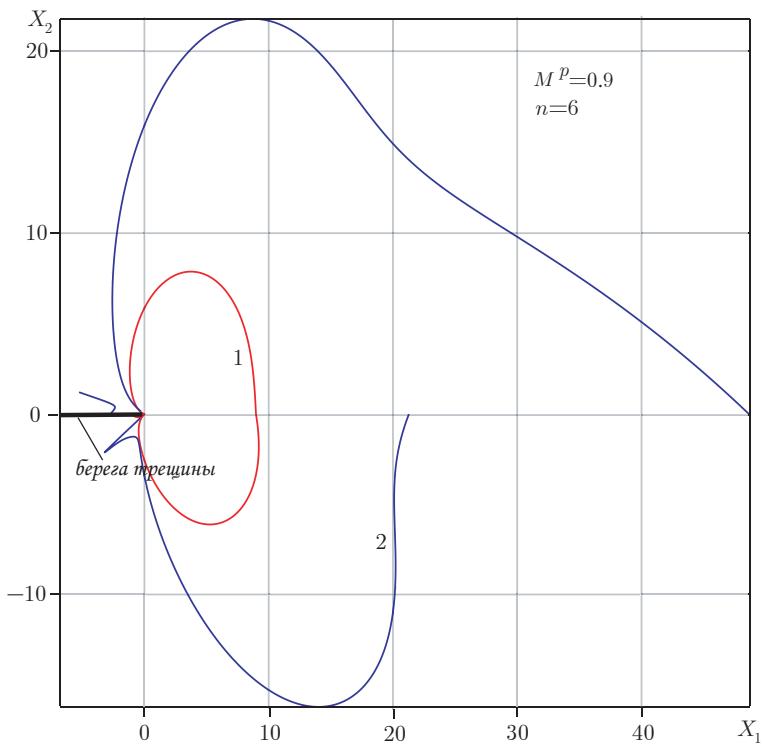


Рис. 46. Геометрия области полностью поврежденного материала для $M^p = 0.9, n = 6$ для асимптотики Хатчinsonа - Райса - Розенгрена

областей диспергированного материала с помощью двучленного и трехчленного асимптотических разложений параметра сплошности: данные области близки по своей форме и размерам.

5. Глава 5. Метод возмущений (метод искусственного малого параметра)

5.1. Решение нелинейной задачи на собственные значения с помощью метода возмущений (метода малого параметра) в случае плоского деформированного состояния

Одним из эффективных методов решения нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения, является метод возмущений [1, 91, 129, 150]. По всей видимости, впервые данный подход в механике разрушения для получения аналитической зависимости собственного значения нелинейной задачи от собственного значения, соответствующего линейной невозмущенной задаче, и от показателя нелинейности материала, был применен М. Анхеузером и Д. Гроссом [93] для задачи антиплюского сдвига плоскости с разрезом. Впоследствии данный подход был развит для решения нелинейной задачи на собственные значения, следующей из задачи определения напряженно – деформированного состояния у вершины усталостной трещины в среде с поврежденностью [3, 51]. В [93] показано, что метод возмущений позволяет получить аналитическое решение задачи в замкнутой форме. Позднее этот метод был применен и для приближенной оценки собственных значений в нелинейных задачах на собственные значения возникающих в нелинейной механике разрушения. Поэтому данный метод используется далее. В целом, можно отметить возрастающий интерес математического сообщества к аналитическим решениям нелинейных задач математической физики [14, 32, 42, 43, 150].

Аналитическое выражение для собственного значения λ как функции от показателя нелинейности материала n и от λ_0 – собственного числа, отвечающего линейной задаче ($n = 1$), может быть найдено с помощью методов асимптотической теории (метода возмущений). Суть этого подхода заключается в следующем представлении:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \quad (5.1)$$

где λ_0 соответствует "невозмущенной" линейной задаче, ε – отклонение собственного числа λ от собственного числа λ_0 при изменении n : $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$.

Вместе с (5.1), показатель нелинейности материала n и функция, описывающая угловые распределения функции напряжений Эри (и, следовательно, угловые распределения компонент тензора напряжений) $f(\theta)$, представляются в следующем виде:

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l n_l, \quad (5.2)$$

$$f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l f_l(\theta), \quad (5.3)$$

где $f_0(\theta)$ – решение линейной "невозмущенной" задачи ($n = 1$).

Подставляя асимптотические разложения (5.1)–(5.3) в уравнение (2.12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем систему неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для функции $f_0(\theta)$ легко получить однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_0^{IV} + 2(\lambda_0^2 - 1)f_0'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_0 = 0, \quad (5.4)$$

решение которого, подчиняющееся граничным условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f_0(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_0'(\theta = \pm\pi) = 0, \quad (5.5)$$

в линейной механике разрушения обычно связывают с именем М. Уильямса [156, 157].

Решение уравнения (5.4) находится аналитически и имеет вид:

$$\begin{aligned} f_0(\theta) = & B_1 \cos[(\lambda_0 - 1)\theta] + B_2 \sin[(\lambda_0 - 1)\theta] + \\ & + B_3 \cos[(\lambda_0 + 1)\theta] + B_4 \sin[(\lambda_0 + 1)\theta]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Характеристическое уравнение относительно собственного значения λ_0 следует из граничных условий на берегах трещины (2.7)

$$\sin 2\pi\lambda_0 = 0, \quad (5.7)$$

$\lambda_0 = m/2$, где m – целое число. Используя найденное выражение для собственного значения, можно отыскать соотношения между постоянными интегрирования B_j

$$\begin{aligned} B_{3m} &= -\frac{m-2}{m+2}B_{1m}, & B_{4m} &= -B_{2m} \quad m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \\ B_{3m} &= -B_{1m}, & B_{4m} &= -\frac{m-2}{m+2} \quad m = 0, 2, \pm 4, \pm 6 \dots. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Для случая нечетных m решение дифференциального уравнения относительно функции $f_0(\theta)$ имеет вид (с точностью до неопределенного множителя)

$$f_0(\theta) = B_1\{\cos[(\lambda_0 - 1)\theta] - \cos[(\lambda_0 + 1)\theta]\} + B_2\{\sin[(\lambda_0 - 1)\theta] - \sin[(\lambda_0 + 1)\theta]\}. \quad (5.9)$$

Собирая коэффициенты при первой степени малого параметра ε^1 , получаем неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $f_1(\theta)$:

$$\begin{aligned} f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2f_1 &= -n_1 \frac{x_0(f_0^{IV}x_0 + \omega_0)}{g_0} + \\ &+ 2\lambda_0f_0'' - C_1^1f_0'' + C_2^1x_0 + 2\lambda_0a_0f_0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где для краткости приняты обозначения

$$a_0 = 1 - \lambda_0^2, \quad x_0 = a_0f_0 + f_0'', \quad g_0 = x_0^2 + 4\lambda_0^2(f_0')^2, \quad C_1^1 = 4\lambda_0[2 + n_1(\lambda_0 - 1)],$$

$$\omega_0 = (x_0')^2 + a_0x_0f_0'' + 4\lambda_0^2(f_0'')^2 + 4\lambda_0^2f_0'f_0''', \quad C_2^1 = 2\lambda_0[1 + n_1(\lambda_0 - 1)].$$

Границные условия для функции $f_1(\theta)$ формулируются как

$$f_1(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_1'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (5.11)$$

Таким образом, для определения функции $f_1(\theta)$ получена краевая задача для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (5.10), (5.11). Решение данной краевой задачи будет существовать, если выполнено некоторое условие разрешимости, для формулировки которого обычно обращаются к сопряженной краевой задаче [5], [39].

Можно показать, что условие разрешимости краевой задачи относительно функции $f_k(\theta)$ принимает вид [59, 63, 150]

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta)g_k(\theta)d\theta = 0, \quad (5.12)$$

где

$$u(\theta) = f_0(\theta) = B_1 \{ \cos[(\lambda_0 - 1)\theta] - \cos[(\lambda_0 + 1)\theta] \} + \\ + B_2 \{ \sin[(\lambda_0 - 1)\theta] - \sin[(\lambda_0 + 1)\theta] \},$$

$g_k(\theta)$ – правая часть уравнения для функции $f_k(\theta)$. Формулируя условие разрешимости для краевой задачи относительно функции $f_1(\theta)$, можно найти коэффициент n_1 асимптотического разложения показателя нелинейности материала.

Для того, чтобы при решении данной краевой задачи воспользоваться численными методами, необходимо перейти к задаче Коши для уравнения (5.10). Сначала решение задачи разыскивается на отрезке $[0, \pi]$. Начальные условия для функции $f_0(\theta)$ будут иметь вид:

$$f_0(\theta = 0) = 1, \quad f'_0(\theta = 0) = (\lambda_0 + 1)/(tg(\pi M^p/2)), \\ f''_0(\theta = 0) = A_1, \quad f'''_0(\theta = 0) = A_2. \quad (5.13)$$

Для функции $f_1(\theta)$ задача Коши формулируется со следующими условиями:

$$f_1(\theta = 0) = 0, \quad f'_1(\theta = 0) = 1/(tg(\pi M^p/2)), \\ f''_1(\theta = 0) = A_1^*, \quad f'''_1(\theta = 0) = A_2^*, \quad (5.14)$$

где параметр смешанности нагружения M^p определяется в соответствии с (1.8)

$$M^p = (2/\pi) arctg((\lambda_0 + 1)B_1/B_2).$$

Неизвестные константы A_1, A_2, A_1^*, A_2^* определяются из условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины (5.5).

На отрезке $[-\pi, 0]$ формулируется начальная задача для уравнения (5.10) с начальными условиями для функций $f_0(\theta)$ и $f_1(\theta)$

$$f_0(\theta = -\pi) = 0, \quad f'_0(\theta = -\pi) = 0, \\ f''_0(\theta = -\pi) = A_3, \quad f'''_0(\theta = -\pi) = A_4, \quad (5.15)$$

$$f_1(\theta = -\pi) = 0, \quad f'_1(\theta = -\pi) = 0, \\ f''_1(\theta = -\pi) = A_3^*, \quad f'''_1(\theta = -\pi) = A_4^*. \quad (5.16)$$

Неизвестные константы A_3, A_4, A_3^*, A_4^* определяются из условий непрерывности решения $f_0(\theta)$ при $\theta = 0$:

$$f_0(\theta = 0) = 1, \quad f_1(\theta = 0) = 0,$$

$$f'_0(\theta = 0) = (\lambda_0 + 1)/(tg(\pi M^p/2)), \quad f'_1(\theta = 0) = 1/(tg(\pi M^p/2)).$$

Собирая коэффициенты при ε^2 в уравнении (2.12), можно получить неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое является еще более сложным по сравнению с уравнением (5.10) и имеет вид:

$$\begin{aligned} & g_0^2 [f_2^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_2'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_2] + g_0^2 (-x_0 + C_1^2 f_0'' - C_2^2 x_0 + 2\lambda_0 C_2^1 f_0) + \\ & + n_1 \left\{ -x_0(f_0^{IV}x_0 + \omega_0)[-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0(f_0')^2] + \right. \\ & + g_0 x_0 [-4\lambda x_0' f_0' - 2\lambda_0 a_0 f_0 f_0'' - 2\lambda_0 x_0 f_0' + 8\lambda_0(f_0'')^2 + 8\lambda_0 f_0' f_0'''] + \\ & + 2h_0 x_0' [-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0(f_0')^2] - 2h_0 x_0 [-2\lambda_0 x_0 f_0' - 2\lambda_0 f_0 x_0' + 8\lambda_0 f_0' f_0''] + \\ & + 4\lambda_0^2 h_0 f_0' [-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0(f_0')^2] - 2\lambda_0 g_0 f_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) - \\ & - 2\lambda_0 g_0 f_0 f_0^{IV} x_0 + n_1 h_0^2 x_0 + 4\lambda_0 h_0^2 f_0 - 4\lambda_0 g_0 h_0 f_0' - \\ & - x_0(f_0^{IV} x_0 + \omega_0)[2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] + g_0 x_0^2 f_1^{IV} + \\ & + g_0 x_0 [2x_0' x_1' + a_0 f_0'' x_1 + a_0 x_0 f_1'' + 8\lambda_0^2 f_0'' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0''' f_1' + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'''] + \\ & + 2h_0 x_0' [2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] - 2h_0 x_0 [x_0 x_1' + x_0' x_1 + \lambda_0^2 f_0' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0'' f_1'] + \\ & + 4\lambda_0^2 h_0 f_0' [2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] + g_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) x_1 + 2h_0 g_0 x_0' - \\ & \left. - 2h_0^2 x_1 + 4\lambda_0^2 h_0 g_0 f_1' + f_0^{IV} g_0 x_0 x_1 \right\} = 0, \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$g_0 = x_0^2 + 4\lambda_0^2(f_0')^2, \quad h_0 = x_0 x_0' + 4\lambda_0^2 f_0' f_0'', \quad x_1 = f_1'' + a_0 f_1.$$

Начальные условия для функции $f_2(\theta)$ на отрезке $[0, \pi]$ имеют вид

$$f_2(0) = 0, \quad f_2'(0) = 0, \quad f_2''(0) = A_5, \quad f_2'''(0) = A_6. \tag{5.18}$$

Начальные условия задачи отыскания функции $f_2(\theta)$ на отрезке $[-\pi, 0]$ формулируются следующим образом

$$\begin{aligned} & f_2(\theta = -\pi) = 0, \quad f_2'(\theta = -\pi) = 0, \\ & f_2''(\theta = -\pi) = A_5^*, \quad f_2'''(\theta = -\pi) = A_6^*. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Решение краевой задачи (5.17) – (5.18) аналитическим способом не представляется возможным, поэтому было решено использовать иной подход, а именно, условие разрешимости формулировалось в ходе численного решения краевой задачи для определения функции $f_k(\theta)$. Для численного счета был использован метод Рунге – Кутты – Фельберга в паре с методом пристрелки. В результате расчетов были найдены коэффициенты n_1 и n_2 для различных значений параметра смешанности $0 \leq M^p \leq 1$ для $n = 2$. Результаты вычислений приведены в таблице 17.

M^p	$\lambda_0 = 1/2$			$\lambda_0 = -1/2$		
	n_1	n_2	λ	n_1	n_2	λ
$M^p = 0.0$	4.00000	8.0000000	0.683012	1.3333333	3.0123456	-0.104103
$M^p = 0.1$	4.00000	7.9997562	0.683013	1.3333333	3.0269835	-0.104718
$M^p = 0.2$	4.00000	7.9986923	0.683013	1.3333333	3.0701926	-0.106516
$M^p = 0.3$	4.00000	7.9955185	0.683034	1.3333333	3.1397530	-0.109354
$M^p = 0.4$	4.00000	7.9867700	0.683076	1.3333333	3.1397530	-0.112999
$M^p = 0.5$	4.00000	7.9630625	0.683191	1.3333333	3.1397530	-0.117142
$M^p = 0.6$	4.00000	7.8971870	0.683512	1.3333333	3.4551500	-0.121413
$M^p = 0.7$	4.00000	7.7042370	0.684462	1.3333303	3.5674200	-0.125416
$M^p = 0.8$	4.00000	7.1181770	0.687462	1.3334023	3.6780000	-0.129224
$M^p = 0.9$	4.00014	5.5650000	0.696353	1.3518183	20.151000	-0.307255
$M^p = 1.0$	4.00000	8.0000000	0.683012	1.3333333	1.1380240	0.019580

Таблица 17. Вычисленные значения коэффициентов n_1 и n_2 для $\lambda_0 = 1/2$ и $\lambda_0 = -1/2$

В таблице 17 показана зависимость коэффициентов n_1 и n_2 от параметра смешанности нагружения. Как видно, коэффициент n_1 слабо зависит от M^p , однако как показывает третий столбец, зависимость n_2 от M^p становится существенной, следовательно для смешанного нагружения образца с дефектом пренебречь зависимостью n от параметра смешанности M^p нельзя. Численное решение рассматриваемой краевой задачи на собственные значения позволяет найти значения собственных чисел – столбцы 4 и 7 в таблице 17. Сравнение численного решения и приближенного, полученного с помощью метода малого параметра, приводит к относительной ошибке, равной 0.85%.

Так же был найден ряд значений коэффициента n_3 для некоторых значений параметра смешанности M^p и $\lambda_0 = -1/2$:

$$M^p = 0.1, \quad n_3 = 8.83223, \quad M^p = 0.2, \quad n_3 = 9.0723675,$$

$$M^p = 0.3, \quad n_3 = 9.557903, \quad M^p = 0.3, \quad n_3 = 10.406663$$

Наряду с проведенными вычислениями был найден ряд значений коэффициентов n_1, n_2, n_3 для некоторых значений параметра смешанности нагружения M^p и $\lambda_0 = 3/2$:

$$M^p = 0.3, \quad n_1 = -4, \quad n_2 = 15.73503635, \quad n_3 = -63.07088,$$

$$M^p = 0.5, \quad n_1 = -4, \quad n_2 = 14.64218150, \quad n_3 = -50.48461.$$

Следовательно, было получено прямое четырехчленное разложение Пуанкаре показателя нелинейности материала (в соответствии с терминологией принятой в [39]):

$$n = 1 + n_1\varepsilon + n_2\varepsilon^2 + n_3\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (5.20)$$

Из таблицы 17 видно, что смешанное нагружение элемента конструкции (пластины) с дефектом ведет к нарушению асимптотики Хатчинсона – Райса – Розенгrena, поскольку, если бы решение Хатчинсона – Райса – Розенгrena было справедливым, как установлено в [150], то $n_k = (-1)^k/(\lambda_0 - 1)^k$. Но результаты вычислений, приведенные в таблице 17 показывают, что это условие нарушается и, следовательно, смешанное нагружения приводит к изменению асимптотики Хатчинсона – Райса – Розенгrena и необходимо исследовать весь спектр собственных значений.

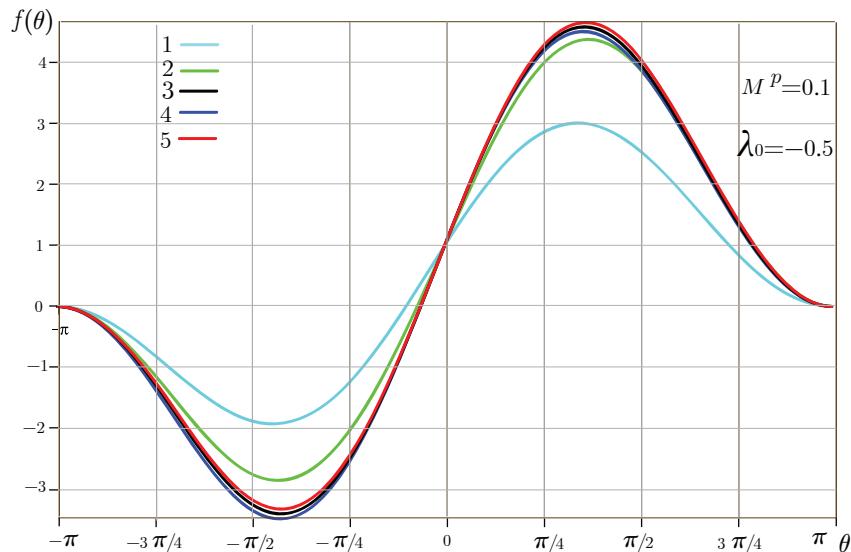


Рис. 47. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.1$ и $\lambda_0 = -1/2$: угловое распределение функции напряжений Эри

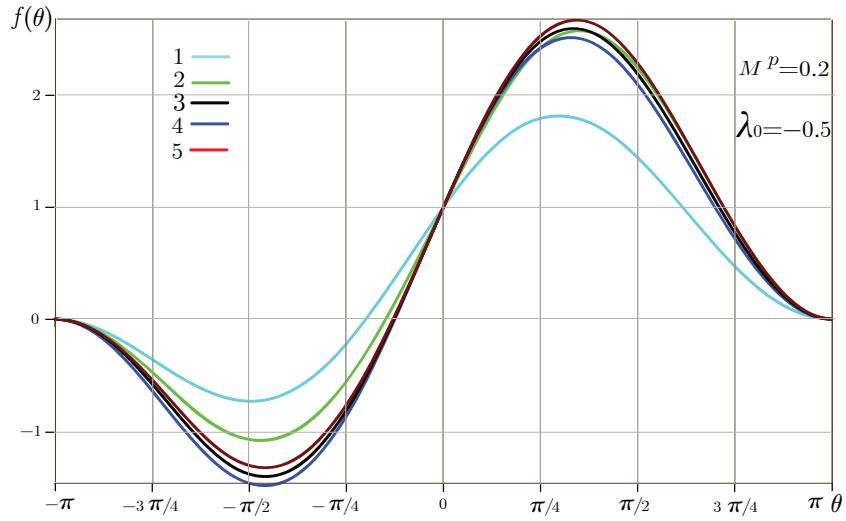


Рис. 48. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.2$ и $\lambda_0 = -1/2$: угловое распределение функции напряжений Эри

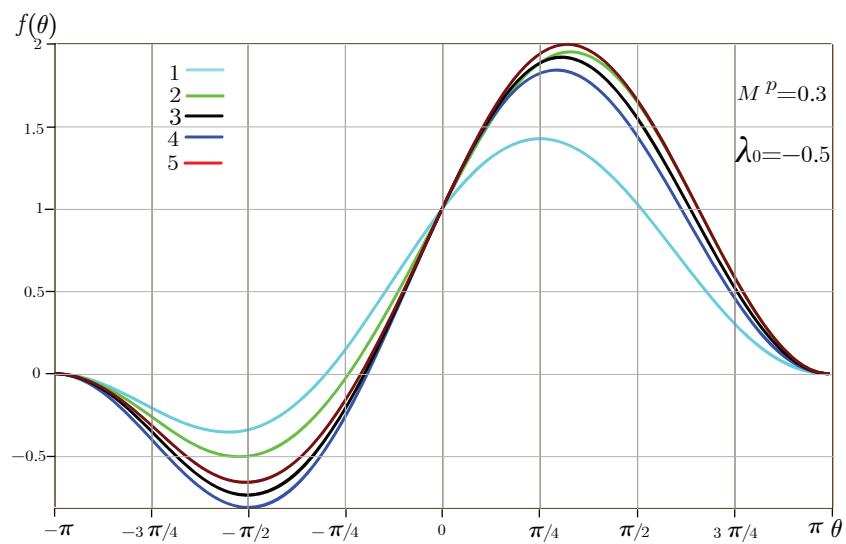


Рис. 49. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.3$ и $\lambda_0 = -1/2$: угловое распределение функции напряжений Эри

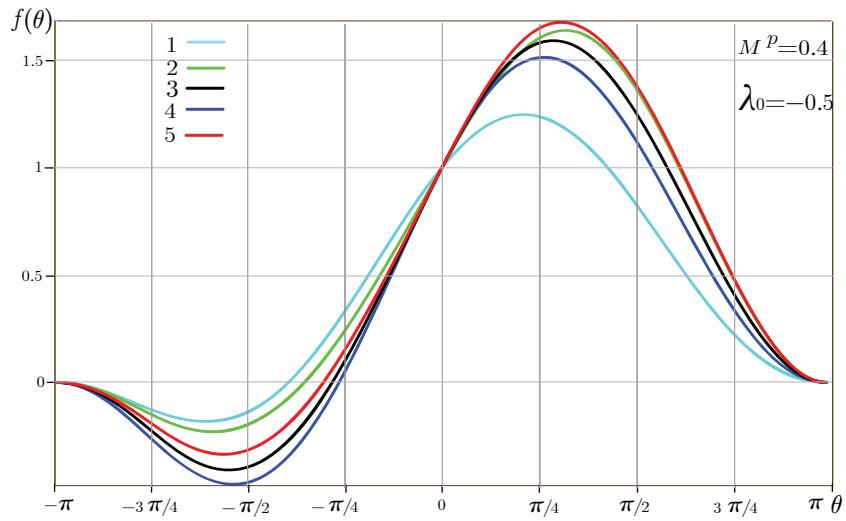


Рис. 50. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.4$ и $\lambda_0 = -1/2$: угловое распределение функции напряжений Эри

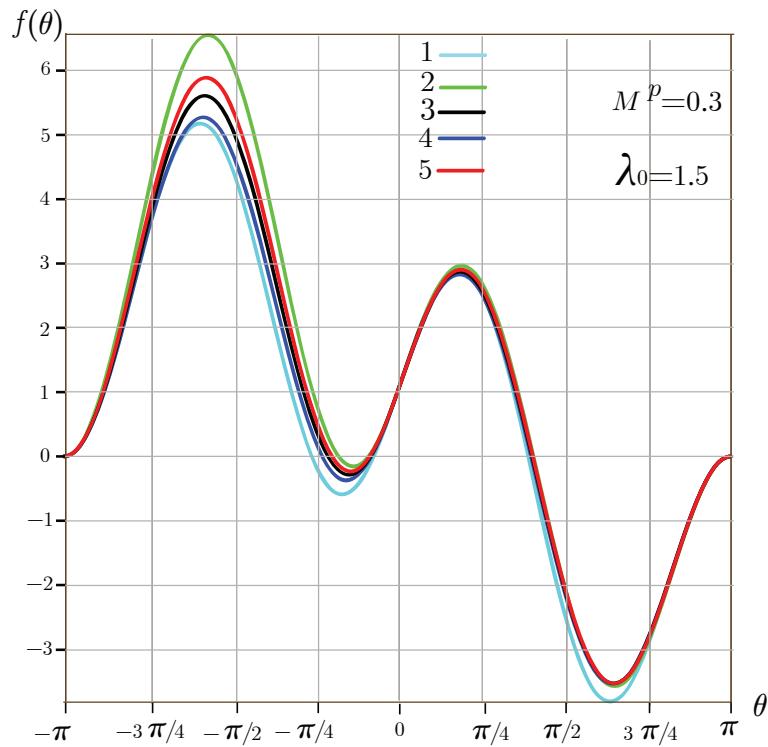


Рис. 51. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.1$ и $\lambda_0 = 3/2$: угловое распределение функции напряжений Эри

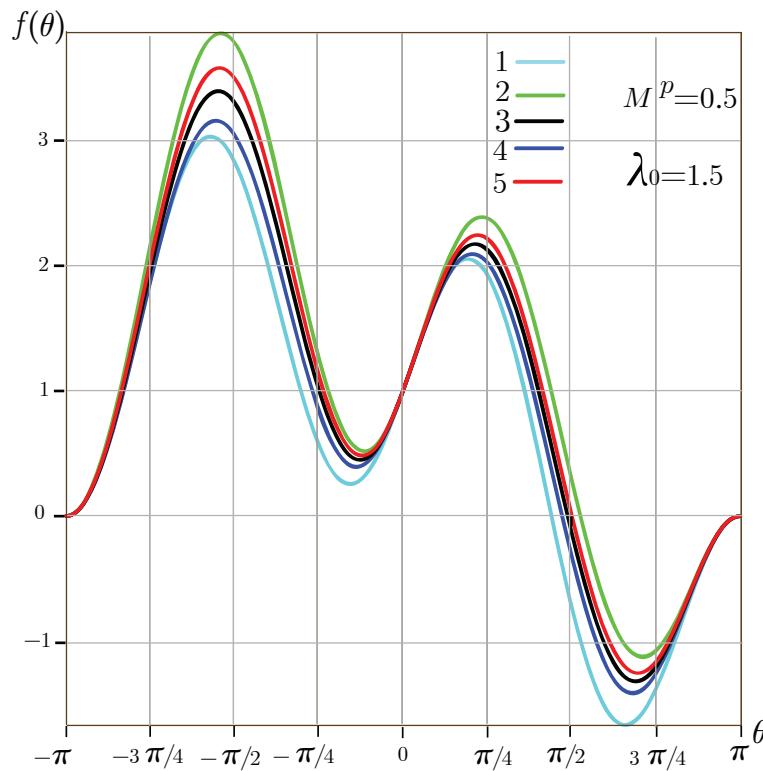


Рис. 52. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.3$ и $\lambda_0 = 3/2$: угловое распределение функции напряжений Эри

На рисунках 47 – 52 голубым цветом показаны распределение $f_0(\theta)$, зеленым цветом – численное решение краевой задачи (2.12), (2.13), синим, черным и красным цветом – двучленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta)$, трехчленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta)$ и четырехчленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \varepsilon^3 f_3(\theta)$ асимптотические разложения функции $f(\theta)$ соответственно.

Из графиков 47 – 52 видно, что с увеличением числа удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении функции $f(\theta)$, угловые распределения стремятся к численному решению. Таким образом, при использовании метода искусственного малого параметра достаточно удерживать четыре слагаемых в асимптотическом разложении, поскольку угловое распределение функции $f(\theta)$, полученное с помощью четырехчленного асимптотического разложения, близко к предельному численному решению, найденному с помощью методов семейства Рунге – Кутты.

5.2. Метод возмущений. Случай плоского напряженного состояния

Как отмечалось выше, одним из эффективных методов решения задач на собственные значения является метод возмущений [5, 91, 129, 130], в рамках которого вводится искусственный малый параметр $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$, представляющий собой разность между собственным значением, отвечающим нелинейной задаче на собственные значения, и собственным значением, соответствующим линейной "невозмущенной" задаче. В рамках рассматриваемого метода при решении задач на собственные значения показатель нелинейности материала n и функция, описывающая угловые распределения компонент тензора напряжений $f(\theta)$, представляются в виде (5.2) – (5.3).

Путем подстановки асимптотических разложений (5.2) – (5.3) в нелинейное дифференциальное уравнение (4.4) и краевые условия (4.8) и (4.10) получим последовательность краевых задач для линейных дифференциальных уравнений относительно функций $f_k(\theta)$:

$$\varepsilon^0 : f_0^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_0'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_0 = 0, \quad (5.21)$$

$$f_0(\theta = 0) = 1, f_0'(\theta = 0) = (\lambda_0 + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2), f_0(\theta = \pi) = 0, f_0'(\theta = \pi) = 0, \\ f_0(\theta = -\pi) = 0, f_0'(\theta = -\pi) = 0, f_0(\theta = 0) = 1, f_0'(\theta = 0) = (\lambda_0 + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2);$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : & f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_1 = \\ & - n_1 \left[x_0(f_0^{IV}x_0/2 + \omega_0)/2g_0 + h_0(x_0'g_0 - x_0h_0 + 3\lambda_0^2g_0f_0')/g_0^2 \right] - \\ & - \frac{1}{2}f_0''[(\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 - 1)n_1 + 8\lambda_0] - \\ & - \frac{1}{2}f_0(\lambda_0^2 - 1)[(\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 + 1)n_1 + 8\lambda_0], \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$f_1(\theta = 0) = 1, f_1'(\theta = 0) = 1/\operatorname{tg}(M^p\pi/2), f_1(\theta = \pi) = 0, f_1'(\theta = \pi) = 0, \\ f_1(\theta = -\pi) = 0, f_1'(\theta = -\pi) = 0, \\ f_1(\theta = 0) = 1, f_1'(\theta = 0) = (\lambda_0 + 1)/\operatorname{tg}(M^p\pi/2);$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 : & f_2^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_2'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_2 = \\
& - 2g_1 \left[f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_1 \right] / g_0 - \\
& - 6\lambda_0 [2 + n_1(\lambda_0 - 1)]f_1'' - (1 - 2\lambda_0)f_1'' + (\lambda_0 - 1)(1 - 2\lambda_0)f_1 + \\
& + [1 + n_1(\lambda_0 - 1)]x_1 - \lambda_0(\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 + 1)f_1 - (2\lambda_0 - 1)[1 + n_1(\lambda_0 - 1)]y_1 - \\
& - 6\lambda_0[n_1 + n_2(\lambda_0 - 1)]f_1'' - 6[1 + n_1(\lambda_0 - 1)]f_0'' + f_0'' - (\lambda_0 - 1)f_0 + \\
& + [1 + n_1(\lambda_0 - 1)](1 - 2\lambda_0)f_0 - 2\lambda_0(\lambda_0 - 1)f_0 + \\
& + (2\lambda_0 - 1)[1 + n_1(\lambda_0 - 1)](4\lambda_0 + 1)f_0 - \\
& - (2\lambda_0 - 1)[n_1 + n_2(\lambda_0 - 1)]y_0 - [1 + n_1(\lambda_0 - 1)]^2 y_0 + [n_1 + n_2(\lambda_0 - 1)]x_0 - \\
& - 2g_1 \left\{ 6[2 + n_1(\lambda_0 - 1)]f_0'' + (1 - 2\lambda_0)f_0'' - (\lambda_0 - 1)(1 - 2\lambda_0)f_0 - \right. \\
& \left. - [1 + n_1(\lambda_0 - 1)]x_0 \right\} / g_0 - [1 + n_1(\lambda_0 - 1)](1 - 2\lambda_0)f_0 - 2\lambda_0(\lambda_0 - 1)f_0 + \quad (5.23) \\
& + (2\lambda_0 - 1)[1 + n_1(\lambda_0 - 1)](4\lambda_0 + 1)f_0 - \\
& - 2g_1 \{ \lambda_0(\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 + 1)f_0 + (2\lambda_0 - 1)[1 + n_1(\lambda_0 - 1)]y_0 \} / g_0 - \\
& - n_2 \{ x_0 g_0 (f_0^{IV} x_0 / 2 + \omega_0) + 2h_0 [g_0 x'_0 - h_0 x_0 + 3\lambda_0^2 g_0 f'_0] \} / g_0^2 - \\
& - n_1 [x_0 g_0 (f_1^{IV} x_0 / 2 + \omega_1) + x_0 g_1 (f_0^{IV} x_0 / 2 + \omega_0) + g_0 x_1 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0)] / g_0^2 - \\
& - n_1 \{ 2h_0 [g_0 x'_1 - h_0 x_1 + 3\lambda_0^2 g_0 f'_1] + 2h_0 [g_1 x'_0 - h_1 x_0 + 3\lambda_0^2 g_1 h'_0] \} / g_0^2 - \\
& - n_1 \left\{ 6\lambda_0 [2 + n_1(\lambda_0 - 1)]g_0 h_0 f'_0 - 2h_0^2 (1 - 2\lambda_0)f_0 + \right. \\
& \left. + n_1 h_0^2 x_0 + 2g_0(1 - 2\lambda_0)h_0 f'_0 \right\} / g_0^2 - \\
& - n_1(1 - 2\lambda_0)f_0(f_0^{IV} x_0 + \omega_0) / g_0 - n_1 2h_1 [g_0 x'_0 - h_0 x_0 + 3\lambda_0^2 g_0 f'_0] g_0^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(\theta = 0) &= 1, f'_2(\theta = 0) = 1 / \operatorname{tg}(M^p \pi / 2), f_2(\theta = \pi) = 0, f'_2(\theta = \pi) = 0, \\
f_2(\theta = -\pi) &= 0, \quad f'_2(\theta = -\pi) = 0, \\
f_2(\theta = 0) &= 1, \quad f'_2(\theta = 0) = (\lambda_0 + 1) / \operatorname{tg}(M^p \pi / 2),
\end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned}
x_k &= (\lambda_0 + 1)(2 - \lambda_0)f_k + 2f_k'', y_k = (\lambda_0 + 1)(2\lambda_0 - 1)f_k - f_k'', \\
u_k &= (\lambda_0 + 1)f_k + f_k'', v_k = (\lambda_0 + 1)\lambda_0 f_k, g_0 = u_0^2 + v_0^2 = u_0 v_0 + 3\lambda_0^2 f_0'^2, \\
h_0 &= u_0 u'_0 + v_0 v'_0 - u'_0 v_0 / 2 - u_0 v'_0 / 2 + 3\lambda_0^2 f_0' f_0'', \\
\omega_0 &= u_0'^2 + u_0(\lambda_0 + 1)f_0'' + v_0'^2 + v_0 v_0'' - (\lambda_0 + 1)v_0 f_0'' / 2 - u'_0 v'_0 -
\end{aligned}$$

$$-u_0 v_0''/2 + 3\lambda_0^2(f_0''^2 + f_0' f_0'''),$$

$$\begin{aligned} g_1 = & 2u_0(u_1 + f_0) + 2v_0[v_1 + (2\lambda_0 + 1)f_0] - u_0[v_1 + (2\lambda_0 + 1)f_0] - \\ & - v_0(u_1 + f_0) + 6\lambda_0 f_0'(\lambda_0 f_1' + f_0'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1 = & u_0(u_1' + f_0') + u_0'(u_1 + f_0) + v_0[v_1' + (2\lambda_0 + 1)f_0'] + v_0'[v_1 + (2\lambda_0 + 1)f_0] + \\ & + 3\lambda_0 f_0'(\lambda_0 f_1'' + f'') - u_0'[v_1 + (2\lambda_0 + 1)f_0]/2 - u_0[v_1' + (2\lambda_0 + 1)f_0]/2 - \\ & - v_0(u_1' + f_0')/2 - v_0'(u_1 + f_0)/2 + 3\lambda_0 f_0''(\lambda_0 f_1' + f_0')', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 = & 2u_0'(u_1' + f_0') + u_0[(\lambda_0 + 1)f_1'' + f_0''] + (\lambda_0 + 1)f_0''(u_1 + f_0) + 2v_0'[v_1' + (2\lambda_0 + 1)f_0'] + \\ & + v_0'[v_1'' + (2\lambda_0 + 1)f_0''] + v_0''[v_1 + (2\lambda_0 + 1)f_0] - (\lambda_0 + 1)f_0''[v_1 + (2\lambda_0 + 1)f_0]/2 - \\ & - v_0[(\lambda_0 + 1)f_1'' + f_0'']/2 - v_0'(u_1' + f_0') - u_0'[v_1' + (2\lambda_0 + 1)f_0'] - v_0''(u_1 + f_0)/2 - \\ & - u_0[v_1'' + (2\lambda_0 + 1)f_0'']/2 + 6\lambda_0 f_0''(\lambda_0 f_1'' + f_0'') + 3\lambda_0 f_0'''(\lambda_0 f_1' + f_0') + 3\lambda_0 f_0'(\lambda_0 f_1''' + f_0'''). \end{aligned}$$

Решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $f_0(\theta)$ (5.21), удовлетворяющее краевым условиям отсутствия поверхностных усилий, для нормального нагружения пластины (для трещины отрыва) имеет вид:

$$f_0^I(\theta) = \beta \cos \alpha \theta - \alpha \cos \beta \theta,$$

где $\alpha = \lambda_0 - 1$, $\beta = \lambda_0 + 1$.

Для чистого сдвига (трещины поперечного сдвига):

$$f_0^{II}(\theta) = \sin \alpha \theta - \sin \beta \theta,$$

где спектр собственных значений определяется из решения характеристического уравнения $\sin 2\pi\lambda_0 = 0$, откуда $\lambda_0 = m/2$, где m – целое число.

При смешанном нагружении образца с трещиной в силу линейности "невозмущенной" задачи решение представляет собой суперпозицию симметричной и антисимметричной относительно линии продолжения дефекта частей решения

$$f_0(\theta) = C_1(\beta \cos \alpha \theta - \alpha \cos \beta \theta) + C_2(\sin \alpha \theta - \sin \beta \theta), \quad (5.24)$$

где постоянные C_1 и C_2 связаны соотношением

$$M^p = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}[(\lambda_0 + 1)C_1/C_2].$$

Задача нулевого порядка имеет нетривиальное решение (5.24), поэтому неоднородные задачи для функций $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ (5.22) (5.23) будут иметь решения только в том случае, если будут удовлетворены условия разрешимости [129, 130]. Таким образом, если однородная задача имеет только тривиальное решение (т.е. значение параметра λ_0 не совпадает ни с одним из собственных чисел однородной задачи), то неоднородная задача имеет единственное решение при любой непрерывной правой части $G_k(\theta)$ дифференциального уравнения относительно функции $f_k(\theta)$, $k > 0$. С другой стороны, если параметр λ_0 равен какому-нибудь собственному числу однородной задачи (т.е. однородная задача имеет нетривиальное решение), неоднородная задача разрешима лишь при следующем условии при условии ортогональности функции $G_k(\theta)$ собственной функции $u(\theta)$, отвечающей собственному значению λ_0 [129, 130]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_k(\theta) u(\theta) d\theta = 0. \quad (5.25)$$

Этот результат составляет содержание теоремы, обычно называемой альтернативной Фредгольма [129, 130]. Для нахождения условия разрешимости для краевой задачи для уравнения четвертого порядка (5.22) можно воспользоваться подходом, реализованным в [61, 59, 147, 150], и показать, что краевая задача (5.22) является самосопряженной, поскольку дифференциальное уравнение и краевые условия сопряженной задачи совпадают с дифференциальным уравнением и краевыми условиями однородной задачи (5.21). Таким образом, $u(\theta) = f_0(\theta)$, где функция $f_0(\theta)$ определяется выражением (5.24). Условие разрешимости краевой задачи (5.22) имеет вид

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_1(\theta) f_0(\theta) d\theta = 0,$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ -n_1 \left[x_0(f_0^{IV}x_0/2 + \omega_0)/2g_0 + h_0(x'_0g_0 - x_0h_0 + 3\lambda_0^2 g_0 f'_0)/g_0^2 \right] - \right. \\ \left. f''_0[(\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 - 1)n_1 + 8\lambda_0]/2 - \right. \\ \left. - f_0(\lambda_0^2 - 1)[(\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 + 1)n_1 + 8\lambda_0]/2 \right\} f_0(\theta) d\theta = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Из условия разрешимости краевой задачи для функции $f_1(\theta)$ (5.26) можно найти коэффициент n_1 . Полученные значения коэффициента n_1 для различных значений параметра смешанности нагружения сведены в таблицу 18. После решения краевой задачи относительно функции $f_1(\theta)$, можно обратиться к интегрированию уравнения для функции $f_2(\theta)$. Проводя аналогичные рассуждения, можно сформулировать условие разрешимости краевой задачи для функции $f_2(\theta)$ и получить числовые значения для следующего коэффициента n_2 асимптотического разложения показателя нелинейности материала. Вычисленные значения коэффициента n_2 приведены в таблице 18.

Таблица 18. Коэффициенты асимптотического разложения показателя нелинейности материала

M^p	$\lambda_0 = 1/2$		$\lambda_0 = -1/2$
	n_1	n_2	n_1
$M^p = 0.0$	4.000000	8.000000	1.2382542
$M^p = 0.1$	4.007088	7.999954	1.2376680
$M^p = 0.2$	4.028722	7.978646	1.2361515
$M^p = 0.3$	4.065772	7.941876	1.2336330
$M^p = 0.4$	4.118594	7.804045	1.2301870
$M^p = 0.5$	4.184135	7.749316	1.2260180
$M^p = 0.6$	4.249098	7.600224	1.2215020
$M^p = 0.7$	4.279336	7.577773	1.2171440
$M^p = 0.8$	4.224060	7.926086	1.2135000
$M^p = 0.9$	4.084774	7.958755	1.2190000
$M^p = 1.0$	4.000000	8.000000	1.2220000

На рисунках 53 – 56 голубым цветом показаны распределение $f_0(\theta)$, зеленым цветом – численное решение краевой задачи (2.12), (2.13), синим и красным цветом – двучленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta)$ и трехчленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta)$ асимптотические разложения функции $f(\theta)$ соответственно.

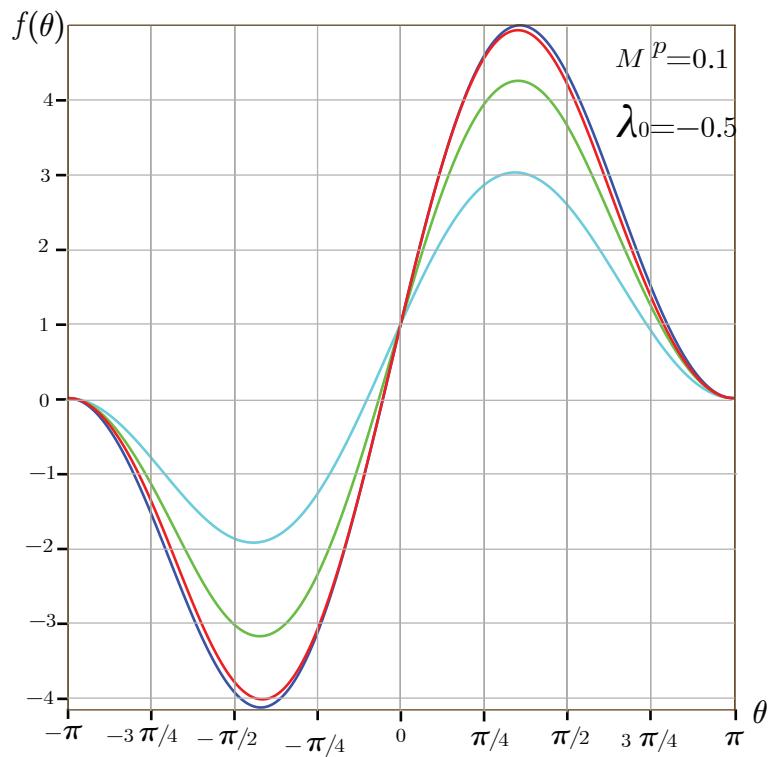


Рис. 53. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.1$ и $\lambda_0 = -1/2$: угловое распределение функции напряжений Эри

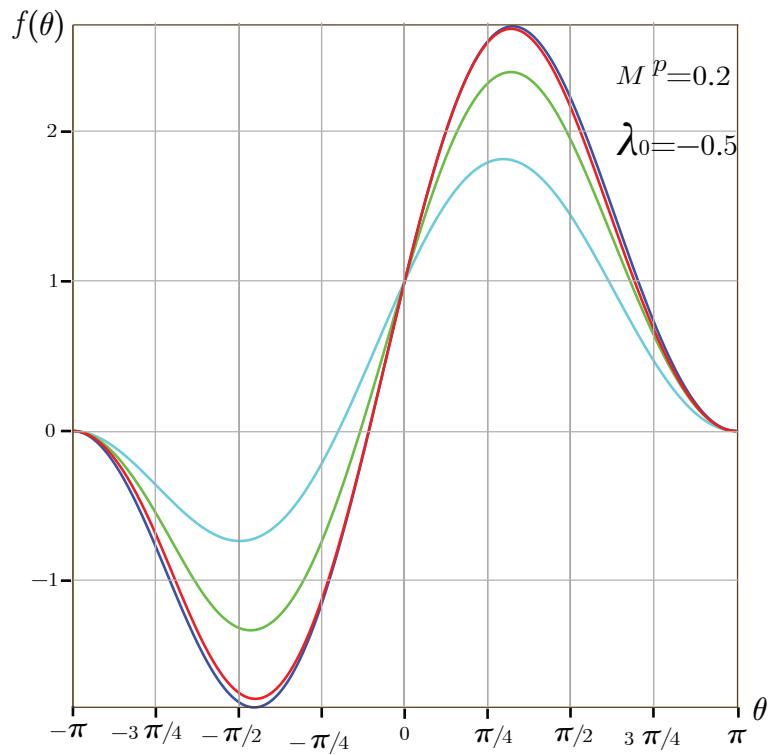


Рис. 54. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.2$ и $\lambda_0 = -1/2$: угловое распределение функции напряжений Эри

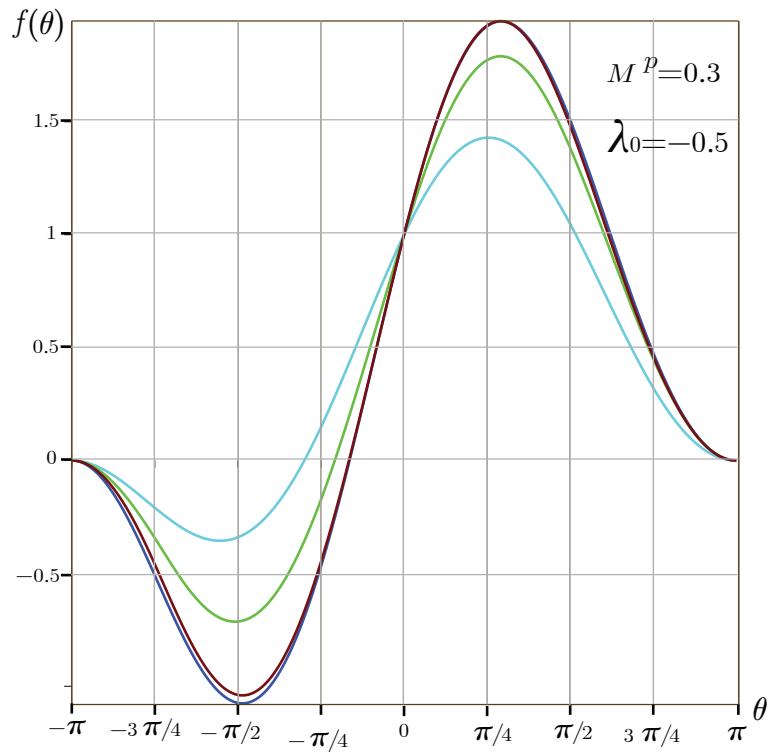


Рис. 55. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.3$ и $\lambda_0 = -1/2$: угловое распределение функции напряжений Эри

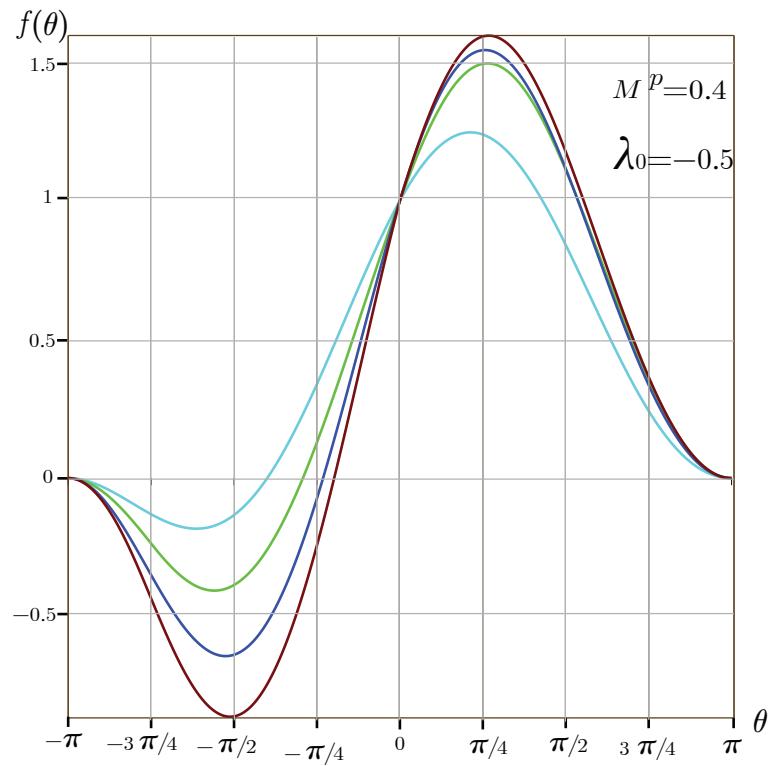


Рис. 56. Результаты вычислений для параметра смешанности $M^p = 0.4$ и $\lambda_0 = -1/2$: угловое распределение функции напряжений Эри

Из приведенных результатов вычислений можно увидеть, что смешанное нагружение приводит к изменению особенности поля напряжений у вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния. Ранее было установлено [59, 61, 147], что для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига $n_k = (-1)^{k+1}/(\lambda_0 - 1)^{k+1}$ и асимптотический ряд для n в выражениях (5.2) может быть просуммирован, поскольку данное выражение представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Легко найти, что $n = -\lambda/(\lambda + 1)$ или $\lambda = n/(n + 1)$, что соответствует классическому решению Хатчинсона – Райса – Розенгrena. Приведенные в таблице 18 результаты расчетов для различных значений параметра смешанности нагружения показывают, что смешанное нагружение приводит к изменению особенности поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного деформирования в рамках предположения о реализации плоского напряженного состояния. В противном случае значения для коэффициента n_1 был бы равен $n_1 = 4$ для всех значений параметра смешанности нагружения M^p . При построении численного решения задачи определения напряженно – деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях плоского деформированного состояния принимают, что характер особенности поля напряжений совпадает с сингулярностью поля напряжений решения Хатчинсона – Райса – Розенгrena (т.е. предполагается известным собственное значение задачи и предполагается, что $\lambda = n/(n + 1)$ и принятое предположение, приводящее к непрерывному распределению радиального напряжения, подтверждается полученным решением [82]). В случае плоского напряженного состояния такое предположение, как показывает проведенный асимптотический анализ, принято быть не может и следует разыскивать спектр собственных значений как часть решения.

5.3. Выводы по пятой главе

Показано, что метод малого параметра дает эффективный способ вычисления собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблем нелинейной механики разрушения. Метод искусственного малого параметра позволяет найти весь спектр собственных значений задачи, которые могут быть уточнены с помощью численного решения. Однако чис-

ленное решение строится посредством метода Рунге – Кутты – Фельберга в сочетании с методом пристрелки, для реализации которого очень важно знать начальное приближение, без которого поиск численного решения сопряжен с большими временными и вычислительными затратами. В этой связи объединение численного решения с асимптотическим подходом дает возможность быстрого и эффективного решения нелинейной задачи на собственные значения. Полученное решение ясно показывает, что смешанное деформирование приводит к новой асимптотике поля напряжений в окрестности вершины трещины и, как установлено с помощью методов теории возмущений, в случае смешанного нагружения асимптотика Хатчинсона – Райса – Розенгрена нарушается.

Заключение

Итоги выполненного исследования

В данной работе предложен метод отыскания всего спектра собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного деформирования. Найдены собственные значения, отличные от собственных значений, отвечающих задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояния. Приведены результаты асимптотического и численного решения нелинейных задач на собственные значения, следующих из проблемы определения напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне видов смешанного деформирования от нормального отрыва до поперечного сдвига. Показано, что метод малого параметра дает эффективный способ вычисления собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблем нелинейной механики разрушения. Показано, что смешанное деформирование пластины с дефектом приводит к новому классу нелинейных задач на собственные значения, поскольку асимптотика собственных значений в случае смешанного нагружения начинает существенно зависеть от параметра смешанности нагружения. Построены угловые распределения компонент тензора напряжений и деформаций вблизи кончика трещины для новой найденной асимптотики. Показано, что эти собственные значения определяют асимптотику дальнего поля напряжений в связанной задаче о трещине в среде с поврежденностью. С использованием новой асимптотики дальнего поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения построены конфигурации областей диспергированного материала.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы

Цикл работ Ю.Н. Работнова, открывшийся статьей [46], вместе с работами Л.М. Качанова [28, 29, 30] положил начало целому направлению механики деформируемого твердого тела – континуальной механике поврежденности. Континуальная механика поврежденности дает феноменологическое описание

эволюции рассеянных дефектов – микротрещин, число которых в любом элементарном объеме предполагается весьма большим, что позволяет описывать этот процесс с помощью осредненного параметра – поврежденности. Этот подход в последнее десятилетие был разработан в духе рациональной механики сплошных сред и приобрел строгую форму, в которой поврежденность выступает в качестве дополнительного термодинамического параметра [47, 48, 49].

Основываясь на приведенном в первой главе обзоре научной литературы, который, безусловно, не может быть исчерпывающим ввиду огромного количества направлений, использующих представления механики поврежденности, можно заключить, что теоретическое развитие идей и представлений континуальной механики поврежденности будет идти по пути создания математических моделей накопления повреждений на макро-, мезо- и микроуровнях: процесс накопления повреждений является многомасштабным и многоуровневым. В этом направлении неполная автомодельность (или автомодельное решение второго рода) является с математической точки зрения многообещающим средством в понимании многомасштабных явлений и возникающем сейчас искусстве решения таких задач на компьютере. Например, в [60] на основе автомодельного представления решения задачи накопления повреждений в твердом теле и введения автомодельной промежуточной асимптотики получен закон скейлинга накопления повреждений.

По всей видимости, развитие практических приложений механики поврежденности будет идти по пути разработки комплекса вычислительных программ, позволяющих оценить напряженно – деформированное состояние в элементах конструкции; определить конфигурацию зон локализаций необратимых деформаций и зон активного накопления повреждений, что даст возможность оптимизировать массогабаритные характеристики элементов конструкций и по пути реализации имитационного (компьютерного) моделирования на основе экспериментальных и теоретических исследований для модельных и используемых в теплоэнергетике, авиа и автомобилестроении элементов конструкций, что позволит выработать и сформулировать критерии разрушения, учитывающие изменение свойств материала в процессе работы элемента конструкции, дать современные варианты ремонтных технологий.

Таким образом, разработанные в настоящей диссертации модели и автомо-
дельные решения задач отыскания напряженно – деформированного состояния
у вершины трещины могут быть полезны для определения напряженно – дефор-
мированного состояния в образцах с трещинами реальной геометрии в полном
диапазоне смешанных форм деформирования с учетом процессов накопления
повреждений и формулировки критериев разрушения, учитывающих процессы
накопления повреждений в ходе эксплуатации реальных элементов конструк-
ций.

Список литературы

- [1] Адылина Е.М. Численный метод построения спектра собственных значений нелинейной задачи, следующей из одной проблемы смешанного деформирования пластины с трещиной // Вестник Самарского государственного университета. – 2013. – №6 (107). – С. 85–99.
- [2] Адылина Е.М., Степанова Л.В. Автомодельное решение задачи о смешанном деформировании пластины с трещиной в среде с поврежденностью// Вестник Самарского государственного университета. – 2013. – №9.1 (110). – С. 76–93.
- [3] Адылина Е.М., Игонин С.А., Степанова Л.В. О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины // Вестник Самарского государственного университета. – 2012. – №3-1 (94). – С. 83–102.
- [4] Адылина Е.М., Степанова Л.В. О построении многомасштабных моделей неупругого разрушения // Вестник Самарского государственного университета. – 2012. – №9 (100). – С. 70 – 83.
- [5] Андрианов И., Аврейцевич Я. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2013. – 276 с.
- [6] Аргатов И. И. Асимптотические модели упругого контакты. СПб: Наука. – 2005. – 448с.
- [7] Аргатов И. И. Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб: Политехника. – 2004. – 302 с.
- [8] Астафьев В.И., Крутов А.Н. Распределение напряжений вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – №5 С. 125 – 133.
- [9] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика раз-

рушения. Самара: Издательство "Самарский университет". – 2001. – 632 с.

- [10] Астафьев В.И., Ширяева Л.К. Накопление поврежденности и коррозионное растрескивание металлов под напряжением // Самара: Издательство "Самарский университет". – 1998. – 123с.
- [11] Астафьев В.И., Степанова Л.В. Влияние поврежденности материала на напряженно – деформированное состояние в окрестности вершины трещины для дробно линейного закона ползучести // Вестник Самарского государственного университета. – 1997. – №2 (4). – С. 135 – 141.
- [12] Астафьев В.И., Степанова Л.В., Шестериков С.А Асимптотика напряженно – деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести // Вестник Самарского государственного университета. – 1995. – С. 59 – 64.
- [13] Астафьев В.И., Григорова Т.В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – №3. – С. 160 – 166.
- [14] Баренблatt Г.И. Автомодельные явления - анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Интеллект. – 2009. – 216 с.
- [15] Баренблatt Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Ленинград: Гидрометеоиздат. – 1982. – 256 с.
- [16] Бейкер Дж., Грейвс – Моррис П. Аппроксимация Паде. М.: Мир. – 1986. – 502 с.
- [17] Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир. – 1986. – 360 с.
- [18] Ботвина Л.Р., Разрушение. Кинетика, механизмы, общие закономерности. М.: Наука. – 2008. – 334с.

- [19] Бьюи Х. Д. Механика разрушения: Обратные задачи и решения. М: Физматлит. – 2011. – 412 с.
- [20] Вильдеман В.Э., Ломакин Е.В., Третьяков М.П. Закритическое деформирование сталей при плоском напряженном состоянии // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С. 26 – 36.
- [21] Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В. Поврежденность и разрушение: обзор экспериментальных работ // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18. – №3. – С. 11–24.
- [22] Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В. Поврежденность и разрушение: модели, основанные на физических теориях пластичности // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18. – №6. – С. 12–23.
- [23] Герасименко А.А. Прогнозирование остаточного ресурса стальных вертикальных резервуаров по параметрам циклической трещиностойкости в условиях двухосного нагружения // Дис. канд. тех. наук. Санкт – Петербург. – 2014. – 160 с.
- [24] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики // М.: Физматлит. – 2005. – 256 с.
- [25] Ито Ю., Мураками Ю., Хасебэ Н., Юуки Р., Тоя М., Того К., Мията Х., Терада Х., Миядзаки Н., Аоки С. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Том 1. М.: Мир. – 1990. – 448с.
- [26] Ито Ю., Мураками Ю., Хасебэ Н., Юуки Р., Тоя М., Того К., Мията Х., Терада Х., Миядзаки Н., Аоки С. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Том 2. М.: Мир. – 1990. – 568с.
- [27] Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука. – 1974. – 312 с.
- [28] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука. – 1969. – 420 с.
- [29] Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматлит.– 1960. – 455 с.

- [30] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР.ОТН. – 1958. – С. 29–31.
- [31] Кондратьев Н.С., Трусов П.В. Многоуровневые модели пластичности многофазных поликристаллических материалов, основанные на физических теориях пластичности и вязкопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – №1. – С. 76–105.
- [32] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики Долгопрудный: Интеллект. – 2010. – 368 с.
- [33] Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ. – 2008. – 215 с.
- [34] Левин В.А. Нелинейная вычислительная механика прочности. В 5 томах. Том 1. Модели и Методы. Образование и развитие дефектов. М.: Физматлит. – 2015. – 456 с.
- [35] Левин В.А. Нелинейная вычислительная механика прочности. В 5 томах. Том 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. М.: Физматлит. – 2015. – 544 с.
- [36] Ломакин Е.В., Зезин Ю.П. Исследование вязкоупругих свойств усиленных наночастицами эластомеров // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С. 6 – 19.
- [37] Ломакин Е.В., Федулов Б.Н. Растижение полосы, ослабленной вырезами с круговым основанием, в условиях плоской деформации из материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – №4. – С. 80 – 87.
- [38] Ломакин Е.В., Федулов Б.Н. Теория пластичности и предельного равновесия тел, чувствительных к виду напряженного состояния // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-4. – С. 1585 – 1587.

- [39] Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир.– 1984. – 537 с.
- [40] Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир. – 1976. – 456с.
- [41] Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения твердых тел. Курс лекций. СПб.: Профессия. – 2012. – 552 с.
- [42] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит. – 2005. – 256 с.
- [43] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит. – 2002. – 432 с.
- [44] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. – 2014. – 754 с.
- [45] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. – 1988. – 712 с.
- [46] Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР. – 1959. – 5 – 7 с.
- [47] Радаев Ю.Н. Канонические инварианты уравнений теории связанный пластичности и поврежденности // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 1999. – №4 (14). – С. 70–93.
- [48] Радаев Ю.Н. Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 1998. – №2 (8). – С. 79–105.
- [49] Радаев Ю.Н. Термодинамическая модель накопления анизотропной поврежденности в твердых телах // IX Конференция по прочности и пластичности. Москва, 22–26 января 1996. Труды конференции. – 1996. – Т. 2. – С. 148–153.

- [50] Си Дж. Мезомеханика, понятие сегментации и мультискейлинговый подход: нано-микро-макро // Физическая мезомеханика. – 2008. – Т. 11. – №3. – С. 5 – 18.
- [51] Степанова Л. В., Игонин С. А. Асимптотика поля напряжений у вершины усталостной трещины в среде с поврежденностью: вычислительный эксперимент и аналитическое решение // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2015. – Т. 18. – №2. – С. 201 – 217.
- [52] Степанова Л.В., Яковлева Е.М. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины при смешанном нагружении тонкой пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния. Спектр собственных значений // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред. Сборник статей. – 2015. – С. 292 – 298.
- [53] Степанова Л.В., Яковлева Е.М. О смешанном нагружении элементов конструкций с дефектом // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико–математические науки. – 2015. – Т. 19. – №2. – С. 358 – 381.
- [54] Степанова Л.В., Яковлева Е.М. К вопросу о нелинейных задачах на собственные значения, возникающих в механике разрушения // Вестник Самарского государственного университета. – 2015. – №3 (125). – С. 125 – 139.
- [55] Степанова Л.В., Адылина Е.М. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55. – №5 (327). – С. 181 – 194. (Stepanova L.V., Adylinna E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading// Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2014. – V. 55. – №5. – P. 885–895.)
- [56] Степанова Л.В., Адылина Е.М. Поле напряжений у вершины трещины при смешанном нагружении в условиях плоского напряженного состояния // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико – математические науки. – 2014. – №1. – С. 109 – 124.

- [57] Степанова Л.В., Яковлева Е.М. Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – №3. – С. 129–162.
- [58] Степанова Л.В. Уточненный расчет напряженно – деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью // Вестник Самарского государственного университета. – 2011. – №2 (83). – С. 105–115.
- [59] Степанова Л.В. Анализ собственных значений в задаче о трещине в материале со степенным определяющим законом // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49. – №8. – С. 1399–1415.
- [60] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М.: Физматлит. – 2009. – 336 с.
- [61] Степанова Л.В. О собственных значениях в задаче о трещине антиплюсского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49. – №1 (287). – С. 173–180.
- [62] Степанова Л.В., Федина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине отрыва в связанной постановке // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72. – №3. – С. 516–527.
- [63] Степанова, Л.В. Математические методы механики разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет". – 2006. – 231 с.
- [64] Степанова Л.В., Федина М.Е. Асимптотика дальнего поля напряжений в задаче о росте трещины в условиях ползучести в среде с поврежденностью // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46. – №4 (272). – С. 133–145.
- [65] Степанова Л.В., Федина М.Е., Курнышева Н.А. Автомодельное решение задачи о трещине типа I в связанной постановке (связка ползучесть – по-

- врежденность) // Вестник Самарского государственного университета. – 2005. – №(36). – С. 125–155.
- [66] Степанова Л.В., Федина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной постановке (ползучесть – поврежденность) // Прикладная механика и техническая физика. 2002. – Т. 43. – №5 (255). – С. 114–123.
- [67] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука. – 1979. – 560 с.
- [68] Трусов П.В. Многоуровневые модели для описания неупругого деформирования материалов: проблемы и перспективы // В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. – 2015. – С. 3799.
- [69] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Институт компьютерных исследований. – 2012. – 872 с.
- [70] Шлянников В.Н., Иштыряков И.С., Яруллин Р.Р. Характеристики деформирования сплава Д16Т при совместном нагружении растяжением, сжатием, кручением и внутренним давлением // Труды Академэнерго. – 2014. – №3. – С. 78 – 90.
- [71] Шлянников В.Н., Иштыряков И.С. Параметры функций вида напряженного состояния для алюминиевого сплава Д16Т // Труды Академэнерго. – 2014. – №4. – С. 51 – 63.
- [72] Шлянников В.Н., Кислова С.Ю., Туманов А.В. Поля напряжений в вершине наклонных трещин образов различных геометрий // Труды Академэнерго. – 2013. – №2. – С. 79 – 90.
- [73] Шлянников В.Н., Меши Т., Бойченко Н.В. Формулировка упругих и пластических параметров стеснения для трехмерных задач механики трещин // Труды Академэнерго. – 2013. – №3. – С. 80 – 92.

- [74] Шлянников В.Н., Захаров А.П. Образцы для испытаний при двухосном циклическом нагружении // Труды Академэнерго. – 2013. – №3. – С. 70 – 79.
- [75] Шлянников В.Н., Захаров А.П., Герасименко А.А. Характеристики циклической трещиностойкости стали СТ-3 при двухосном нагружении // Труды Академэнерго. – 2013. – №4. – С. 91 – 101.
- [76] Шлянников В.Н. , Кислова С.Ю. Упругие и пластические параметры смешанности экспериментальных образцов различной геометрии // Труды Академэнерго. – 2012. – №1. – С. 101 – 112.
- [77] Шлянников В.Н. Решение задач нелинейного деформирования и разрушения материалов при сложном напряженном состоянии // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т. 15. – №1. – С. 57 – 67.
- [78] Шлянников В.Н., Кислова С.Ю., Туманов А.В. Особенности развития трещин смешанного типа в титановом сплаве ОТ4 // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2011. – Т. 77. – №12. – С. 46 – 52.
- [79] Шлянников В.Н., Шагивалеев Р.Ф. Параметры сингулярного НДС цилиндра с учетом градиента номинальных напряжений // Труды Академэнерго. – 2010. – №3. – С. 72 – 80.
- [80] Шлянников В.Н., Туманов А.В. Анализ влияния двухосности нагружения на НДС полуэллиптического дефекта различной формы в плане при смешанных модах деформирования // Труды Академэнерго. – 2009. – №3. – С. 108 – 120.
- [81] Шлянников В.Н., Яруллин Р.Р. Обоснование вариантов ремонтных технологий насадных дисков турбины по параметрам напряженно – деформированного состояния // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9. – №4-1. – С. 78 – 83.
- [82] Шлянников В.Н., Кислова С.Ю. Параметры смешанных форм деформирования для трещины в виде математического разреза // Известия Саратов-

ского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 77 – 84.

- [83] Шлянников В.Н., Туманов А. В. Упругие параметры смешанных форм деформирования полуэллиптической трещины при двухосном нагружении // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – №9:1. – С. 77 – 84.
- [84] Шлянников В.Н., Кислова С. Ю. Параметры смешанных форм деформирования для трещины в виде математического разреза // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – №4. – С. 83 – 90.
- [85] Шлянников В.Н., Кислова С.Ю. Рассчет параметра стеснения и его структурных компонентов в разложении с учетом членов высоких порядков // Труды Академэнерго. – 2008. – №4. – С. 52 – 63.
- [86] Шлянников В.Н., Шагивалеев Р.Ф. Расчет остаточной долговечности трубопровода по предельным деформациям при двухосном нагружении // Труды Академэнерго. – 2008. – №4. – С. 64 – 76.
- [87] Шлянников В.Н., Бойченко Н.В. Поля деформации при ползучести в условиях двухосного нагружения// Труды Академэнерго. – 2006. – №1. – С. 158 – 164.
- [88] Шлянников В.Н., Ильченко Б.В., Бойченко Н.В., Тартыгашева А.М. Пластина с отверстием в состоянии упругости, пластичности и ползучести // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – 2004. – №1 – 2. – С. 107 – 116.
- [89] Amazigo J.C. Some mathematical problems of elastic-plastic crack growth // Fracture Mechanics. SIAM-AMS Proceedings. – 1979. – V. 12. – P. 125 – 137.
- [90] Amazigo J.C. Fully plastic center-cracked strip under antiplane shear // Int. J. Fracture. – 1975. – V. 11. – P. 1291 – 1299.

- [91] Andrianov I., Awrejcewicz J., Danishevskyy V., Ivankov A. Asymptotic Methods in the Theory of Plates with Mixed Boundary Conditions. New York: Wiley. – 2014. – 286 p.
- [92] Andrianov I., Awrejcewicz J. Methods of asymptotic analysis and synthesis in nonlinear dynamics and solid mechanics. M., Izhevsk: Institute of computer investigations. – 2013. – 276 p.
- [93] Anheuser M., Gross D. Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear // Archive of Applied Mechanics. – 1994. – V. 64. – P. 509 – 518.
- [94] Aravas N., Blazo D.A. Higher order terms in asymptotic elastoplastic mode-III crack tip solutions // Acta Mechanica. – 1991. – V. 90. – P. 139 – 153.
- [95] Barenblatt G.I. Flow, deformation and fracture lectures on fluid mechanics and mechanics of deformable solids for mathematicians and physicists. Cambridge: Cambridge University Press. – 2014. – 273 p.
- [96] Barenblatt G.I. Similarity, Self-similarity and Intermediate Asymptotics. Berlin: Springer. – 2013. – 240 p.
- [97] Becker W., Weibgraebner P. Finite Fracture Mechanics model for mixed mode fracture in adhesive joints // International Journal of Solids and Structures. – 2013. – V. 50(14). – P. 2383 – 2394.
- [98] Beliakova T.A., Kulagin V.A. The eigenspectrum approach and T-stress at the mixed-mode crack tip for a stress-state dependent material // Procedia Materials Science. – 2014. – V.3. – P.147 – 152.
- [99] Berto F., Lazzarin P. Multiparametric full – field representations of the in-plane stress fields ahead of cracked components under mixed mode loading// International Journal of Fatigue. – 2013. – V. 46. – P. 16 – 26.
- [100] Biglari F., Nikbin K.M., Environmental creep intergranular damage and multisite crack evolution model for engineering alloys// Computational Materials Science. – №84 – 2014 – 267 – 277 p.

- [101] Brahtz J. H. A. Stress distribution in a reentrant corner // Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. – 1933. – №55. – P. 31 – 71 p.
- [102] Bui H. D. Fracture Mechanics: Inverse Problems and Solutions. Springer. – 2000. – 375 p.
- [103] Bui H.D., Fracture Mechanics Inverse Problems and Solutions. Springer. – 2006. – 394 p.
- [104] Carpinteri A., Sapora A. Finite Fracture Mechanics approach to V-notched element subjected to mixed-mode loading // Engineering Fracture mechanics. – 2013. – V. 97. – P. 216 – 226.
- [105] Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in Linear Elasticity: From the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today // Engn. Fract. Mech. – 2009. – №76. – P. 1771 – 1784.
- [106] Carroll J., Daly S. Fracture, Fatigue, Failure, and Damage Evolution, Volume 5: Proceedings of the 2014 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics. Springer. – 2014. – 252 p.
- [107] Chaboche J. L. Phenomenological aspects of continuum mechanics // In: Theor. and Applied Mechanics. Eds. P. German, M. Pian, D. Gailleri. London: Elsevier Applied Science Publishers. – 1989. – P. 41 – 56.
- [108] Chao Y.J., Zhu X.K., Zhang L. Higher-order asymptotic crack-tip fields in a power-law creeping material // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – V. 38. – №21. – P. 3853 – 3875.
- [109] Chao Y., Yang S. Higher order crack tip field and its application for fracture of solids under mode II conditions // Engineering Fracture Mechanics. – 1996. – V. 54. – №3. – P. 405 – 422.
- [110] Dean W. R., Montagnon P. E. On the steady motion of viscous liquid in a corner // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1948. – №45. – P. 389 – 395.

- [111] Ehrlacher A., Markenscoff H. Duality, Symmetry and symmetry lost in solid mechanics. Selected works of H.D. Bui. Eds. Paris: Presses des Ponts. – 2011. – 404 p.
- [112] Filler E.R., Jr., Fields R.J., Chuang T.J., Singhai S. Characterization of creep damage in metals using small angle neutron scattering // Journal of Research of the National Bureau of Standards. – 1984. – Vol 89. – №1. – P. 35 – 45.
- [113] Flamant A. Sur la repartition des pressions dans un solide rectangulaire charge transversalement // Comptes Rendus. – 1892. – №114. – P. 1465 – 1468.
- [114] Hayhurst D.R. CDM mechanisms – based modelling of tertiary creep: ability to predict the life of engineering components // Arch. Mech. – 2005. – V. 57. – P. 103–132.
- [115] Hello G., Tahar M. B., Roelandt J. M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – №49. – P. 556 – 566.
- [116] Hui C.Y., Ruina A. Why K. High order singularities and small scale yielding // Int. J. Fracture. – 1995. – V. 72. – P. 97 – 120.
- [117] Hutchinson J. M. Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. №16. P. 337 – 349.
- [118] Hutchinson J. M. Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – №16. – P. 13 – 31.
- [119] Kuna M. Finite Elements in Fracture Mechanics. Theory–Numerics–Applications. Dordrecht: Springer. – P. 2013. – 336.
- [120] Li J., Recho N. Methodes asymptotiques en mecanique de la rupture. Paris: Hermes Science Publications. – P. 2002. – 262.
- [121] Liao S. Beyond Perturbation. Introduction to the homotopy analysis method. Boca Raton, London, New York, Washington: Charman and Hall. – 2004. – 336 p.

- [122] Loghin A., Zhang N., Joseph P. A nonlinear finite element eigenanalysis of antiplane shear including higher order terms // Engineering Fracture Mechanics. 2000. V. 66. №5. P. 441 – 454.
- [123] Meng, L., Lee S.B. Eigenspectra and orders of singularity at a crack tip for a power-law creeping medium // Int. J. of Fracture. – 1998. V.92. – P. 55 – 70.
- [124] Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Dordrecht:Springer. – 2012. – 423 p.
- [125] Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – №37. – P. 6203 – 6220.
- [126] Murakami S., Liu Y., Mizuno M. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2000. – №183. – P. 15 – 33.
- [127] Natarajan S., Song C., Belouettar S. Numerical evaluation of stress intensity factors and T-stress for interfacial cracks and cracks terminating at the interface without asymptotic enrichment // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2014. – V. 279. – P. 86 – 112.
- [128] Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. New York: John Wiley and Sons. – 1995. – 704 p.
- [129] Nayfeh A.H. Perturbation Methods. New York: Wiley. – 2000. – 437 p.
- [130] Nayfeh A.H. The Method of Normal Forms. New York: Wiley – VCH. – 2011. – 342 p.
- [131] Niu Z., Cheng C., Recho N. A new boundary element approach of modelling singular stress fields of plane V-notch problems // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – №46. – 2999 – 3008 p.
- [132] Rahman S., Mohammad E. Effects of mixed-mode overloading on the mixed-mode I+II fatigue crack growth // Springer. – 2013. – P. 987 – 1000.

- [133] Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – №16. – P. 1 – 12.
- [134] Rice J.R. Mathematical analysis in mechanics of fracture // Fracture. V. 2, Ed. H. Liebowitz. New York: Academic Press. – 1968. – P. 191 – 311.
- [135] Rice J.R. Stresses due to a sharp notch in a work-hardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1967. – V. 34. – P. 287 – 298 (Имеется русский перевод: Тр. Амер. об-ва инж.-механ. сер. E. – 1967. – №2. – P. 32 – 46).
- [136] Riedel H. Fracture at High Temperatures. Berlin: Springer. – 1987. – 418 p.
- [137] Shih C.F. Small scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems // Fracture Analysis ASTM STP 560. – 1974. – P. 187 – 210.
- [138] Shih C.F. Elastic – plastic analysis of combined mode crack problems. Ph.D. Thesis. Cambridge: Harvard University. – 1973.
- [139] Shlyannikov V., Tumanov A. Characterization of crack tip stress fields in test specimens using mode mixity parameters // International Journal of Fracture. – 2014. – T. 185. – №1–2. – C. 49–76.
- [140] Shlyannikov V.N., Shanyavskiy A.A. Peculiarities of mixed modes I+II crack growth rate of titanium alloy // Труды Академэнерго. – 2013. – №4. – C. 83–90.
- [141] Shlyannikov V.N. Elastic-Plastic Mixed-Mode Fracture Criteria and Parameters. Berlin: Springer. – 2003. – 246 p.
- [142] Sih G. C., Tang X. S. Weak and strong singularities reflecting multiscale damage: microboundary conditions for free-free, fixed-fixed and free-fixed constraints // TAFM. – 2005. – №43. – P. 1-58.
- [143] Sih G. C., Tang X. S. Simultaneity of multiscaling for macro-meso-micro damage model represented by strong singularities // TAFM. – 2004. – №42. – P. 199 – 225.

- [144] Sih G. C. Crack tip mechanics based on progressive damage of arrow: Hierarchy of singularities and multiscale segment // TAFM. – 2009. – №51. – P. 11–32.
- [145] Stepanova L., Yakovleva E. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2015. – V. 10. – №3. – P. 367–393.
- [146] Stepanova L.V., Adulina E.M. Self-similar solutions to the creep crack problem in a damaged medium under mixed loading conditions// Procedia Materials Science. – 2014. – Vol. 3C. – P. 948 – 954.
- [147] Stepanova L.V., Igonin S.A. Perturbation method for solving the nonlinear eigenvalue problem arising from fatigue crack growth problem in a damaged medium // Applied Mathematical Modelling. – 2014. – T. 38. – №14. – C. 3436 – 3455.
- [148] Stepanova L.V., Igonin S.A. Higher-order asymptotic solution for the fatigue crack growth problem based on continuum damage mechanics // Procedia Materials Science. – 2014. – Vol. 3C. – P. 421 – 427.
- [149] Stepanova L. V. Adylina E. M. Stress – strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2014. – T. 55. – №5. – C. 885–895.
- [150] Stepanova L. V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power – low medium // Comptes Rendus Mechanique. – 2008. – №1–2. – P. 232 – 237
- [151] Tada Hiroshi, Paris Paul C., Irwin George R. The Stress Analysis of Cracks Handbook. New York: ASME Press. –2000. – 696 p.
- [152] Vansovich K.A., Yadrov V.I. Fatigue experiments of steel cruciform specimen with the surface crack under two mode loading // Omsk scientific vestnik. – 2012. – №3-113. – P. 117 – 121.

- [153] Vansovich K.A., Yadrov V.I. Experimental study of rate of surface crack growth in AK6 alloy under biaxial loading // Izvestiya of Samara scientific center of Russian Academy of Sciences. – 2012. – V. 15. – №4–2. – p. 436 – 438.
- [154] Voyiadjis G., Handbook of Damage Mechanics. Nano to Macro Scale for Materials and Structures // Springer. – 2015. – 1580 p.
- [155] Wei R.P. Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry. Cambridge: Cambridge University Press. – 2014. – 232 p.
- [156] Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // ASME. J. Appl. Mech. – 1957. – №24. – P. 109 – 114.
- [157] Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions // ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – №74. – P. 526–528.
- [158] Yang S., Yuan F.G., Cai X. Higher order asymptotic elastic – plastic crack-tip fields under antiplane shear // Engineering Fracture Mechanics. – 1996. – V. 54. – P. 405 – 422.
- [159] Yang, S. Analytical forms of higher-order asymptotic elastic-plastic crack-tip fields in a linear hardening material under antiplane shear // Int. J. Fracture. – 1996. – V. 80. – P. 59 – 71.
- [160] Yuan F.G., Yang S. Analytical solutions of fully plastic crack-tip higher order fields under antiplane shear // Int. J. Fracture. – 1995. – V. 69. – P. 1 – 26.