

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт механики сплошных сред
Уральского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Федоров Андрей Юрьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ
В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК УПРУГИХ ТЕЛ

01.02.04 – механика деформируемого твёрдого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор, академик РАН
Матвеев В.П.

Пермь 2016

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Исследование напряжённого состояния в окрестности особых точек упругих тел	33
1.1. Аналитические решения двумерных задач классической теории упругости в окрестности особых точек	33
1.2. Варианты алгоритмов метода конечных элементов для анализа напряжённого состояния в окрестности особых точек	54
1.3. Численный анализ напряжений в окрестности особых точек анизотропных упругих тел	62
1.4. Численный анализ напряжений в окрестности особых точек тел, описываемых моделью несимметричной теории упругости	71
Глава 2. Исследование поведения напряжений в окрестности особых точек упругих тел из функционально-градиентных материалов	77
2.1. Исследование аналитическими методами поведения напряжений в упругих клиновидных телах из функционально-градиентных материалов	77
2.2. Численные исследования напряжений в окрестности особых точек упругих тел из функционально-градиентных материалов	81
Глава 3. Оптимизация геометрии и упругих характеристик материала в окрестности особых точек	100
3.1. Математическая постановка задачи оптимизации геометрии и упругих характеристик материала в окрестности особых точек и её численная реализация	100
3.2. Решение модельных задач оптимизации геометрии и упругих постоянных материалов в окрестности различных вариантов особых точек	108

3.3. Критический анализ стандартов определения прочности клеевых соединений на основе моделирования напряжённого состояния в испытываемых образцах	130
3.4. Совершенствование методов определения прочности клеевых соединений и технологий склеивания на основе использования свойств оптимальных решений в окрестности особых точек	142
3.5. Результаты экспериментов, качественно подтверждающих свойство оптимальных решений в окрестности особых точек	148
Заключение	150
Список литературы	152

Введение

В задачах теории упругости существуют сингулярные решения, обусловленные наличием бесконечных значений напряжений в отдельных точках (линиях) области, называемых особыми. К их числу относятся точки на поверхности тела, в которых нарушается условие гладкости поверхности, меняется тип краевых условий, контактируют различные материалы, или внутренние точки, в которых, например, имеет место нарушение условия гладкости поверхности контакта различных материалов [15, 18, 30, 181].

Особые точки разных типов достаточно часто встречаются в расчётных схемах различных прикладных задач теории упругости. Изучением поведения напряжений в окрестностях особых точек занимаются многие исследователи. Для двумерных и трёхмерных задач линейной теории упругости рассмотрены различные варианты особых точек. Данной проблеме посвящены сотни работ. Достаточно полно результаты, достигнутые в этой области, представлены в зарубежных обзорных работах [146, 165, 166]. Следует отметить, что в этих обзорах отсутствуют многочисленные работы российских механиков, и поэтому они не могут претендовать на корректное отражение вклада конкретных авторов в рассматриваемую проблему. В некоторой степени компенсировать это помогают работы С. Г. Минаковой [26] и Т. О. Накаряковой [28], в которых содержатся подробные литературные обзоры монографий и статей, связанных с рассмотрением и изучением теоретических аспектов проблем построения сингулярных решений для различных задач теории упругости, а также особенностей численной реализации методов исследования напряжений в окрестностях особых точек.

В двумерных задачах наиболее распространённое направление исследований сингулярности напряжений в окрестности особых точек связано

с анализом напряжённого состояния в окрестности вершин клиновидных областей: однородных или составных плоских клиньев, на гранях которых заданы граничные условия (в напряжениях или перемещениях). Аналогично в трёхмерных задачах исследование сингулярности напряжений связано с анализом напряжённого состояния в окрестности точек ребра пространственного клина (который также может быть как однородным, так и составным) и в окрестности вершин однородных и составных конических областей, таких как вершины круговых и некруговых конусов, трёхгранных и многогранных клиньев. Многообразие задач определяется не только геометрией клиновидных или конических областей, но и тем, что на клиновидные и конические области могут быть наложены различные граничные условия, а для составных областей — заданы различные условия контакта между составными частями. Здесь следует добавить, что механические характеристики областей могут соответствовать изотропным, анизотропным и даже функционально-градиентным материалам.

Среди задач построения сингулярных решений в рамках линейной теории упругости большая часть работ посвящена исследованию сингулярности напряжений в окрестности особых точек изотропных тел. Здесь при решении двумерных задач доминировали аналитические подходы. Один из них связан с построением для клиновидной области собственных решений, удовлетворяющих однородным уравнениям равновесия и однородным граничным условиям. В другом подходе на основе преобразования Меллина и теории вычетов решалась задача для бесконечного клина [111]. Хронология появления и развития данных подходов отражена в обзорной работе [146].

Эти подходы приводили задачу исследования собственных решений в вершине соответствующего полубесконечного плоского клина к характеристическому уравнению, которое имеет счётное множество корней. Вид характеристического уравнения в общем случае для составного клина определяется количеством частей клина, краевыми условиями на боковых гранях его частей и условиями взаимодействия на контактных гранях. Получающиеся

относительно показателя сингулярности характеристические уравнения зависят от параметров, определяющих геометрию плоского клина (углы составных частей), и от упругих характеристик частей составного клина. Решаются характеристические уравнения в основном численно. За более чем полувековую историю решения этих задач рассмотрены почти все возможные варианты плоских клиньев (однородные, составные, открытые, замкнутые) при различных граничных условиях на боковых и контактных гранях [1, 9, 51, 73, 74, 77, 79]. Анализ напряжённого состояния в окрестности вершины замкнутого плоского клина с гранями, свободными от напряжений, позволяет оценивать поведение напряжений в окрестности вершины плоской трещины. Известны решения для вершины трещины: в изотропном материале [121, 145], находящейся на границе двух разных материалов [103, 115, 155, 182, 194], выходящей под углом на границу двух разных материалов [1, 99, 192]. Для трещин на границе раздела материалов использован замкнутый составной клин из трёх и более частей, на одной паре соседствующих граней которого заданы нулевые напряжения (нормальные и касательные), а на остальных соседствующих гранях — условия идеального контакта. С увеличением количества частей составного клина растёт как сложность характеристического уравнения, так и количество механических и геометрических параметров, от которых зависят показатели сингулярности, что делает исследование весьма трудоёмким. Это приводит к урезанному параметрическому анализу показателей сингулярности напряжений. Например, в [79] исследовалась сингулярность напряжений в вершинах замкнутых составных клиньев, один из которых состоял из трёх различных материалов и имел пять частей. На одной паре соседствующих граней этого клина были заданы условия свободных от напряжений граней, а на оставшихся четырёх парах — условия идеального контакта. Результаты для такого клина были представлены для фиксированной геометрии в зависимости от отношения модулей двух материалов E_2/E_1 при зафиксированных значениях коэффициентов Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.2$ и отношении модулей $E_3/E_1 = 100$. Примером

преодоления сложности решения характеристического уравнения является работа [161], авторами которой предложен новый метод нахождения собственных значений для составного клина, части которого выполнены из двух или трёх материалов. Предложенный ими метод заключается в приведении характеристического уравнения к виду, содержащему члены при различных степенях величины η , являющейся отношением модулей сдвига двух материалов (первого ко второму). Для клина из двух частей характеристическое уравнение преобразуется к квадратному уравнению относительно η , для клина из четырёх частей — к биквадратному уравнению относительно η . Например, корни $\eta_{1,2}$ квадратного уравнения дают два уравнения, каждое из которых рассматривается и решается отдельно. Корни $\eta_{1,2,3,4}$ биквадратного уравнения дают четыре независимых уравнения более простого вида, чем исходное характеристическое. Кроме описанных сложностей, других трудностей при анализе сингулярных решений в вершинах плоских клиньев, составные части которых имеют изотропные свойства, нет. Иначе обстоит дело, если части клина имеют анизотропные свойства.

Для более сложной плоской задачи анизотропной теории упругости исследования сингулярности напряжений проводились преимущественно теми же методами, что и для изотропных тел. Упомянутые выше аналитические подходы легко адаптируются на случай цилиндрически-ортотропных тел [76, 88, 175], однако для случая прямолинейной анизотропии общего вида возникают сложности, связанные с тем, что в полярной системе координат коэффициенты дифференциальных уравнений становятся переменными. Наличие переменных коэффициентов не позволяет получить явного представления характеристического уравнения и исключает применение подходов, основанных на построении аналитического решения. Данные трудности преодолевались в основном численно [17, 26, 145]. В [17] дифференциальные уравнения для каждой из частей составного клина записываются в слабой форме. Полученная задача решается методом Галёркина, а для аппроксимации решения используется

метод конечных элементов. Это приводит поставленную задачу к алгебраической проблеме отыскания собственных значений и векторов. Похожий подход предложен в [145]. Эти численные и численно-аналитические подходы позволяют получить собственные значения в вершине любого клина с анизотропными свойствами, в том числе и с изотропными, как частный случай.

Гораздо меньше работ посвящено исследованию сингулярности напряжений в окрестности особых точек функционально-градиентных материалов, и ещё меньше — определению показателей сингулярности напряжений в вершинах клиновидных областей с функционально-градиентными свойствами. Функционально-градиентные материалы (ФГМ или просто градиентные материалы) характеризуются изменением свойств материала в пространстве. Следует отметить, что свойства функционально-градиентного материала, изменяясь в пространстве, в конкретной точке функционально-градиентного тела могут быть изотропными или анизотропными. Для изотропных функционально-градиентных тел имеется несколько работ, в которых для получения показателей сингулярности использованы упомянутые выше аналитические подходы. В работе [94], используя метод разделения переменных для бигармонической функции напряжений Эри, исследована сингулярность напряжений в вершине трещины, находящейся в материале с функционально-градиентными свойствами при плоском деформированном состоянии (ПДС) и плоском напряжённом состоянии (ПНС). В этой работе вершина трещины с берегами, свободными от напряжений, совпадает с центром полярной системы координат (r, θ) . Упругие характеристики полубесконечного клина изменяются в радиальном и в угловом направлениях относительно его вершины и представляются в виде степенного ряда Маклорена. Для упрощения алгебраических преобразований коэффициент Пуассона был принят константой, а в виде степенного ряда представлен только модуль Юнга $E(r, \theta)$. Значимый результат этой работы, по мнению её автора, состоит в том, что поведение напряжений в вершине трещины в ФГМ точно такое же, как и в однородном материале, а именно, соответствует виду $r^{-0.5}$, где r — расстояние до вершины трещины, и не зависит от вида функции изменения

модуля Юнга. Единственное ограничение — функция изменения свойств должна быть гладкой. Показатель сингулярности в вершине трещины, находящейся в ФГМ с такой зависимостью свойств, всегда будет равен 0.5. Такой же результат получен и при «гладком» изменении коэффициента Пуассона. В этой работе также отмечено, что J -интегралы J_1 и J_2 , используемые для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для первой и второй моды в вершине трещины в таком ФГМ, совпадают с J -интегралами J_1 и J_2 для трещины в однородном материале с характеристиками первого слагаемого ряда $E(r, \theta) — E_0$. Используя этот же метод разделения переменных, авторы работы [80] исследовали сингулярность напряжений в вершине открытого плоского упругого клина с нерассмотренными ранее другими авторами функционально-градиентными свойствами. Упругие характеристики клина изменяются относительно его вершины лишь в угловом направлении и постоянны в радиальном направлении. Ссылаясь на работу [94], для упрощения алгебраических преобразований коэффициент Пуассона также был принят константой, а в угловом направлении изменялся лишь модуль Юнга $E(\theta)$ по экспоненциальному закону от значения E_1 на одной грани до значения E_2 на другой. Получены показатели сингулярности для такого клина в зависимости от отношения модулей Юнга на берегах клина. Установлено, что для трещины в материале с угловым изменением модуля Юнга показатель сингулярности не может быть меньше 0.5, которое достигается при равенстве модулей Юнга. При стремлении отношения модулей к нулю показатель сингулярности стремится к единице. С середины 90-х годов прошлого столетия стали появляться работы, в которых рассматривается напряжённое состояние в вершине составного клина, одна часть которого имеет функционально-градиентные свойства. Ссылаясь на то, что ФГМ в основном использовались (на тот момент времени) для снижения температурных или остаточных напряжений в соединениях различных материалов (как правило, металла с керамикой), функционально-градиентная часть клина в этих работах имела постоянные модуль Юнга и коэффициент

Пуассона, а функцией от координат являлся коэффициент теплового расширения. Вторая часть составного клина являлась однородной по свойствам, включая коэффициент теплового расширения. В работе [188] с помощью преобразования Меллина исследовались напряжения в вершине такого составного клина с углами 90° при ПДС и ПНС. В работе [80] рассмотрен замкнутый составной клин, две части которого с углами раствора по $\pi/2$ являются однородными с различными модулями Юнга E_1 и E_2 , а у третьей части с углом раствора, равным π , модуль Юнга $E(\theta)$ изменяется по экспоненте между значениями соответствующих модулей однородных частей от E_1 до E_2 . Коэффициенты Пуассона всех частей клина постоянные и равны одному и тому же значению. Между частями составного клина заданы условия идеального контакта. Рассмотрен случай, когда между двумя частями заданы условия классической трещины (нормальные и касательные напряжения на гранях равны нулю). Представленные в работе [80] задачи (и не только) рассмотрены и решены в работе [132] двумя разными методами: точным и приближительным. Первый метод использует собственные функции обыкновенного дифференциального уравнения, полученные после преобразования Меллина. Вторым методом основан на кусочно-однородной аппроксимации функционально-градиентной части клина. Часть из ФГМ заменялась n однородными частями с равными углами раствора. Рассмотрены и сравнены экспоненциальный и линейный законы изменения модуля Юнга $E(\theta)$ от E_1 до E_2 . Показано, что закон изменения модуля Юнга $E(\theta)$ оказывает влияние на значения показателей сингулярности. Также проведено сравнение результатов, полученных обоими методами. Для всех рассмотренных задач этой работы совпадение до четвертого знака после запятой значений показателей сингулярности напряжений, полученных с помощью приближённого метода, наблюдается при $n = 20$. В работе [114] на основе классической теории пластин с помощью метода разложения по собственным функциям получены асимптотические решения и показатели сингулярности для тонкой полубесконечной клиновидной пластины с углом раствора γ и толщиной h

для всех возможных комбинаций трёх типов граничных условий, заданных на боковых гранях (три однородных и три смешанных). Модуль Юнга клиновидной пластины изменялся по степенному закону в направлении, перпендикулярном плоскости клиновидной пластины, то есть по толщине, при этом являясь постоянным в плоскости клиновидной пластины. Коэффициент Пуассона являлся постоянным.

Для анизотропных функционально-градиентных тел имеется немало количество работ, в которых численными методами исследуется напряжённое состояние в окрестности особых точек с целью вычисления КИНов. Однако работ, посвященных определению показателей сингулярности напряжений в окрестности особых точек анизотропных функционально-градиентных тел, не обнаружено.

Как было упомянуто выше, исследование сингулярности напряжений в окрестности особых точек в трёхмерных задачах связано с анализом напряжённого состояния в окрестности точек ребра пространственного клина (который может быть однородным или составным) и в окрестности вершин однородных и составных конических областей. В общем случае ребро пространственного клина имеет вид пространственной кривой, при этом угол раствора клина может меняться вдоль ребра. К вершинам однородных и составных конических областей относится бесконечное множество объектов. В качестве примеров можно перечислить из них лишь наиболее распространённые и полезные с практической точки зрения: вершина многогранного клина; вершина конуса (кругового, некругового); вершина пространственной трещины — плоской (в том числе клиновидной), неплоской; общая вершина нескольких пересекающихся пространственных трещин. Следует отметить, что в совокупности с различными вариантами граничных условий область возможных трёхмерных задач о сингулярности напряжений в окрестности особых точек значительна.

При решении трёхмерных задач о сингулярности напряжений в подавляющем большинстве используются различные варианты численных методов, в основном методы конечных и граничных элементов. Аналитическими

методами была исследована сингулярность напряжений в точках ребра пространственного клина [27] и в вершинах осесимметричных конических областей — круговые конусы (однородные [4, 31, 125] и составные [31, 153]). Среди неосесимметричных конических областей аналитическими методами сингулярность напряжений исследована в вершинах лишь некоторых однородных изотропных конфигураций: вершина трёхгранного клина с равными углами [149], вершина клиновидной трещины в однородном упругом материале [150]. В [27] показано, что вид сингулярности напряжений в каждой точке ребра пространственного клина определяют решения плоской и антиплоской задач для вершины плоского клина, полученного при сечении пространственного клина плоскостью, перпендикулярной ребру пространственного клина в этой точке. В работе [123] на примере соединения двух разномодульных усеченных конусов, скрепленных торцами встык, установлено, что для одних и тех же значений упругих характеристик материалов и углов сопряжения показатель сингулярности напряжений при осесимметричной деформации совпадает с показателем сингулярности напряжений аналогичной двумерной задачи при ПДС.

Известные варианты численных методов [144] позволяют решать задачи о сингулярности напряжений в окрестности вершин любых однородных и составных конических областей с изотропными свойствами и любыми краевыми условиями, однако в литературе представлены результаты для простых конфигураций и нескольких краевых условий. Для сложных объектов, таких как точка пересечения фронтов трёхмерных трещин, результатов представлено мало, и в подавляющем большинстве на берегах трещин рассмотрены только условия свободы от нагрузок. В [14] исследована сингулярность напряжений в вершине клиновидной трещины с различными условиями на берегах и в общей вершине пересечения двух клиновидных трещин с различными условиями на берегах, однако для пересечения двух трещин результаты приведены для условий свободы от нагрузок. Некоторые из этих численных методов могут быть адаптированы на случай анизотропии специального вида. Несмотря на то, что часть методов [92] позволяют получить собственные значения для вершин однородных и составных

конических областей с анизотропными свойствами общего вида, результаты представлены для некоторых простых конфигураций (и некоторых краевых условий): вершина плоской трещины в упругом полупространстве, фронт которой выходит перпендикулярно поверхности полупространства [144]; общая вершина трёх различных материалов на поверхности составного полупространства [144, 145]. Результатов для вершин однородных и составных конических областей с функционально-градиентными свойствами не обнаружено.

Кроме задач с упругими напряжениями, встречаются задачи с их аналогами, например, температурными напряжениями [140, 164]. А в работе [106] исследуются концентрации напряжений в вершине составного клина, состоящего из двух изотропных диэлектрических ферромагнитных материалов и погружённого в статическое магнитное поле. Показано, что магнитная восприимчивость и приложенное магнитное поле оказывают сильное влияние на концентрацию напряжений и концентрацию магнитного поля. Представленные результаты позволяют активно управлять интенсивностью концентрации напряжений через прикладываемое магнитное поле.

Наряду с исследованиями в рамках линейной теории упругости, задачи построения сингулярных решений рассматриваются и на основе различных вариантов упругих и неупругих моделей, в том числе, моделей несимметричной теории упругости [86, 139]. В работах Л. В. Степановой и Е. М. Яковлевой приведены аналитические и численные решения нелинейной задачи на собственные значения в окрестности вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями: в [43] — вблизи вершины трещины антиплоского сдвига, в [44] — вблизи вершины трещины в условиях смешанного нагружения (нормальный отрыв и поперечный сдвиг), в [53] — вблизи вершины трещины поперечного сдвига в условиях ПНС. В работе [143] представлены решения для задачи изгиба пластин в рамках теории, разработанной Грином и Нахди, в которой учитываются моментные напряжения. В частности, рассматривается задача о полубесконечной пластине под действием распределенной нагрузки, для решения которой использовался метод

интегральных преобразований. Показано, что вычисленные в рамках модели моментной теории упругости напряжения имеют тот же порядок, что и в теории пластин Рейснера, однако структура входящих в решение сингулярных функций меняется. В [191] рассматриваемая теория разрушения Гриффитса обобщена на случай микрополярного континуума. Определен порядок сингулярности напряжений в вершине фрактальной трещины в рамках модели континуума Коссера с использованием асимптотического метода и метода размерного анализа. Было показано, что в вершине трещины как в классической, так и в несимметричной теориях упругости поведение напряжений соответствует виду $r^{-0.5}$, где r — расстояние до вершины трещины. В ряде работ [134, 148] проводится анализ сингулярности напряжений при исследовании краевых и винтовых дислокаций в бесконечной области.

Обобщая результаты анализа литературы, посвященной исследованию сингулярности напряжений в окрестности особых точек, можно отметить наличие «белых пятен» как для двумерных, так и для трёхмерных упругих тел. В первую очередь это касается исследования сингулярности напряжений в функционально-градиентных материалах, особенно для трёхмерных тел. Сюда же можно отнести задачи построения сингулярных решений на основе неклассических вариантов упругих и неупругих моделей, в том числе, моделей несимметричной теории упругости.

Сингулярность и связанные с ней бесконечные значения напряжений появляются в идеализированной модели реального объекта, рассматриваемой в рамках линейной теории упругости. Такая модель позволяет получить численное решение рассматриваемой задачи. Сингулярное решение, как правило, показывает, что в моделируемом объекте имеются зоны с чётко выраженной концентрацией напряжений. Имеется большое количество работ, экспериментально демонстрирующих, что в реальных упругих телах в окрестности мест, соответствующих особым точкам, в которых выполнены условия наличия сингулярности, реализуется сильная концентрация напряжений. Используемые в этих работах эксперименты основаны на оптических методах,

применяемых в основном для экспериментального определения коэффициентов интенсивности напряжений и измерения деформаций в окрестности вершин трещин при различных условиях нагружения. В качестве примеров можно перечислить некоторые из работ, классифицируя их как по применяемым методам, так и по объектам исследования (типам особых точек). Методы фотоупругости использованы в [81, 89, 100, 168, 169]; методы муара — в [84]; муаровая интерферометрия — в [116, 120, 157, 173]; метод теневых полос (метод каустик) — в [119, 152, 156, 157, 173, 174]; наиболее распространенный в настоящее время в зарубежной литературе Coherent Gradient Sensing (CGS) Method, имеющий преимущества муаровой интерферометрии и метода каустик, использован в [85, 123, 128, 129, 133, 156, 158, 169, 176–179, 186, 190].

В большинстве работ с помощью перечисленных оптических методов авторы исследовали напряжённое состояние в реальных упругих телах в окрестности вершин трещин (при различных условиях нагружения): в однородных материалах [89, 100, 116, 119, 120, 156, 157, 168, 174, 176, 178]; на поверхности адгезионного контакта двух различных однородных материалов [123, 129, 169, 176, 177, 179]; в однонаправленных композитах в окрестности вершин трещин, распространяющихся вдоль волокон [85, 128, 133, 176]. Результаты экспериментальных исследований напряжённо-деформированного состояния однородных тел в окрестности вершин клиновидных вырезов с различными углами раствора представлены в [152, 190]; в окрестности приложения сосредоточенной нагрузки к упругому полупространству — в [119, 173, 186]; в окрестности краёв поверхности контакта жёсткого прямоугольного индентора с упругим полупространством, выполненным как из изотропных материалов, так и из однонаправленных композитов, — в [158]. Все эти работы демонстрируют наличие зон ярко выраженной концентрации напряжений в окрестности различных типов особых точек, в которых имеют место сингулярные решения. Таким образом, сингулярные решения, полученные при моделировании реальных упругих тел, являются индикатором наличия в них зон сильной концентрации напряжений.

Напряжённое состояние в окрестности особых точек зависит от:

- 1) параметров, определяющих геометрию упругого тела в окрестности особых точек;
- 2) механических характеристик материала(ов) в окрестности особых точек;
- 3) схемы приложения внешней нагрузки.

Безотносительно типа концентрации напряжений — сингулярная или несингулярная — для её устранения в упругих телах используют различные подходы, берущие свое начало при решении конкретных практических задач. Для случая несингулярной концентрации приложением результата решения задачи Кирша явилось усиление окрестности круговых отверстий, в частности, иллюминаторов морских и речных судов, например, за счёт увеличения толщины стального корпуса в окрестности иллюминаторов. Один из известных вариантов снижения уровня напряжений в конструкциях, имеющих зоны концентрации напряжений, связан с изменением формы поверхности в окрестности этих зон. Примером таких изменений служат различные конструктивные решения: галтели, выточки, скругления и другие. Отсюда возникает задача выбора такого технического решения, которое бы обеспечивало наилучшее снижение напряжений в заданной области или конструкции в целом. Возможные материальные и временные затраты, связанные с поиском такого решения экспериментальным путём, делают актуальным другой путь решения этой задачи — математическое моделирование. Развитием данного подхода явилась математическая постановка задач оптимизации формы поверхности, при которой напряжённое состояние удовлетворяет заданному прочностному критерию, либо возникающие напряжения являются минимальными из всех возможных конструктивных решений [3].

Известно огромное количество работ, направленных на улучшение характеристик конструкций или элементов конструкций посредством численной оптимизации их геометрии. Предысторией поиска оптимальных геометрий был поиск оптимальных размеров конструкции. Тут в качестве конструктивных переменных оптимизационной задачи использовались параметры, определяющие размеры конструкций: толщины, длины, площадь поперечного сечения, которые

не требовали изменения конечно-элементной модели конструкции в ходе оптимизации. Такой вид оптимизации более прост, чем в случае, когда в качестве конструктивных переменных выступают параметры, управляющие геометрией конструкции, что, как правило, требует изменения конечно-элементной модели в процессе оптимизации. Однако изменение формы более эффективно, чем изменение размеров.

В обзорных статьях [104, 113, 126] авторы сосредотачиваются на трудностях, с которыми сталкиваются исследователи при оптимизации формы конструкций, и ограничиваются рассмотрением работ, в которых конструктивными переменными задачи оптимизации являются параметры, определяющие форму поверхности двумерных и трёхмерных объектов. Продолжением и дополнением обзора [104] является более поздняя обзорная статья [113] с акцентом на новые работы в этой области за период с 1987 по 1993. В наиболее обширной обзорной статье [126], содержащей в списке процитированных источников 229 работ, внимание сосредоточено на оптимизации формы конструкций в случае использования для расчёта напряжённо-деформированного состояния двух численных методов — метода конечных элементов и метода граничных элементов — для различных задач механики сплошных сред: линейная и нелинейная теории упругости, теория пластин и оболочек, термоупругость, термовязкоупругость, тепловое излучение, динамика упругих систем, собственные частоты, акустика, магнитостатика, стохастические системы. В обзоре всесторонне освещены теоретические и прикладные аспекты оптимизации формы конструкций.

Первоначально для расчёта напряжённо-деформированного состояния при оптимизации формы упругих тел много внимания привлёк метод граничных элементов, благодаря его высокой точности, низким вычислительным затратам и простоте при реализации автоматической генерации сетки. Позже, с увеличением производительности электронно-вычислительной техники, а главное с появлением алгоритмов автоматического разбиения областей

на «почти равносторонние» треугольники и применением их при реализации автоматической генерации сеток, лидирующую позицию для расчёта напряжённо-деформированное состояния при оптимизации формы упругих тел занял метод конечных элементов. Метод граничных элементов при оптимизации формы упругих тел использован в [160, 167, 183, 187, 189], метод конечных элементов — в [141, 142, 151]. Справедливости ради следует отметить, что ряд авторов [72, 122] при решении некоторых нелинейных задач для расчёта напряжённо-деформированного состояния в ходе оптимизации использовали бессеточные методы, являющиеся близкими к методу конечных элементов. О появлении и развитии бессеточных численных методов, а также с классификацией работ, использующих бессеточные методы при решении различных (в том числе и оптимизационных) задач строительной механики и механики разрушения, можно ознакомиться в обзорной статье [91].

Большинство приложений вышеупомянутых численных методов при оптимизации формы упругих тел ограничиваются задачами, в которых сингулярность напряжений отсутствует. Первые оптимизационные задачи с сингулярностью, хоть и не упоминали о сингулярности напрямую, но были направлены на устранение сингулярной концентрации напряжений, вызванной, например, нарушением гладкости боковой поверхности однородных тел. Так, в [167] поставлена и решена задача оптимизационного поиска боковой поверхности перехода между двумя частями однородной пластинки с разной шириной, обеспечивающей минимальный уровень интенсивности касательных напряжений при растяжении. В [151] поставлена и решена задача оптимизационного поиска формы боковой поверхности перехода между двумя частями однородного тела вращения с разными диаметрами, обеспечивающей максимальную прочность при кручении, растяжении и изгибе.

В основном же оптимизационные задачи с сингулярностью напряжений представлены задачами поиска оптимальной геометрии составных тел в окрестности границы поверхности адгезионного контакта двух различных материалов.

Примером приложения методов оптимизации геометрии для составных конструкций служит работа [141], в которой с использованием метода конечных элементов решена задача оптимизации формы соединения встык двух разных материалов — керамики с металлом. В этой работе рассмотрена задача оптимизации геометрии составного тела (в окрестности края поверхности контакта металл–керамика) с учётом наложенных на изменяемую часть геометрии ограничений, которые могут быть обусловлены техническим заданием или соображениями технологичности. Также в работе всесторонне обсуждено понятие «оптимальность решения», однако в качестве целевой функции напрямую использовалось максимальное значение главного напряжения в соединении, которое для исходной геометрии достигалось в особой точке (на краю поверхности контакта металл–керамика). Таким образом, сравнение вариантов геометрии проводилось по величине напряжений, полученных методом конечных элементов в особой точке, что при наличии сингулярности напряжений не вполне корректно, так как в этом случае значения напряжений, полученные в особой точке, определяются степенью конечно-элементной дискретизации. Как следствие, были получены некоторые нежелательные оптимальные геометрии. Следует отметить, что позже авторы осознали эту проблему и сконцентрировались на ней в статье [142], которая стала развитием их предыдущей статьи, но с корректным учётом сингулярности напряжений.

Работы по численной оптимизации формы упругих тел, имеющих особые точки, можно классифицировать на те, в которых уделено должное внимание учёту сингулярности, и те, в которых не уделено. Вышеупомянутый пример наглядно демонстрирует типичную некорректность, возникающую без адекватного учёта сингулярности при численной оптимизации.

Следующий уровень развития идей поиска оптимальных форм, обеспечивающих минимальное напряжённое состояние в упругих телах, отражён появлением работ, связанных с численной оптимизацией формы упругих тел, в которых, наряду с учётом сингулярности, используется анализ поведения

напряжений в окрестности особых точек, выполненный на основе задачи о собственных значениях для плоских клиньев. В первом параграфе первой главы данной диссертационной работы подробно освещены задачи о собственных значениях для плоских клиньев и представлены результаты их решения.

Например, собственные значения для составного клина, боковые грани которого свободны от напряжений, позволяют оценить поведение напряжений в окрестности точки поверхности, где имеет место соединение двух различных материалов. Собственные значения для такого клина зависят от значений углов раствора и механических характеристик его составных частей. Для одного набора значения углов и механических характеристик собственные значения будут таковы, что в окрестности вершины составного клина напряжённое состояние может иметь сингулярный характер, при другом наборе значений не будет возможности для возникновения сингулярности напряжений в вершине клина.

К. С. Чобанян [51] показал и экспериментально доказал, что наборы значений углов и механических свойств, соответствующие несингулярному решению задачи о собственных значениях в вершине составного клина, являющегося частью составного тела, обеспечивают «малонапряжённое состояние в окрестности края поверхности контакта составного тела» за счёт «перераспределения напряжений с поверхности» внутрь тела. Это явление автор назвал «явлением малонапряжённости». Автор утверждает, что «при действии на составное тело общей нагрузки в пространстве параметров задачи всегда имеются области малонапряжённости. Таким образом, почти всегда, когда конструкция позволяет хотя бы в малой окрестности края поверхности контакта составного тела варьировать параметрами задачи, есть возможность устранить сильную концентрацию — бесконечные напряжения. При этом отпадает необходимость интерпретации и учёта в расчётах на прочность степени особенности» напряжений.

Поведение напряжений в окрестности вершин составных плоских клиньев из двух различных изотропных материалов хорошо изучено и отражено в работах

многих исследователей. Большое количество содержащихся в этих работах результатов представлены параллелограммами Дандерса, полученными для конкретных значений углов раствора частей составного клина [73, 75]. Построенные в плоскости параметров Дандерса (механических характеристик материалов частей составного клина) параллелограммы содержат линии равного уровня, каждая из которых определяет комбинации механических характеристик материалов составного клина, при которых будет иметь место соответствующий уровень сингулярности. Для некоторых пар углов составного клина данные соответствующих параллелограммов позволяют выделить область неопасных комбинаций механических характеристик материалов. Позже некоторые исследователи, отметив обилие результатов для фиксированных геометрий, показали важность получения неопасной геометрии для конкретной пары материалов. Для фиксированных значений механических свойств материалов двух частей составного клина можно в плоскости величин углов раствора его составных частей построить кривую, разделяющую её на две подобласти — где возможно сингулярное решение и где невозможно (область малонапряжённости).

Применение анализа напряжений в окрестности особых точек, выполненного на основе решения задачи о собственных значениях для плоских клиньев, позволило как избегать сингулярности напряжений и вести оптимизацию исключительно в области малонапряжённости (несингулярного решения), так и наоборот, адекватно оптимизировать и находить наилучший вариант среди наборов параметров из области сингулярного решения. В [112] на примере бесклевого соединения двух материалов внахлёстку, находящегося под действием равномерной растягивающей нагрузки, заданной на торцах соединения, продемонстрирована возможность корректной оптимизации геометрии в окрестности особых точек соединения, когда нет сингулярности и когда сингулярность имеет место. В первом случае в качестве целевой функции использовалось максимальное значение касательного напряжения на поверхности контакта, во втором — максимальное значение нормализованных коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности особых точек.

В [16] В. П. Матвеев была поставлена и решена задача оптимизации свободной торцевой поверхности полого цилиндра, жёстко закреплённого по внешней боковой поверхности, обеспечивающей наименьший уровень напряжений. В зависимости от коэффициента Пуассона материала цилиндра получены соответствующие оптимальные углы сопряжения свободной торцевой поверхности. Но главное, было замечено, что оптимальный угол γ и соответствующий ему коэффициент Пуассона ν лежат на кривой, построенной для плоского однородного клина, одна грань которого неподвижна, а вторая свободна от напряжений, и которая разделяет область значений γ и ν на две подобласти — где решения содержат или не содержат сингулярность напряжений. В результате возникло предположение, что и для других задач оптимизации геометрии упругих тел в окрестности особых точек параметры оптимальных геометрий могут принадлежать границе, разделяющей области решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений. Позже оно получило подтверждение в работах с соавторами [2, 3] при решении задач об определении формы поверхности сопряжения плоского и осесимметричного тела с жёсткой неподвижной стенкой. В [3] показано, что полученные для ряда оптимизационных задач оптимальные геометрии в окрестности особых точек упругих тел обладают этим общим свойством, которое было сформулировано следующим образом: оптимальные параметры задачи (углы, образуемые проведёнными из особой точки касательными к поверхности упругого тела, в совокупности со значениями упругих постоянных) дают точку, которая принадлежит границе, разделяющей области решения с сингулярностью и без сингулярности (малонапряжённости) для соответствующей задачи о клиновидной области. Установлено, что указанное свойство оптимальных поверхностей является их ключевой характеристикой, и его применение позволяет в рамках допустимой области изменения геометрии построить поверхность, достаточно близкую к оптимальной, не решая оптимизационной задачи. Вместе с тем эти исследования не получили развития: для составных тел, для оптимизации механических характеристик материалов, в том числе, с функционально-градиентными свойствами.

Подобные задачи оптимизации стали особенно актуальны с развитием космонавтики, военной авиации и ракетостроения, где методы соединения листовых материалов получили стремительное развитие. Эти методы позволяют скреплять новейшие материалы, которые могут быть разнородными, плохо свариваемыми или иметь покрытие (краска, лак, грунтовка и так далее) [109, 110]. Одним из таких методов является склеивание, которое обеспечивает непрерывное распределение напряжений по всей поверхности соединения.

Склеивание, как один из традиционных методов скрепления, используется в течение многих веков. Однако теоретические основы и технология склеивания получили значительное развитие лишь в последние 70 лет [58, 124, 134, 138]. Клеевые соединения являются элементами многих конструкций. Львиная доля использования клеевых соединений приходится на различные отрасли промышленности, такие как судостроение, авиационная промышленность, ракетно-космическая отрасль, автомобилестроение, робототехника, электроника, промышленность строительных материалов, лёгкая промышленность. Такое широкомасштабное применение клеевых соединений объясняется простотой их изготовления, низкими материальными и временными затратами, высокой коррозионной и усталостной стойкостью, трещиностойкостью, хорошими характеристиками демпфирования, меньшим весом по сравнению с другими методами скрепления. В качестве примера можно упомянуть о наблюдавшемся вплоть до 2009 года интенсивном увеличении спроса на клеи, применяющиеся в автомобилестроении. Тогда среднее потребление клеев и герметиков составило приблизительно 20 кг на одно транспортное средство [108]. А в авиакосмической области всё больше количество клеев используется в гражданской авиации, достигая наибольшего уровня в новых авиалайнерах Boeing 787 Dreamliner и Airbus A350, которые более чем на половину изготовлены из клеевых структур (композиционных материалов) [170].

Прочностные свойства клеевых конструкций в значительной мере определяются прочностью их клеевых соединений. Механические свойства клеевого соединения можно получить как аналитическим путём, так

и экспериментальным (численным или натурным). Чтобы получить быстрое и простое решение, подходит аналитическое исследование. Ещё в конце 30-х годов прошлого столетия было известно, что для клеевых соединений внахлестку концентрации напряжений в клеевом слое являются результатом различий модулей упругости и резких изменений толщин как склеиваемых материалов, так и клеевого слоя. В работе [180] для объяснения неоднородности распределения касательных напряжений вдоль клеевой прослойки, автор предложил модель сдвигового запаздывания — модель Волькерсена. Эта модель считается исторически первой и наиболее простой. Главное предположение этой аналитической работы состоит в том, что клей работает только на сдвиг, то есть в нём реализуются только сдвиговые деформации, а склеиваемые материалы — только на растяжение. Модель Волькерсена также предполагает, что клей и склеиваемые материалы линейно-упругие.

Впервые возможность поворота склеиваемых материалов была учтена в работе Голанда и Рейсснера [102], где введён коэффициент изгибающего момента, связывающий изгибающий момент на конце склеиваемого материала с прикладываемой нагрузкой.

В работе Корнелла [82] для определения напряжённого состояния в соединениях внахлестку был представлен расширенный вариант модели Голанда–Рейсснера. Автор предполагает, что в соединениях внахлестку скрепляемые пластины ведут себя как простая балка, а более податливый клеевой слой — как бесконечное число пружин, работающих на растяжение и сдвиг. Большой объём работ о клеевых соединениях с позиции механики сплошных сред проделал Хат-Смит [54–56]. Его метод является развитием анализа сдвигового запаздывания Волькерсена и двух теорий Голанда и Рейсснера. Основным принципом проектирования после работ Хат-Смита стало то, что клей не должен быть слабым звеном. А так как отрывные напряжения, как правило, возникают на концах области контакта, они должны быть уменьшены — либо путём изменения геометрии склеиваемых материалов, либо изменения геометрии клеевого слоя, либо и то и другое.

С подробной историей развития и сравнительным анализом аналитических моделей клеевых соединений можно ознакомиться в обзорных работах [101, 117, 147].

Прочностные свойства клеевых соединений зависят не только от геометрии, но и от граничных условий. Увеличение сложности геометрии и переход к трёхмерной постановке усложняют получение полной системы определяющих уравнений для предсказания механических свойств клеевых соединений. Кроме того, появление нелинейности, вызванной учётом пластичности, делает анализ крайне сложным в аналитической постановке. Экспериментальный путь часто является трудоёмким и дорогостоящим. Чтобы преодолеть эти трудности, с 1970-х годов при анализе напряжённого состояния клеевых соединений стал доминировать метод конечных элементов.

В области конечно-элементного анализа клеевых соединений основополагающий труд проделан Р. Д. Адамсом с соавторами [59, 60, 87]. Коллективом выполнен конечно-элементный анализ различных клеевых соединений, таких как соединения внахлёстку [60], трубчатые соединения внахлёстку [61], соединения встык [62], соединения в косой стык [57]. Они также провели упругопластический и нелинейный конечно-элементный анализ клеевых соединений [87, 105]. Их работы придали импульс к развитию конечно-элементного анализа клеевых соединений.

За эти и последующие годы многими авторами было выполнено большое количество работ по конечно-элементному анализу различных типов клеевых соединений. Работы, связанные с использованием метода конечных элементов для анализа и моделирования клеевых соединений, объединены в обзорах [135, 137]. В работах [68, 69] приводятся обширные литературные обзоры относительно клеевых соединений разнородных материалов. В работе [70] представлен обширный обзор исследований клеевых соединений композиционных материалов.

Современные успехи, касающиеся конечно-элементного анализа клеевых соединений, представлены в обзорной статье [108], затрагивающей 210 работ,

из которых 185 опубликованы с 2006 по 2011 год. Автор классифицировал работы по типу рассматриваемых проблем (анализ при статическом и усталостном нагружении, исследование поведения клеевых соединений в окружающей среде и их динамических характеристик) и выделил основные научные центры, занимающиеся исследованием клеевых соединений методом конечных элементов и имеющие некоторые успехи в этой области: Erciyes University в Турции, University of Porto в Португалии, японский Hiroshima University, канадский Dalhousie University, University of Surrey в Англии, китайский China Three Gorges University и так далее. В статье [71] дан обзор современных тенденций и нововведений при использовании «умных» («smart») технологий склеивания. Статья знакомит читателя с первыми результатами применения самовосстанавливающихся материалов, теплорасширяемых частиц и наночастиц, в том числе и в клеях, и с их потенциальными возможностями в увеличении надёжности клеевых соединений.

Анализ литературы показал, что все существующие способы, методы и технологические приемы, направленные на увеличение прочности клеевых соединений, связаны с изменением геометрии и(или) механических свойств клеевых соединений вблизи краёв клеевого слоя. Например, одно из направлений уменьшения напряжений в клеевых соединениях внахлестку связано с изменением формы внешней поверхности клеевого слоя на концах области контакта (формирование клеевой выжимки). Для соединения внахлестку с прямым торцом клеевого слоя, полученным в результате тщательного удаления излишков клея с краёв области контакта, имеет место сильная концентрация напряжений на концах области контакта. В ряде работ [59, 60, 63, 87, 93, 130, 172, 193] показано, что использование выжимок на концах области контакта клеевых соединений уменьшает концентрацию напряжений как в клее, так и в склеиваемых материалах. При этом, как правило, рассматривается только одна форма выжимки. Исключением является работа [130], в которой проведён сравнительный анализ различных форм выжимок. Заметим, что в выводах [130] о влиянии формы выжимки на уровень напряжений в клеевых соединениях

отмечается определяющая роль угла присоединения свободной поверхности клеевой выжимки к склеиваемому материалу. В то же время отсутствует заключение об оптимальности формы клеевой выжимки, дающей наибольшее снижение уровня напряжений, и эффективности этого и остальных рассмотренных вариантов для клеевых соединений, выполненных из других склеиваемых материалов и клеев. С позиции задачи о сингулярности напряжений в окрестности особых точек для рассматриваемых в [130] упругих характеристик склеиваемых материалов и клея большая часть форм клеевых выжимок лишь в той или иной мере снижала концентрацию напряжений, но не устраняла её. Такие же слова можно отнести и ко многим другим предлагаемым в литературе вариантам увеличения прочности клеевых соединений. Здесь ярко проявляется актуальность постановки и решения задачи поиска наилучшего варианта (геометрии и упругих постоянных материалов вблизи краёв поверхности контакта клеевого соединения).

Целью работы является получение новых решений задач о напряжённо-деформированном состоянии в окрестности особых точек упругих тел, в том числе с функционально-градиентными и анизотропными свойствами, с учётом моментного поведения материала; постановка и решение задач оптимизации геометрии и свойств материала в окрестности особых точек упругих тел.

Научная новизна работы состоит в том, что:

1. Получены аналитические и численные решения, позволяющие оценить поведение напряжений в окрестности особых точек упругих тел с функционально-градиентными свойствами.
2. Разработан численный алгоритм, позволяющий получить порядок степенной зависимости напряжений в окрестности особых точек изотропных и анизотропных упругих тел для двумерных и трёхмерных задач классической и несимметричной теорий упругости.
3. Поставлена задача оптимизации геометрии и свойств материала в окрестности особых точек упругих тел и разработан алгоритм её численной реализации.

4. Установлены общие свойства для геометрии и упругих характеристик материала, при которых реализуются оптимальные варианты напряжённого состояния в окрестности особых точек.

Методология и методы исследования. Построение аналитическими методами собственных решений задач теории упругости для клиновидных областей и анализ на их основе поведения напряжений в окрестности особых точек. Разработка и использование алгоритмов метода конечных элементов для решения задач теории упругости при наличии особых точек. Решение оптимизационных задач методами нелинейного математического программирования.

Достоверность полученных результатов подтверждена численными экспериментами по оценке сходимости конечно-элементного алгоритма, сопоставлением с существующими аналитическими решениями, имеющимися исследованиями других авторов и сравнением отдельных результатов с экспериментальными данными.

Практическая значимость определяется использованием алгоритмов, разработанных для решения задачи оптимизации геометрии и свойств материала в окрестности особых точек; применением установленных общих свойств оптимальных решений для снижения концентрации напряжений; рекомендациями по совершенствованию методики определения прочности клеевых соединений.

Апробация работы. Основные положения и результаты, изложенные в диссертации, докладывались на:

- Всероссийской конференции молодых учёных «Неравновесные процессы в сплошных средах» (Пермь, 2009 [37, 38], 2010 [25], 2011 [46, 47], 2012 [50]);
- Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных «Современные проблемы математики и её прикладные аспекты» (Пермь, 2010 [41]);
- VI и VII Российских научно-технических конференциях «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (Екатеринбург, 2010 [39, 40], 2012 [32]);

- Седьмой всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2010 [42]);
- Второй международной конференции по инженерно-технической оптимизации «ENGOPT2010» (Португалия, Лиссабон, 2010 [95]);
- XVII, XVIII, XIX Всероссийских Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2011 [11], 2013 [20], 2015 [48]);
- V Российской научно-технической конференции «Ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 2011 [49]);
- 39-й и 40-й международных летних школах-конференциях «Актуальные проблемы механики» (Россия, Санкт-Петербург, 2011 [96], 2012 [162]);
- Научно-практической конференции молодых учёных «Актуальные проблемы математики, механики, информатики» (Пермь, 2012 [33]);
- I всероссийской научно-технической интернет-конференции студентов и молодых учёных «Прикладная математика, механика и процессы управления» (Пермь, 2013 [35]);
- V Европейской конференции по вычислительной механике «ECCM V» (Испания, Барселона, 2014 [97]);
- Втором Греко-Российском симпозиуме по механике твёрдого тела и разрушению (Греция, Ксанти, 2015 [136]);
- XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015) [24].

Личный вклад автора. Постановки задач (совместно с научным руководителем), численные и аналитические методы исследования поведения напряжений в окрестности особых точек упругих тел из ФГМ, идея алгоритма для получения порядка степенной зависимости напряжений в окрестности особых точек, разработка и реализация программ на ЭВМ, проведение вычислений, анализ результатов.

Структура и объём работы, краткое содержание. Работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы (194 наименования). Работа содержит 82 рисунка и 18 таблиц. Общий объём диссертации составляет 172 страницы.

В **первой** главе приведены математическая постановка задачи о поведении напряжений в вершине составного плоского клина, результаты исследования поведения напряжений в вершинах однородных и составных плоских клиньев на основе аналитических решений в зависимости от угла(ов) раствора (составных частей) и механических характеристик материалов. Выполнены численные эксперименты, подтверждающие, что использование сгущающихся сеток конечных элементов позволяет получить достоверную картину о напряжённом состоянии в окрестности различных типов особых точек. Предложен численный алгоритм оценки вида степенной зависимости напряжений в окрестности особых точек для различных задач теории упругости, позволяющий, в частности, получать новые результаты для анизотропных тел, тел, описываемых моделью несимметричной теории упругости, и трёхмерных тел.

Во **второй** главе аналитическими методами исследовано поведение напряжений в упругих клиновидных телах из функционально-градиентных материалов. Установлено, что поведение напряжений в вершине клина из ФГМ, свойства которого непрерывно изменяются по радиусу, определяется геометрией клина (углом раствора) и значениями упругих характеристик в вершине клина. Проведены численные исследования напряжений в окрестности особых точек упругих тел из функционально-градиентных материалов. Обобщая результаты численных экспериментов, сделан вывод о том, что поведение напряжений в различных вариантах особых точек упругих тел из ФГМ не зависит от варианта непрерывного распределения упругих свойств в окрестности особых точек и определяется их значениями в этих точках.

В **третьей** главе поставлена проблема, связанная с принятием технического решения, обеспечивающего снижение уровня напряжений в зонах концентрации напряжений, приведена математическая постановка задачи выбора оптимального

варианта конструктивного исполнения изделий в окрестности особых точек. Представлены результаты решения модельных задач оптимизации геометрии и упругих постоянных материалов в окрестности различных вариантов особых точек. Приведён обзор действующих на момент написания данной диссертационной работы российских и зарубежных стандартов испытаний на прочность клеевых соединений и адгезионную прочность. Выполнен численный анализ напряжённого состояния в образцах для испытаний на прочность клеевых и адгезионных соединений. На основе решения оптимизационных задач предложены новые формы образцов для испытаний на прочность клеевых и адгезионных соединений.

В **заключении** диссертационной работы сформулированы основные результаты, приведены рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Численный алгоритм, позволяющий получать результаты о поведении напряжений в окрестности особых точек упругих двумерных и трёхмерных тел, выполненных из изотропных и анизотропных материалов, при использовании моделей классической и несимметричной теорий упругости.

2. Аналитические и численные результаты решения задачи о поведении напряжений в окрестности особых точек упругих тел, выполненных из функционально-градиентных материалов.

3. Постановка и алгоритм численной реализации задачи оптимизации геометрии и свойств материала в окрестности особых точек упругих тел.

4. Результаты решения задач оптимизации геометрии и параметров материала в окрестности особых точек упругих тел, в том числе с функционально-градиентными свойствами.

5. Демонстрация эффективности использования установленного свойства оптимальных решений в окрестности особых точек для снижения концентрации напряжений на поверхности соединения различных материалов, в том числе в клеевых и адгезионных соединениях.

Публикации. По теме диссертации опубликована 31 работа [11, 13, 20–25, 32–42, 46–50, 95–98, 136, 162, 163], в том числе 4 статьи в журналах из Перечня ВАК [13, 21–23], 9 статей в прочих журналах, сборниках научных трудов и материалов конференций, 18 тезисов конференций. Публикации [13, 21, 22] входят в базы цитирования Web of Science и Scopus. В данных работах исследования и обработка результатов выполнены диссертантом, обсуждение и анализ результатов осуществлены совместно с научным руководителем и соавторами.

Глава 1. Исследование напряжённого состояния в окрестности особых точек упругих тел

Целью данной главы является обобщение результатов аналитических исследований поведения напряжений в окрестности особых точек различных типов в двумерных задачах теории упругости, в том числе получение результатов, позволяющих найти области решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений в пространстве геометрических параметров и упругих характеристик материала, определяющих эти решения. В качестве особых точек рассматриваются точки нарушения гладкости поверхности тела или границы контакта двух и более материалов, смены типа граничных условий, края поверхности контакта различных материалов. В данной главе также рассматривается численный алгоритм, позволяющий получать результаты о поведении напряжений в окрестности особых точек в двумерных и трёхмерных задачах теории упругости, в том числе для анизотропных тел и тел, описываемых другими вариантами упругих моделей, в частности моделью несимметричной теории упругости.

1.1. Аналитические решения двумерных задач классической теории упругости в окрестности особых точек

В работе [12] показано, что для уравнений линейной теории упругости в окрестности угловых точек имеет место асимптотическое представление

$$\tau \sim \sum_{k=1} K_k \xi_k r^{\lambda_k - 1}, \quad r \rightarrow 0, \quad c < \operatorname{Re} \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_2 < \dots < \operatorname{Re} \lambda_k < \dots \quad (1.1)$$

(или более сложное, с логарифмическими составляющими в случае кратных точек спектра λ_k). Здесь r — расстояние до угловой точки, K_k — коэффициенты интенсивности, ξ_k — функции углового распределения поля напряжения τ в окрестности угловой точки. В плоском случае ξ_k зависят от одной полярной угловой переменной φ , при этом $c=0$, в пространственном — от двух сферических переменных φ, θ при $c=-0.5$.

Для решений вида (1.1) при наличии значений λ_k , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\lambda_k < 1$, напряжения стремятся к бесконечности при $r \rightarrow 0$. Именно эти значения будут определять сингулярное поведение напряжений в окрестности особых точек.

Одно из направлений получения решений вида (1.1) связано с рассмотрением областей специальной конфигурации. В двумерных задачах это плоские однородные или составные клинья. Для трёхмерных задач можно выделить два класса объектов. Первый — это ребро пространственного клина (ребро не обязательно прямолинейное, угол раствора клина может изменяться вдоль ребра), второй — вершина многогранного клина или вершина конуса.

Первая проблема наиболее часто встречается в практических приложениях. В ряде работ, в частности в [27], было показано, что решения задач о плоском деформированном состоянии и антиплоской деформации для клиньев, получаемых в плоскостях, перпендикулярных ребру пространственного клина, определяют вид сингулярности напряжений в точках ребра, через которые проходит соответствующая плоскость (рисунок 1.1). Иными словами, поведение напряжений в окрестности точек ребра пространственного клина определяется решениями двух двумерных задач (плоской и антиплоской деформации).

В настоящей работе для построения решений вида (1.1) используется наиболее распространённый подход, связанный с построением собственных решений для областей специального вида.

Рассмотрим плоскую задачу для клина с углом раствора γ . Клинь может быть однородным (рисунок 1.2, а) или составным (рисунок 1.2, б, в); открытым (рисунок 1.2, а, б) или замкнутым (рисунок 1.2, в). Введём полярную

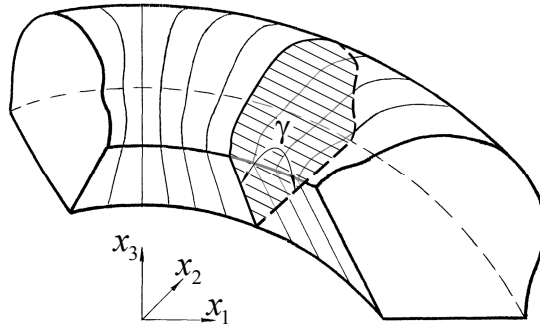


Рисунок 1.1 — Схема пространственного клина и одного из плоских клиньев в сечении, перпендикулярном ребру

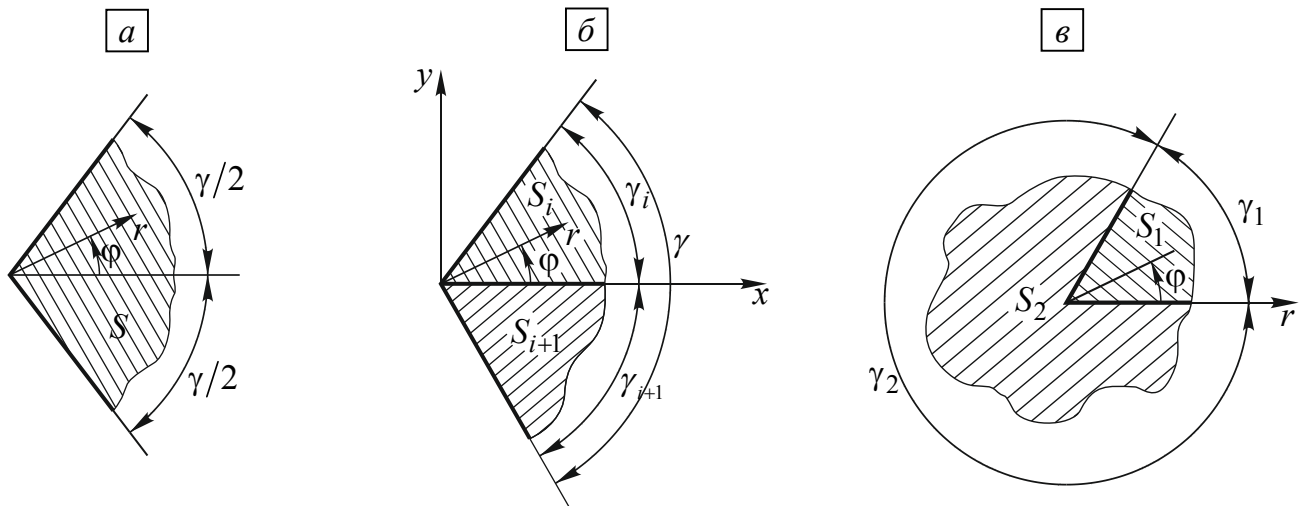


Рисунок 1.2 — Однородные и составные плоские клинья

систему координат (r, φ) с центром в вершине клина. Требуется построить собственные решения для клина $(0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \gamma)$, удовлетворяющие уравнениям равновесия, однородным граничным условиям на боковых гранях и условиям на поверхностях контакта однородных частей.

Собственные решения для однородного плоского клина отыскиваются в виде [181]

$$\bar{u}_i = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \end{Bmatrix} = r^\lambda \begin{Bmatrix} \xi_r(\varphi) \\ \xi_\varphi(\varphi) \end{Bmatrix}. \quad (1.2)$$

Данные собственные решения совпадают по виду с асимптотическим представлением решения, полученного В. А. Кондратьевым (1.1). Найденные собственные значения позволяют судить о наличии или отсутствии сингулярности напряжений, в частности, собственные значения $\text{Re} \lambda_k < 1$ определяют сингулярное поведение напряжений в окрестности особых точек.

Искомое поле перемещений (1.2) должно удовлетворять дифференциальным уравнениям Ламе:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} + \chi \frac{\partial \theta}{\partial r} &= 0, \\ \nabla^2 u_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \chi \frac{\partial \theta}{r \partial \varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

и одному из следующих вариантов однородных граничных условий на каждой боковой грани:

- неподвижная грань

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0; \quad (1.4a)$$

- грань, свободная от напряжений,

$$\sigma_\varphi = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0; \quad (1.4б)$$

- условия идеального скольжения

$$u_\varphi = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0; \quad (1.4в)$$

- условия сухого трения

$$u_\varphi = 0, \quad \tau_{r\varphi} = K \sigma_\varphi; \quad (1.4г)$$

- условия антисимметрии (пин-поворот, грань — жёсткая створка)

$$u_r = 0, \quad \sigma_\varphi = 0. \quad (1.4д)$$

В (1.2)–(1.4) приняты следующие обозначения:

$\theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}$ — объёмное расширение; $\chi = 1/(1 - 2\nu)$ для плоского деформированного состояния (ПДС); $\chi = (1 + \nu)/(1 - \nu)$ для плоского напряжённого состояния (ПНС); ν — коэффициент Пуассона.

Различные сочетания граничных условий вида (1.4) на боковых гранях охватывают наиболее распространенные расчётные ситуации, возникающие при оценке характера сингулярности напряжений в вершине однородного изотропного клина: две грани свободны от напряжений; две грани жёстко закреплены; одна грань неподвижна, а вторая свободна от напряжений и так далее.

Подстановка (1.2) в (1.3)–(1.4) приводит к задаче Штурма–Лиувилля относительно функций $\xi_r(\varphi)$, $\xi_\varphi(\varphi)$ и параметра λ :

$$\begin{aligned}\xi_r'' + (\lambda^2 - 1)(\chi + 1)\xi_r + (\lambda\chi - \chi - 2)\xi_\varphi' &= 0, \\ (\chi + 1)\xi_\varphi'' + (\lambda^2 - 1)\xi_\varphi + (\lambda\chi + \chi + 2)\xi_r' &= 0.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Граничные условия на боковых гранях (1.4) при этом примут вид:

$$\xi_r = 0, \quad \xi_\varphi = 0;\tag{1.6a}$$

$$(\chi + 1)\xi_\varphi' + (\lambda\chi + \chi - \lambda + 1)\xi_r = 0, \quad \xi_r' + (\lambda - 1)\xi_\varphi = 0;\tag{1.6б}$$

$$\xi_\varphi = 0, \quad \xi_r' + (\lambda - 1)\xi_\varphi = 0;\tag{1.6в}$$

$$\xi_\varphi = 0, \quad \xi_r' + (\lambda - 1)\xi_\varphi - K(\chi + 1)\xi_\varphi' - K(\lambda\chi + \chi - \lambda + 1)\xi_r = 0;\tag{1.6г}$$

$$\xi_r = 0, \quad (\chi + 1)\xi_\varphi' + (\lambda\chi + \chi - \lambda + 1)\xi_r = 0.\tag{1.6д}$$

Общее решение уравнений (1.5) имеет вид [131]

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \xi_r \\ \xi_\varphi \end{Bmatrix} &= c_1 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda + 1)\varphi \\ -\sin(\lambda + 1)\varphi \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} \sin(\lambda + 1)\varphi \\ \cos(\lambda + 1)\varphi \end{Bmatrix} + \\ &+ c_3 \begin{Bmatrix} (\chi - \lambda\chi + 2)\cos(\lambda - 1)\varphi \\ (\chi + \lambda\chi + 2)\sin(\lambda - 1)\varphi \end{Bmatrix} + c_4 \begin{Bmatrix} (-\chi + \lambda\chi - 2)\sin(\lambda - 1)\varphi \\ (\chi + \lambda\chi + 2)\cos(\lambda - 1)\varphi \end{Bmatrix},\end{aligned}\tag{1.7}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные. Для их определения общее решение (1.7) необходимо подставить в соответствующий вариант граничных условий, определяемых соотношениями (1.6). В результате приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно c_j , где $j = \overline{1,4}$.

Из условия существования нетривиального решения (равенства нулю определителя системы уравнений) получаем трансцендентное уравнение относительно λ .

Вопрос о возможности появления или отсутствия сингулярности напряжений в вершине клина решается в зависимости от величины действительных частей корней λ . Если среди множества корней имеется хотя бы один, действительная часть которого меньше единицы, то в вершине клина возможны бесконечные напряжения.

Для составного клина решения в каждой из его однородных частей имеют вид (1.7) и отличаются только значениями упругих постоянных

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \xi_r^i \\ \xi_\varphi^i \end{Bmatrix} &= c_1^i \begin{Bmatrix} \cos(\lambda + 1)\varphi \\ -\sin(\lambda + 1)\varphi \end{Bmatrix} + c_2^i \begin{Bmatrix} \sin(\lambda + 1)\varphi \\ \cos(\lambda + 1)\varphi \end{Bmatrix} + \\ &+ c_3^i \begin{Bmatrix} (\chi_i - \lambda\chi_i + 2) \cos(\lambda - 1)\varphi \\ (\chi_i + \lambda\chi_i + 2) \sin(\lambda - 1)\varphi \end{Bmatrix} + c_4^i \begin{Bmatrix} (-\chi_i + \lambda\chi_i - 2) \sin(\lambda - 1)\varphi \\ (\chi_i + \lambda\chi_i + 2) \cos(\lambda - 1)\varphi \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, k$, k — число составных частей.

Наряду с граничными условиями на внешних боковых гранях составного клина, они должны быть заданы и на поверхности контакта его частей. Наиболее распространённые варианты таких граничных условий соответствуют условиям идеального контакта

$$u_r^i = u_r^{i+1}, \quad u_\varphi^i = u_\varphi^{i+1}, \quad \sigma_\varphi^i = \sigma_\varphi^{i+1}, \quad \tau_{r\varphi}^i = \tau_{r\varphi}^{i+1} \quad (1.9a)$$

или идеального скольжения составных частей клина

$$u_\varphi^i = u_\varphi^{i+1}, \quad \sigma_\varphi^i = \sigma_\varphi^{i+1}, \quad \tau_{r\varphi}^i = 0, \quad \tau_{r\varphi}^{i+1} = 0. \quad (1.9б)$$

В данной работе вместо нереализуемого на практике условия идеального скольжения рассмотрено условие сухого трения

$$u_\varphi^i = u_\varphi^{i+1}, \quad \sigma_\varphi^i = \sigma_\varphi^{i+1}, \quad \tau_{r\varphi}^i = K\sigma_\varphi^{i+1}, \quad \tau_{r\varphi}^{i+1} = K\sigma_\varphi^i. \quad (1.9в)$$

Кроме того, в литературе неоднократно упоминаются следующие варианты граничных условий на поверхности контакта частей составного клина:

- условие «поворота» — постоянный контакт граней без движения вдоль оси r (контакт граней через жёсткую шарнирно закреплённую створку)

$$u_{\varphi}^i = u_{\varphi}^{i+1}, \quad \sigma_{\varphi}^i = \sigma_{\varphi}^{i+1}, \quad u_r^i = 0, \quad u_r^{i+1} = 0; \quad (1.9\Gamma)$$

- условие «расширение-сжатие» — постоянный контакт граней и взаимное движение вдоль оси r без движения вдоль оси φ

$$u_r^i = u_r^{i+1}, \quad \tau_{r\varphi}^i = \tau_{r\varphi}^{i+1}, \quad u_{\varphi}^i = 0, \quad u_{\varphi}^{i+1} = 0; \quad (1.9\Delta)$$

- условие «пин-контакта» — взаимное движение вдоль оси r , независимое движение вдоль оси φ (взаимное движение в радиальном направлении, без контакта при движении в окружном направлении)

$$u_r^i = u_r^{i+1}, \quad \tau_{r\varphi}^i = \tau_{r\varphi}^{i+1}, \quad \sigma_{\varphi}^i = 0, \quad \sigma_{\varphi}^{i+1} = 0. \quad (1.9\epsilon)$$

Граничные условия (1.9а) с учётом структуры решения (1.8) преобразуются к следующему виду

$$\begin{aligned} \xi_r^i &= \xi_r^{i+1}, \quad \xi_{\varphi}^i = \xi_{\varphi}^{i+1}, \quad \xi_r^i + (\lambda - 1)\xi_{\varphi}^i = \xi_r^{i+1} + (\lambda - 1)\xi_{\varphi}^{i+1}, \\ (\chi_i + 1)\xi_{\varphi}^{i+1} + (\lambda\chi_i + \chi_i - \lambda + 1)\xi_r^i &= (\chi_{i+1} + 1)\xi_{\varphi}^{i+1} + (\lambda\chi_{i+1} + \chi_{i+1} - \lambda + 1)\xi_r^{i+1}; \end{aligned} \quad (1.10а)$$

условия (1.9б) примут вид

$$\begin{aligned} (\chi_i + 1)\xi_{\varphi}^{i+1} + (\lambda\chi_i + \chi_i - \lambda + 1)\xi_r^i &= (\chi_{i+1} + 1)\xi_{\varphi}^{i+1} + (\lambda\chi_{i+1} + \chi_{i+1} - \lambda + 1)\xi_r^{i+1}, \\ \xi_{\varphi}^i &= \xi_{\varphi}^{i+1}, \quad \xi_r^i + (\lambda - 1)\xi_{\varphi}^i = 0, \quad \xi_r^{i+1} + (\lambda - 1)\xi_{\varphi}^{i+1} = 0; \end{aligned} \quad (1.10б)$$

условия сухого трения (1.9в) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} (\chi_i + 1)\xi_{\varphi}^{i+1} + (\lambda\chi_i + \chi_i - \lambda + 1)\xi_r^i &= (\chi_{i+1} + 1)\xi_{\varphi}^{i+1} + (\lambda\chi_{i+1} + \chi_{i+1} - \lambda + 1)\xi_r^{i+1}, \\ \xi_{\varphi}^i &= \xi_{\varphi}^{i+1}, \quad \xi_r^i + (\lambda - 1)\xi_{\varphi}^i = K(\chi_{i+1} + 1)\xi_{\varphi}^{i+1} + K(\lambda\chi_{i+1} + \chi_{i+1} - \lambda + 1)\xi_r^{i+1}, \\ \xi_r^{i+1} + (\lambda - 1)\xi_{\varphi}^{i+1} &= K(\chi_i + 1)\xi_{\varphi}^i + K(\lambda\chi_i + \chi_i - \lambda + 1)\xi_r^i; \end{aligned} \quad (1.10в)$$

условия (1.9Г) — к виду

$$\begin{aligned} \xi_{\varphi}^i &= \xi_{\varphi}^{i+1}, & \xi_r^i &= 0, & \xi_r^{i+1} &= 0, \\ (\chi_i + 1)\xi_{\varphi}^{i'} + (\lambda\chi_i + \chi_i - \lambda + 1)\xi_r^i &= (\chi_{i+1} + 1)\xi_{\varphi}^{i+1} + (\lambda\chi_{i+1} + \chi_{i+1} - \lambda + 1)\xi_r^{i+1}; \end{aligned} \quad (1.10Г)$$

условия (1.9д) — к виду

$$\xi_r^i = \xi_r^{i+1}, \quad \xi_r^{i'} + (\lambda - 1)\xi_{\varphi}^i = \xi_r^{i+1} + (\lambda - 1)\xi_{\varphi}^{i+1}, \quad \xi_{\varphi}^i = 0, \quad \xi_{\varphi}^{i+1} = 0; \quad (1.10д)$$

а условия (1.9е) — к виду

$$\begin{aligned} \xi_r^{i'} + (\lambda - 1)\xi_{\varphi}^i &= \xi_r^{i+1} + (\lambda - 1)\xi_{\varphi}^{i+1}, & (\chi_i + 1)\xi_{\varphi}^{i'} + (\lambda\chi_i + \chi_i - \lambda + 1)\xi_r^i &= 0, \\ \xi_r^i = \xi_r^{i+1}, & (\chi_{i+1} + 1)\xi_{\varphi}^{i+1} + (\lambda\chi_{i+1} + \chi_{i+1} - \lambda + 1)\xi_r^{i+1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.10е)$$

Для составного клина произвольные постоянные $c_1^i, c_2^i, c_3^i, c_4^i$ находятся из соответствующего варианта граничных условий, определяемых соотношениями (1.6) и (1.10).

Для полного анализа поведения напряжений на ребре пространственного клина наряду с задачей о ПДС необходимо рассмотреть задачу о поведении напряжений в вершине клина при антиплоской деформации. Рассмотрим пространственный клин, ограниченный двумя полуплоскостями, составляющими между собой угол α . Пусть в этом клине реализуется напряжённое и деформированное состояние специального вида — антиплоская деформация (продольный сдвиг). Под антиплоской деформацией понимается напряжённое состояние в клине, созданное нагрузками, направленными вдоль ребра и постоянными вдоль этого ребра. При этом отлична от нуля только одна компонента вектора перемещения — u_z , параллельная ребру, причём эта компонента постоянна по величине вдоль ребра пространственного клина. Уравнение равновесия в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1.11)$$

Представляя решение, как и в случае плоской деформации, в виде произведения функций

$$u_z = r^\lambda f(\varphi), \quad (1.12)$$

получаем после подстановки (1.11) в (1.7) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\lambda^2 f + f'' = 0,$$

решение которого имеет вид

$$f(\varphi) = c_1 \sin \lambda \varphi + c_2 \cos \lambda \varphi, \quad (1.13)$$

где c_1, c_2 — произвольные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

На боковых гранях граничные условия могут иметь вид:

для неподвижной грани

$$u_z = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0, \quad (1.14a)$$

для грани, свободной от напряжений,

$$\tau_{z\varphi} = 0, \text{ или } \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad f' = 0. \quad (1.14b)$$

Для составного клина решение в каждой из частей клина имеет вид

$$f^i(\varphi) = c_1^i \sin \lambda \varphi + c_2^i \cos \lambda \varphi. \quad (1.15)$$

Дополнительно к граничным условиям на внешних боковых гранях (1.14) должны быть заданы граничные условия на поверхности контакта, которые в случае идеального контакта имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{z\varphi}^i = \tau_{z\varphi}^{i+1}, \text{ или } \frac{\partial u_z^i}{\partial \varphi} = \frac{\partial u_z^{i+1}}{\partial \varphi} &\Rightarrow (f')^i = (f')^{i+1}; \\ u_z^i = u_z^{i+1} &\Rightarrow f^i = f^{i+1}. \end{aligned}$$

Из условия нетривиального решения, как и в предыдущей (плоской) задаче, строится характеристическое уравнение и делается вывод о поведении напряжений в случае антиплоской деформации.

Для практических приложений представляют интерес следующие варианты особых точек: вершина однородного клина при однородных граничных условиях в напряжениях на боковых гранях; вершина однородного клина, одна грань которого неподвижна, а вторая свободна от напряжений; вершина составного изотропного клина, боковые грани которого свободны от напряжений; внутренняя особая точка, в которой нарушается гладкость поверхности контакта (вершина замкнутого составного изотропного клина) (рисунок 1.2, в).

Результаты решения задачи для клина при однородных граничных условиях в напряжениях на боковых гранях позволяют оценить поведение напряжений вблизи точек внешней поверхности однородного тела, где нарушается её гладкость и заданы граничные условия в напряжениях. Для данной задачи трансцендентное уравнение относительно λ имеет вид [45]

$$D(\gamma, \nu, \lambda) = (\lambda \sin \gamma - \sin(\lambda \gamma))(\lambda \sin \gamma + \sin(\lambda \gamma)) = 0, \quad (1.16)$$

где γ — угол раствора клина.

Собственные значения λ_k в этом случае зависят только от угла γ и не зависят от вида напряжённого состояния. На рисунке 1.3, а приведена зависимость собственных значений $\operatorname{Re} \lambda_k < 1$ от угла раствора клина. Кривая 1 соответствует симметричному, а кривая 2 — антисимметричному напряжённому состоянию относительно биссектрисы угла γ .

В случае антиплоской деформации трансцендентное уравнение относительно λ имеет вид

$$D(\gamma, \nu, \lambda) = \lambda^2 \sin(\lambda \gamma) = 0. \quad (1.17)$$

На рисунке 1.3, б приведена зависимость собственных значений $\operatorname{Re} \lambda_k < 1$ от угла раствора клина при антиплоской деформации.

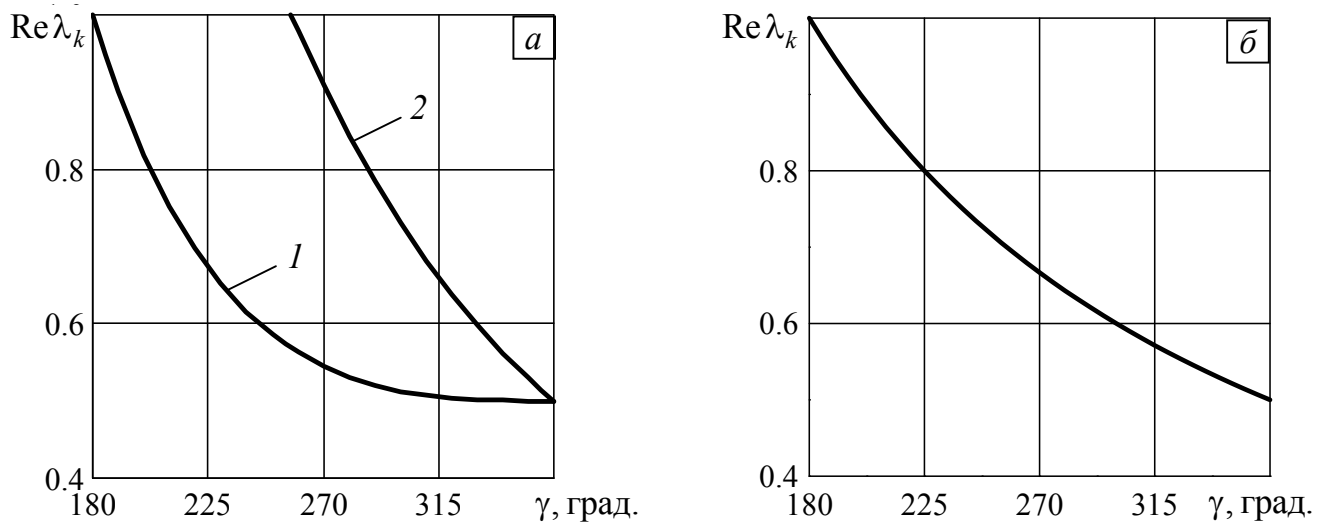


Рисунок 1.3 — Зависимость $Re\lambda_k$ от угла раствора однородного клина с однородными граничными условиями в напряжениях на боковых гранях:

а) плоская задача; б) антиплоская деформация

Решения для клина, одна грань которого неподвижна, а вторая свободна от напряжений, позволяют оценить поведение напряжений в окрестности точек поверхности, где имеет место смена типа краевых условий. В этом случае трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_k имеет вид

$$D(\gamma, \nu, \lambda) = \chi(\lambda^2 - 1) - \chi\lambda^2 \cos 2\gamma - (\chi + 2) \cos 2\lambda\gamma - 2\frac{\chi + 1}{\chi} = 0. \quad (1.18)$$

Здесь собственные значения λ_k отличаются для плоского деформированного и плоского напряжённого состояний и зависят от угла раствора клина γ и коэффициента Пуассона материала ν .

На рисунке 1.4 приведены зависимости значений $Re\lambda_k < 1$ от угла γ для различных значений коэффициента Пуассона при плоском деформированном состоянии. Аналогичные результаты для плоского напряжённого состояния приведены на рисунке 1.5. При представлении значений $Re\lambda_k$ здесь и в дальнейшем, если не оговорено иное, сплошная линия будет соответствовать действительным собственным значениям, а пунктирная — комплексным.

Из рисунков 1.4 и 1.5 видно, что для ПДС при $\gamma < 45^\circ$, а для ПНС при $\gamma < 54.8^\circ$ сингулярность напряжений отсутствует при любых значениях

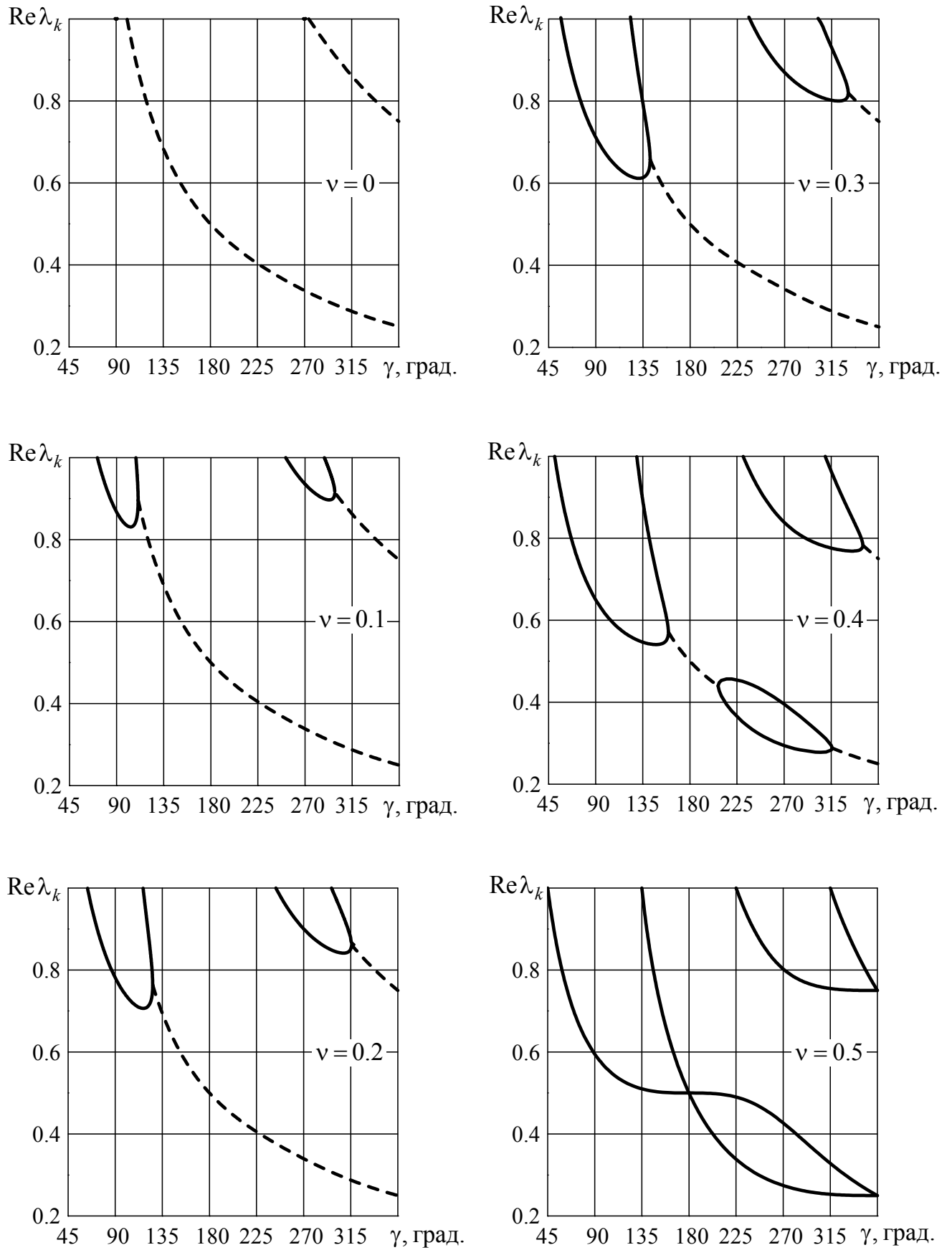


Рисунок 1.4 — Зависимость $\text{Re}\lambda_k$ от угла раствора однородного клина со смешанными граничными условиями на боковых гранях при ПДС для различных значений коэффициента Пуассона

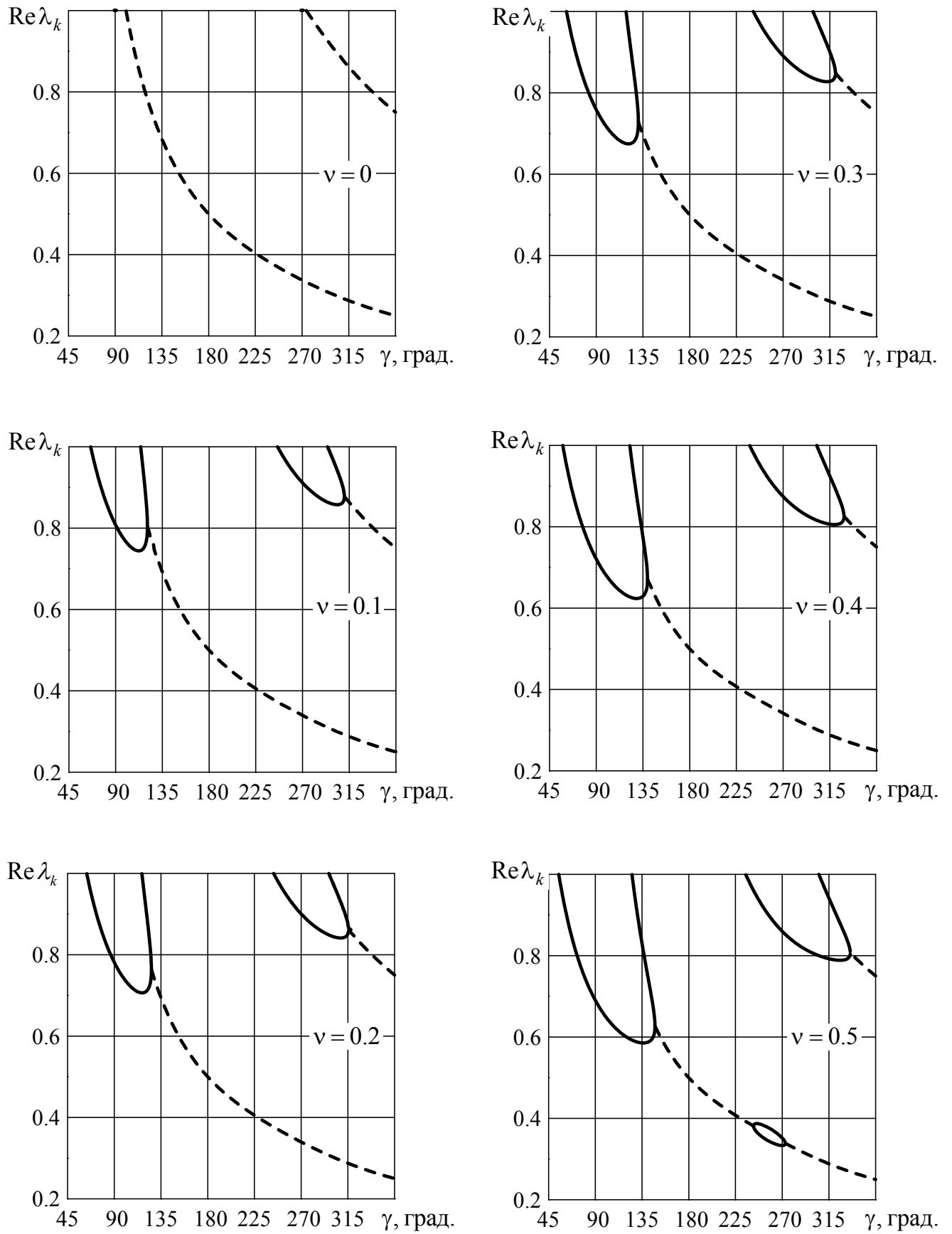


Рисунок 1.5 — Зависимость $\text{Re}\lambda_k$ от угла раствора однородного клина со смешанными граничными условиями на боковых гранях при ПНС для различных значений коэффициента Пуассона

коэффициента Пуассона из полосы $0 \leq \nu \leq 0.5$. Для плоско-деформированного и плоско-напряжённого состояний при $\gamma > 101.3^\circ$ при любых значениях ν из полосы $0 \leq \nu \leq 0.5$ имеется хотя бы один корень с действительной частью, меньшей единицы ($\text{Re}\lambda < 1$). На рисунке 1.6 для плоско-деформированного состояния приведена кривая, разграничивающая области наличия и отсутствия сингулярности напряжений на плоскости параметров (γ, ν) . Для комбинации значений γ, ν , определяемых точками, лежащими ниже и левее кривой, сингулярность напряжений отсутствует, выше и правее — сингулярность напряжений имеет место. Аналогичная кривая для плоско-напряжённого состояния представлена на рисунке 1.7. Здесь на рисунках 1.6 и 1.7 пунктирные участки кривых означают, что разделение решений проходит по комплексным собственным значениям с действительной частью, равной единице ($\text{Re}\lambda = 1$).

В случае антиплоской деформации для клина, одна грань которого неподвижна, а вторая свободна от напряжений, трансцендентное уравнение относительно λ имеет вид

$$D(\gamma, \nu, \lambda) = \lambda \cos(\lambda\gamma) = 0. \quad (1.19)$$

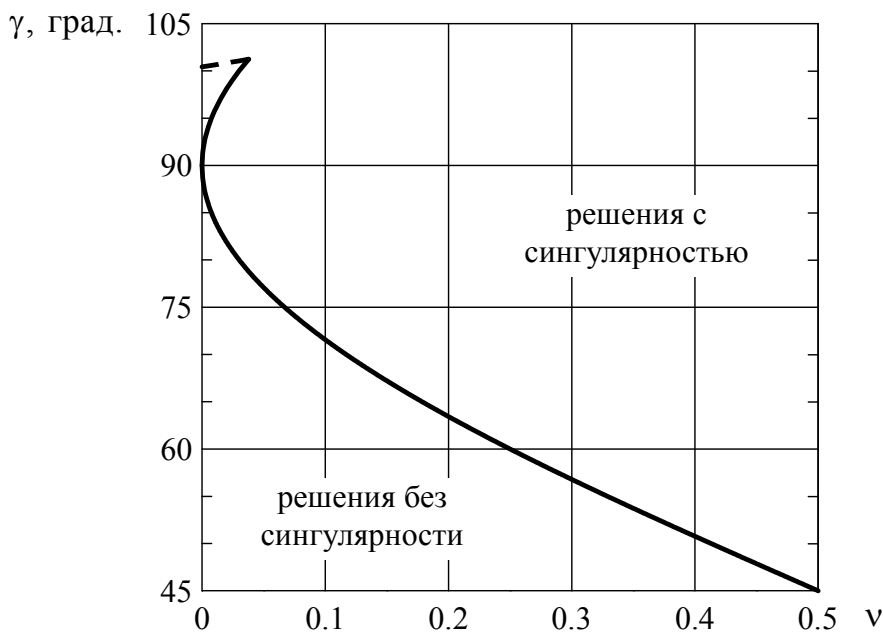


Рисунок 1.6 — Области решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений для ПДС

На рисунке 1.8 приведена зависимость собственных значений $\text{Re}\lambda_k < 1$ от угла раствора клина γ при антиплоской деформации.

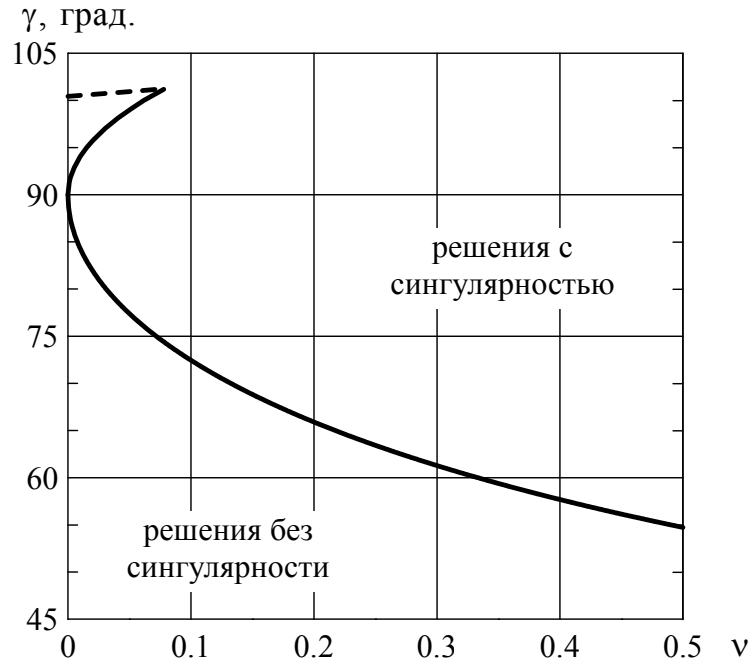


Рисунок 1.7 — Области решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений для ПНС

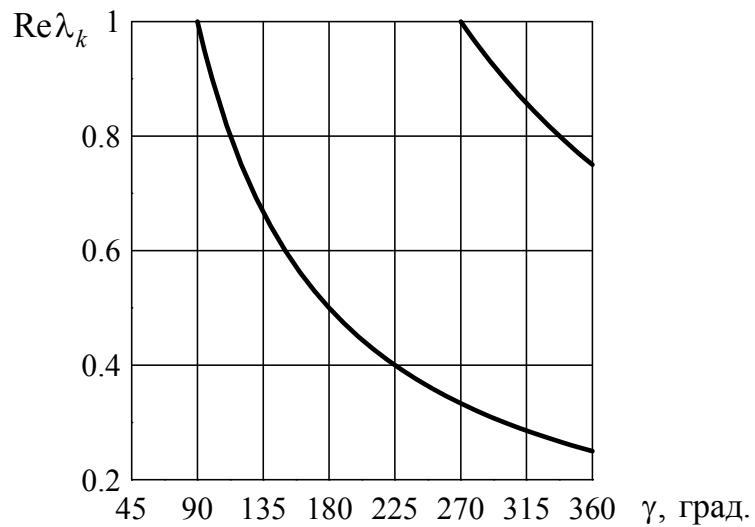


Рисунок 1.8 — Зависимость $\text{Re}\lambda_k$ от угла раствора однородного клина со смешанными граничными условиями на боковых гранях при антиплоской деформации

Решения для составного клина, боковые грани которого свободны от напряжений, позволяют оценить поведение напряжений в окрестности точки поверхности, где имеет место соединение двух разных материалов. В этом случае трансцендентное уравнение имеет вид

$$D(\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, E_1, E_2, \lambda) =$$

$$= \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{\chi_1} - b & 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{\chi_2} + b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\chi_1} + a & 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{\chi_2} - a \\ 1 & 0 & -a & 0 & -\Gamma & 0 & \Gamma a & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -b & 0 & \Gamma & 0 & \Gamma b \\ \cos a\gamma_1 & \sin a\gamma_1 & -a \cos b\gamma_1 & a \sin b\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin a\gamma_1 & -\cos a\gamma_1 & b \sin b\gamma_1 & -b \cos b\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin a\gamma_2 & -\cos a\gamma_2 & b \sin b\gamma_2 & -b \cos b\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos a\gamma_2 & -\sin a\gamma_2 & a \cos b\gamma_2 & a \sin b\gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.20)$$

Здесь $\Gamma = G_2/G_1$, $G_i = E_i/2(1 + \nu_i)$, $a = \lambda + 1$, $b = \lambda - 1$, $i = 1, 2$.

Соотношение (1.20), записанное в параметрах Дандерса, имеет вид [90]

$$4\left((1 + \beta)\sin^2 p\gamma_1 - p^2(\beta - \alpha)\sin^2 \gamma_1\right)\left((1 - \beta)\sin^2 p\gamma_2 + p^2(\beta - \alpha)\sin^2 \gamma_2\right) -$$

$$-(1 - \alpha)^2\left(\sin^2 p\gamma_1 - p^2\sin^2 \gamma_1\right) - (1 + \alpha)^2\left(\sin^2 p\gamma_2 - p^2\sin^2 \gamma_2\right) -$$

$$-2\left(1 - \alpha^2\right)\left(\sin p\gamma_1 \sin p\gamma_2 \cos p(\gamma_2 - \gamma_1) - p^2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos(\gamma_2 + \gamma_1)\right) = 0. \quad (1.20a)$$

Здесь $p = 1 - \lambda$, γ_1 и γ_2 — углы раствора частей составного клина, $\alpha = \frac{\Gamma(k_1 + 1) - (k_2 + 1)}{\Gamma(k_1 + 1) + (k_2 + 1)}$ и $\beta = \frac{\Gamma(k_1 - 1) - (k_2 - 1)}{\Gamma(k_1 + 1) + (k_2 + 1)}$ — комбинированные параметры упругих постоянных материалов (параметры Дандерса) [8], где $k_i = 3 - 4\nu_i$ — для ПДС, $k_i = (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i)$ — для ПНС, $\Gamma = G_2/G_1$, $G_i = E_i/2(1 + \nu_i)$, (ν_i , G_i — коэффициенты Пуассона и модули сдвига), $i = 1, 2$.

Из соотношения (1.20) следует, что собственные значения зависят от величин углов γ_1 , γ_2 и механических характеристик ν_1 , ν_2 , G_2/G_1 .

На основе приведённых соотношений могут быть найдены собственные значения, позволяющие оценить поведение напряжений в окрестности края границы контакта различных материалов, а также определить границу в области параметров $\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, G_2/G_1$ между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений. На рисунке 1.9 представлены семейства кривых, разделяющих решения в пространстве параметров (γ_1, γ_2) , для различных вариантов механических характеристик.

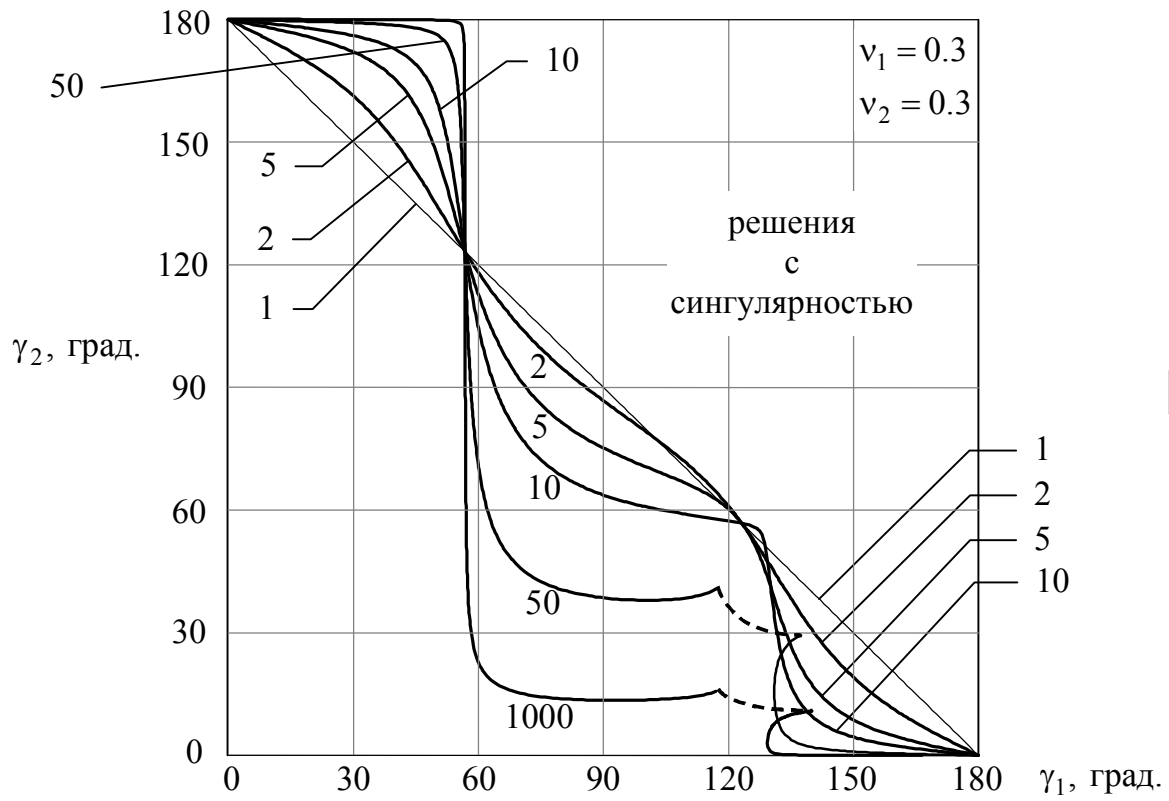
В случае антиплоской деформации трансцендентное уравнение относительно λ для составного клина, боковые грани которого свободны от напряжений, имеет вид

$$D(\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, E_1, E_2, \lambda) = \lambda^3 \sin(\lambda(\gamma_1 + \gamma_2)) = 0. \quad (1.21)$$

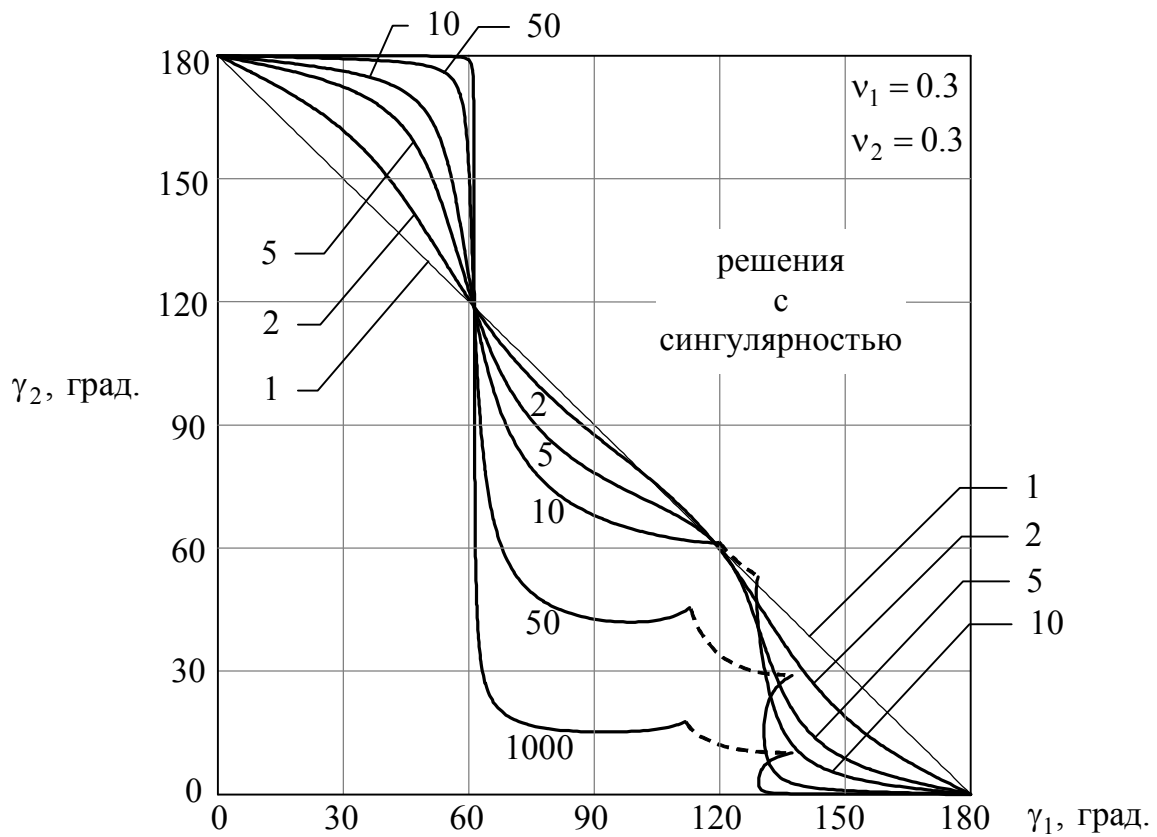
Видно, что при антиплоской деформации собственные значения λ_k зависят только от полного угла раствора составного клина $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Зависимость собственных значений от γ для составного клина в данном случае совпадает с аналогичной зависимостью для однородного клина со свободными от напряжений боковыми гранями, представленной на рисунке 1.3, б.

Решения для составного клина, боковые грани которого свободны от напряжений, а на поверхности контакта его частей заданы условия сухого трения, позволяют оценить поведение напряжений в окрестности точки поверхности, где имеет место механическое взаимодействие двух различных материалов по закону сухого трения. В этом случае трансцендентное уравнение имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 & -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b & -f & 0 & fa & 0 \\ f & 0 & -fa & 0 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & \frac{2}{\chi_1} + a & 0 & -\frac{1}{\Gamma} & 0 & -\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{2}{\chi_2} + a \right) \\ \cos a\gamma_1 & \sin a\gamma_1 & -a \cos b\gamma_1 & -a \sin b\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin a\gamma_1 & -\cos a\gamma_1 & -b \sin b\gamma_1 & b \cos b\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos a\gamma_2 & \sin a\gamma_2 & -a \cos b\gamma_2 & a \sin b\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin a\gamma_2 & -\cos a\gamma_2 & -b \sin b\gamma_2 & -b \cos b\gamma_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.22)$$



a



б

Рисунок 1.9 — Семейства кривых, разделяющих решения с сингулярностью и без сингулярности в плоскости параметров γ_1 и γ_2 (для $E_2/E_1 = 1, 2, 5, 10, 50, 100, 1000$): а) при ПДС; б) при ПНС

Здесь $\Gamma = G_2/G_1$, $G_i = E_i/2(1+\nu_i)$, $a = \lambda + 1$, $b = \lambda - 1$, $i = 1, 2$.

Из соотношения (1.22) следует, что собственные значения зависят не только от величин углов γ_1, γ_2 и механических характеристик $\nu_1, \nu_2, G_2/G_1$, но и от коэффициента трения f .

На основе приведённых соотношений могут быть найдены собственные значения, позволяющие оценить поведение напряжений в окрестности края поверхности контакта различных материалов, а также определить границу в области параметров $\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, G_2/G_1$ между решениями с сингулярностью и без сингулярности. На рисунках 1.10 и 1.11 представлены семейства таких кривых, разделяющих решения в области параметров (γ_1, γ_2) , для различных комбинаций механических характеристик и фиксированных значениях коэффициента трения f .

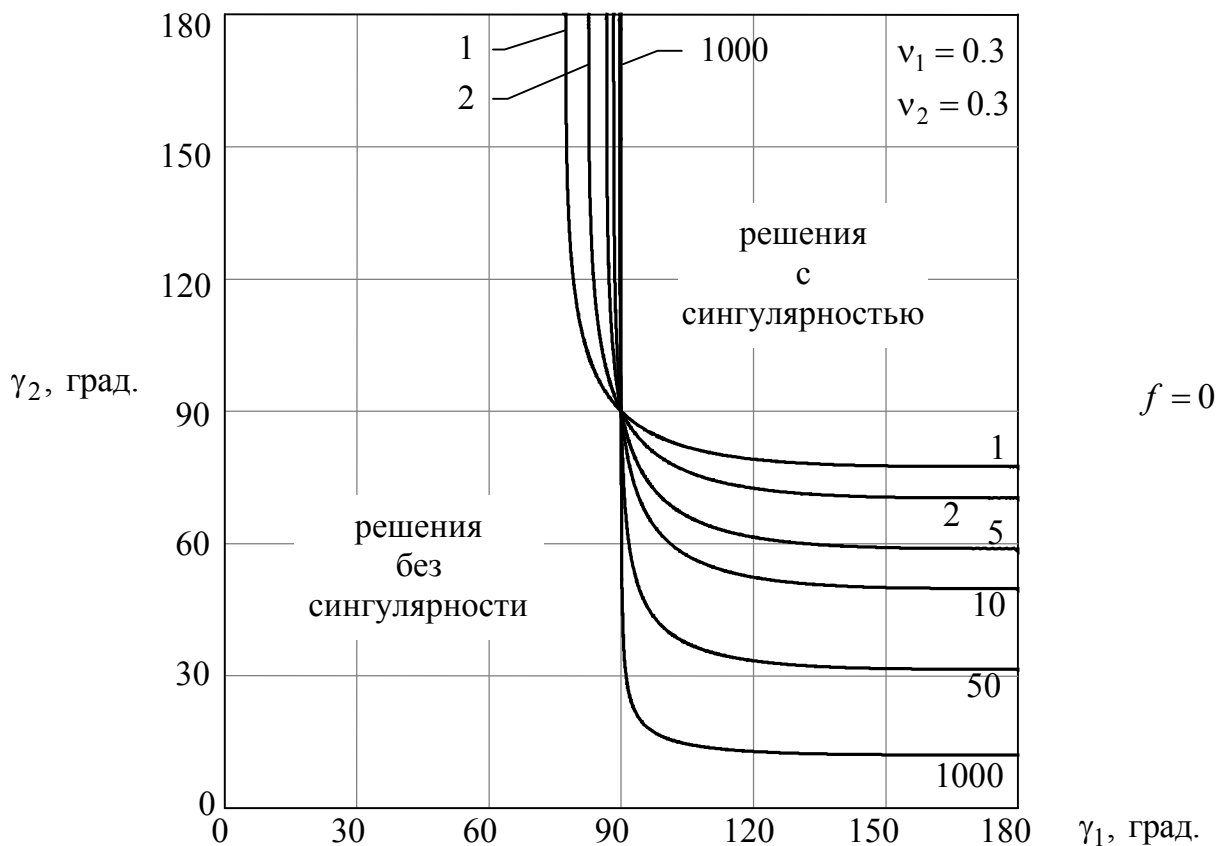


Рисунок 1.10 — Семейства кривых, разделяющих решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений в плоскости параметров γ_1 и γ_2 для составного клина с условиями сухого трения на контактирующих гранях его частей при ПДС с коэффициентом трения $f = 0$ ($E_2/E_1 = 1, 2, 5, 10, 50, 1000$)

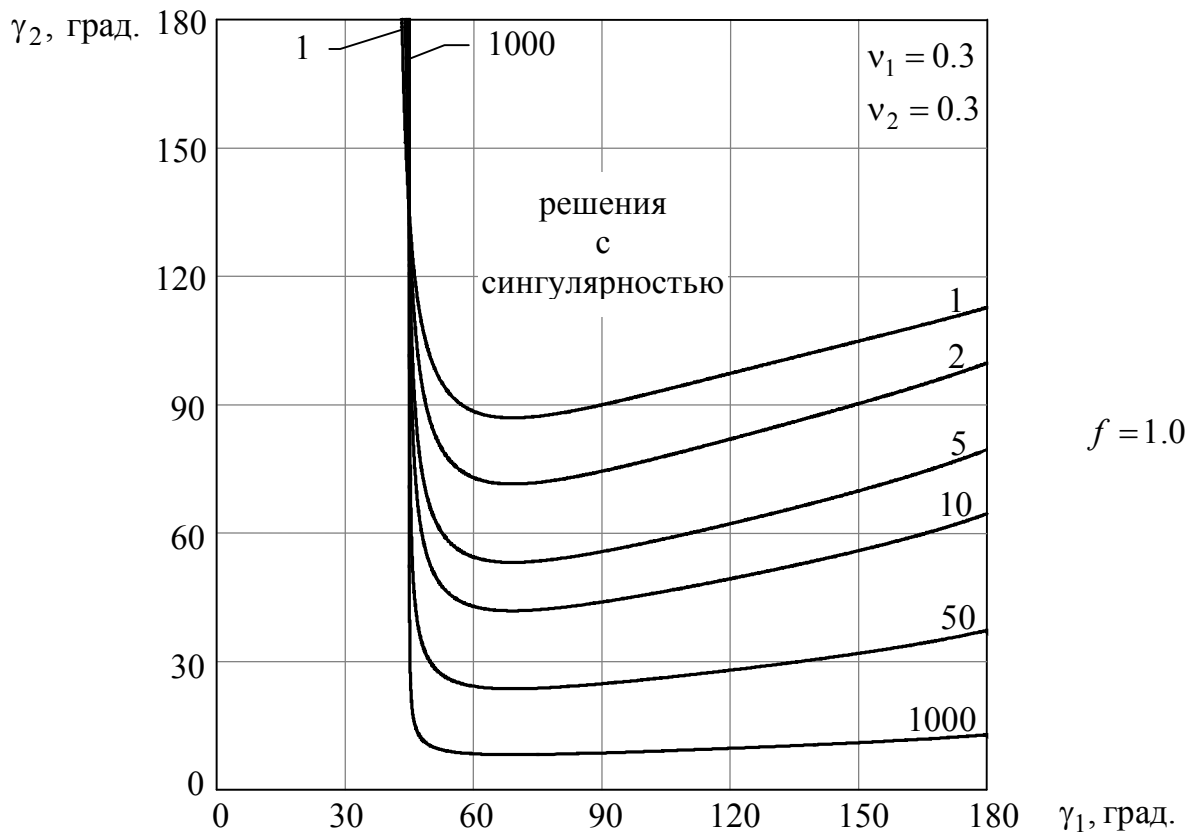
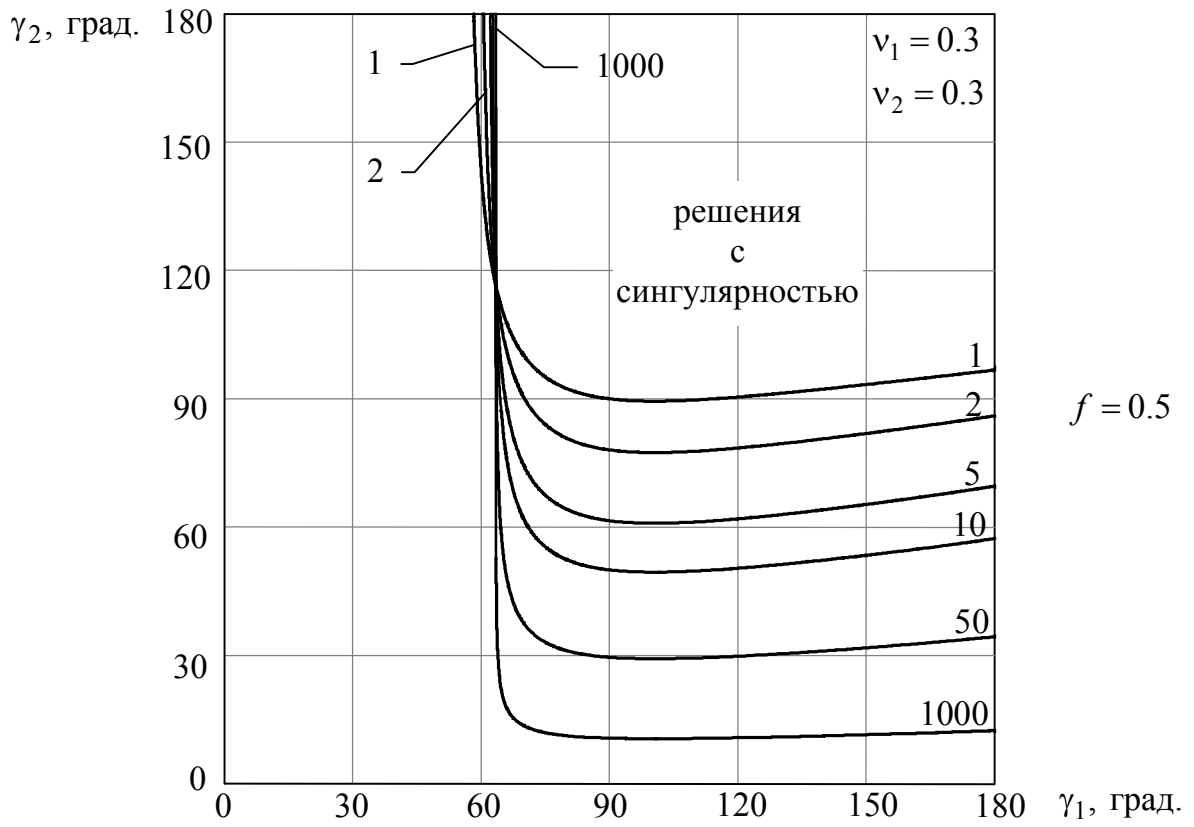


Рисунок 1.11 — Семейства кривых, разделяющих решения с сингулярностью и без сингулярности в плоскости параметров γ_1 и γ_2 для составного клина с условиями сухого трения на контактирующих гранях его частей при ПДС с коэффициентом трения $f = 0.5$ и $f = 1$ ($E_2/E_1 = 1, 2, 5, 10, 50, 1000$)

Решения для внутренней особой точки (рисунок 1.2, в) позволяют оценить поведение напряжений в окрестности внутренней точки тела, где нарушается гладкость поверхности контакта двух различных материалов. В этом случае трансцендентное уравнение имеет вид

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{\chi_1} - b & 0 & -c_2 & -s_2 & -\left(\frac{2}{\chi_2} - b\right)c_2 & \left(\frac{2}{\chi_2} - b\right)s_2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\chi_1} + a & s_2 & -c_2 & -\left(\frac{2}{\chi_2} + a\right)s_2 & -\left(\frac{2}{\chi_2} + a\right)c_2 \\ 1 & 0 & -a & 0 & -\Gamma c_2 & -\Gamma s_2 & \Gamma a c_2 & -\Gamma a s_2 \\ 0 & -1 & 0 & -b & -\Gamma s_2 & \Gamma c_2 & \Gamma b s_2 & \Gamma b c_2 \\ c_a & s_a & \left(\frac{2}{\chi_1} - b\right)c_b & -\left(\frac{2}{\chi_1} - b\right)s_b & -c_a & -s_a & -\left(\frac{2}{\chi_2} - b\right)c_b & \left(\frac{2}{\chi_2} - b\right)s_b \\ -s_a & c_a & \left(\frac{2}{\chi_1} + a\right)s_b & \left(\frac{2}{\chi_1} + a\right)c_b & s_a & -c_a & -\left(\frac{2}{\chi_2} + a\right)s_b & -\left(\frac{2}{\chi_2} + a\right)c_b \\ -c_a & -s_a & a c_b & -a s_b & \Gamma c_a & \Gamma s_a & -\Gamma a c_b & -\Gamma a s_b \\ -s_a & c_a & b s_b & b c_b & \Gamma s_a & -\Gamma c_a & -\Gamma b s_b & -\Gamma b c_b \end{vmatrix} = 0, \quad (1.23)$$

где $\Gamma = G_2/G_1$, $G_i = E_i/2(1 + \nu_i)$, $i = 1, 2$; $a = \lambda + 1$, $b = \lambda - 1$, $c_2 = \cos 2\pi\lambda$, $s_2 = \sin 2\pi\lambda$, $c_a = \cos a\gamma_1$, $c_b = \cos b\gamma_1$, $s_a = \sin a\gamma_1$, $s_b = \sin b\gamma_1$.

Из соотношения (1.23) следует, что собственные значения зависят от величины угла γ_1 и механических характеристик $\nu_1, \nu_2, G_2/G_1$.

В случае антиплоской деформации трансцендентное уравнение относительно λ тождественно равно нулю

$$D(\gamma_1, E_1, E_2, \lambda) = 0.$$

Исследование характеристического уравнения (1.23) показало, что когда $\gamma_1 \neq \pi$ для любых неодинаковых материалов с механическими характеристиками $\nu_1, \nu_2, E_1/E_2$ существуют собственные значения, действительная часть которых меньше единицы. Это позволяет сказать, что в окрестности внутренней точки, в которой нарушается гладкость поверхности контакта двух различных материалов, поведение напряжений имеет сингулярный характер.

1.2. Варианты алгоритмов метода конечных элементов для анализа напряжённого состояния в окрестности особых точек

При анализе напряжённо-деформированного состояния тел с особыми точками численными методами, в том числе и методом конечных элементов, возникают определённые трудности, связанные с оценкой точности и сходимости решения в окрестности этих особых точек. Использование квазиравномерной сетки в этом случае не позволяет получить удовлетворительные результаты и не является оптимальным с точки зрения вычислительных затрат. В большинстве алгоритмов, реализующих метод конечных элементов, эту проблему решают путём существенного сгущения сетки элементов или дополнения конечно-элементной модели сингулярными элементами.

Для построения сгущающихся к особым точкам конечно-элементных сеток, обеспечивающих необходимую точность и степень сходимости, предлагается рассматриваемую область разбивать на подобласти трёх типов [40]: I — обеспечивающая плавное сгущение конечно-элементной сетки к особой точке (линии); II — разбиваемая равными элементами (квазиравномерная область); III — переходная подобласть, обеспечивающая равномерное сгущение между подобластями первых двух типов (рисунок 1.12).

Основное сгущение сетки находится в подобласти типа I. Размер элементов в этой подобласти задаёт специальный параметр, определяющий размер элементов, содержащих особую точку. В некоторых случаях, например при конечно-элементном моделировании объектов с простой геометрией, оптимальную сетку можно получить, используя лишь подобласть первого (I) типа.

Альтернативный путь исследования напряжённо-деформированного состояния упругих тел в окрестности особых точек с помощью метода конечных элементов — это включение в конечно-элементные модели сингулярных элементов [2].

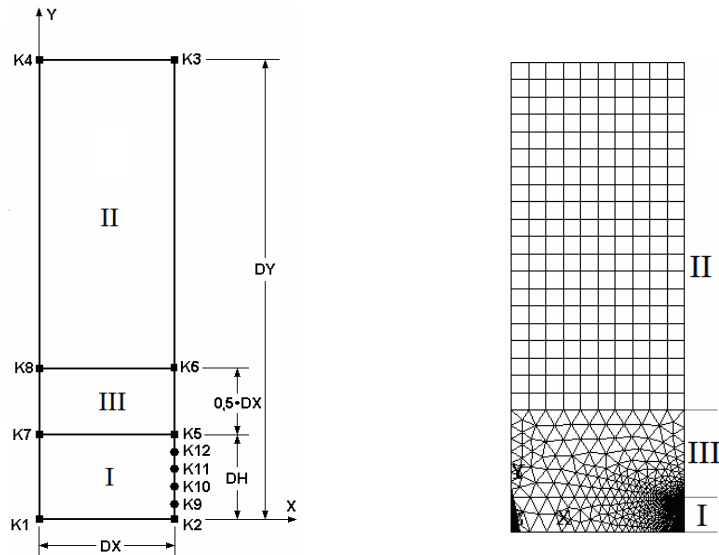


Рисунок 1.12 — Пример разбиения модели на конечные элементы, в котором используется три типа подобластей

Для целей настоящей работы, связанных с оптимизацией геометрии упругих тел в окрестности особой точки, по результатам численных экспериментов и анализа работы [2] предпочтение было отдано варианту алгоритма, основанному на использовании стандартных конечных элементов со сгущающимися к особым точкам сетками.

Рассмотрим схемы численных экспериментов, подтверждающие возможность и эффективность использования сгущающихся сеток элементов для расчёта напряжённо-деформированного состояния в упругих телах с особыми точками. Согласно [12], в окрестности особых точек упругое решение может быть представлено в виде линейной комбинации собственных решений для клина с углом γ , образованного касательными к поверхности в особой точке однородного тела, или для составного клина с углами γ_1 и γ_2 , образованными касательными в особой точке к поверхности составного тела и к поверхности контакта материалов (рисунок 1.13). Исходя из представления решения в окрестности особых точек, можно сделать заключение, что в достаточно малой окрестности особой точки сингулярные напряжения определяются членами ряда с $0 < \text{Re}\lambda_k < 1$. Для настоящих численных экспериментов будем рассматривать варианты, в которых сингулярное поведение напряжений вблизи особых точек

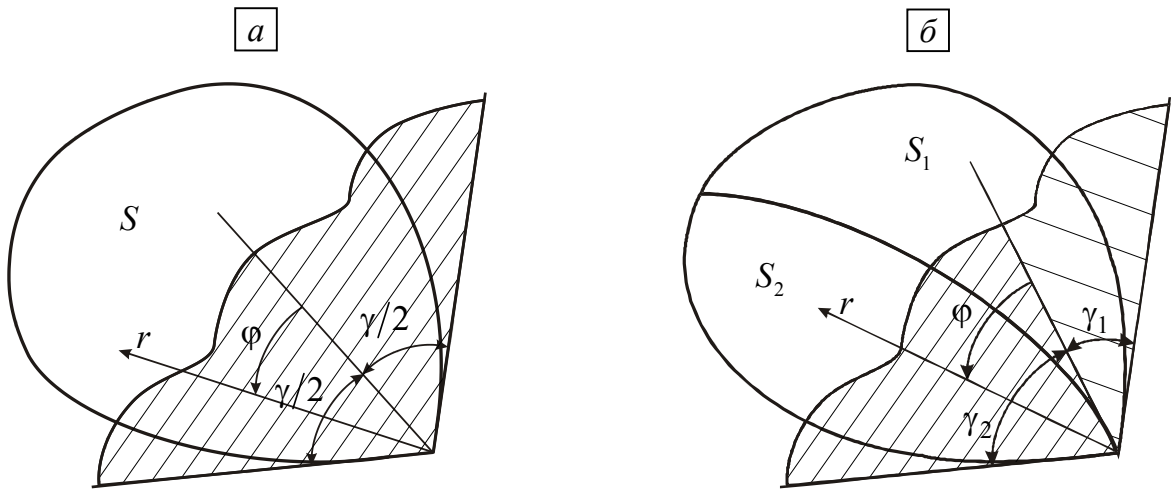


Рисунок 1.13 — Пример построения плоских клиньев вблизи точек поверхности, где нарушается её гладкость (а) и контактируют различные материалы (б)

определяется одним слагаемым ряда (1.1), то есть среди собственных значений λ_k имеется только одно, удовлетворяющее условию $0 < \text{Re} \lambda_1 < 1$. В этом случае может быть найдена окрестность особой точки, где напряжения вдоль прямой, проходящей через эту особую точку, с достаточной точностью описывается зависимостью $\sigma = Ar^{\lambda_1 - 1}$, где A — некоторая постоянная.

Тогда внутри этой окрестности в точках $r_1^i, r_2^i, \dots, r_n^i$, расположенных на i -х прямых ($i = 1, 2, \dots, k$), проходящих через особую точку, при действительных собственных значениях λ_1 с приемлемой точностью выполняются соотношения

$$\lambda_1 - 1 \approx \ln \left(\frac{\sigma_1^i}{\sigma_2^i} \right) / \ln \left(\frac{r_1^i}{r_2^i} \right) \approx \ln \left(\frac{\sigma_2^i}{\sigma_3^i} \right) / \ln \left(\frac{r_2^i}{r_3^i} \right) \approx \dots \approx \ln \left(\frac{\sigma_{n-1}^i}{\sigma_n^i} \right) / \ln \left(\frac{r_{n-1}^i}{r_n^i} \right). \quad (1.24)$$

Здесь r_j^i — расстояния от особой точки; σ_j^i — напряжения в точках r_j^i .

Численный анализ поведения напряжений в окрестности особых точек проводился с использованием сгущающихся сеток конечных элементов. Для обеспечения достаточной точности вычисления напряжений σ_j^i использовался анализ асимптотики поведения напряжений в точках r_j^i в зависимости от степени дискретизации расчётной области. Приемлемой схемой дискретизации

исследуемой области является вариант, при котором регистрируется описываемый соотношением (1.24) вид степенной зависимости напряжений в окрестности особой точки.

В качестве иллюстраций приведём задачи с различными типами особых точек. На рисунке 1.14, *a* представлена пластина с вырезами, вершины которых являются точками нарушения гладкости поверхности. На торцевых поверхностях пластины задаются нормальные или сдвиговые усилия. Для этих задач информация о виде степенной зависимости напряжений вблизи особых точек может быть получена на основе анализа собственных решений для плоских клиньев с углом раствора γ , на гранях которых заданы нулевые граничные условия в напряжениях. Размеры a , b , l определяются соотношениями $b/a = 1$, $b/l = 10$.

Частным случаем выреза при $\gamma = 360^\circ$ является трещина. Здесь сингулярные решения определяются кратными собственными значениями $\lambda_1 = 0.5$ и $\lambda_2 = 0.5$, где одно из них соответствует симметричному, а второе — несимметричному напряжённому состоянию. При $257^\circ < \gamma < 360^\circ$ в случае ПДС имеются два различных собственных значения, меньших единицы, также соответствующие

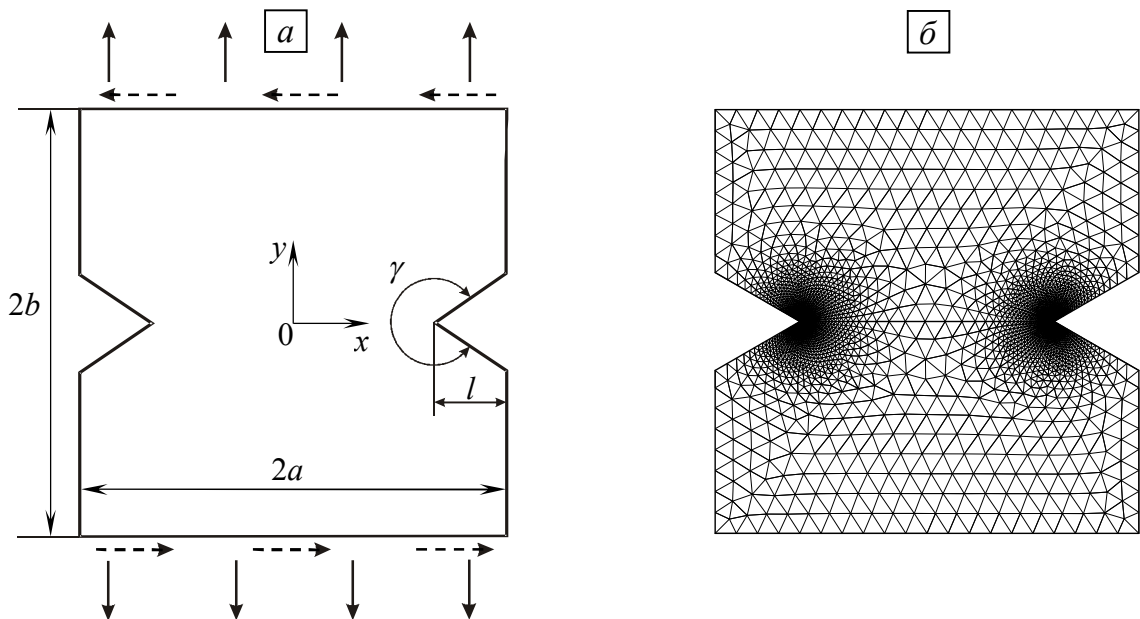


Рисунок 1.14 — Расчётная схема пластины с вырезом (*a*) и сетка конечных элементов (*б*)

симметричному и несимметричному относительно оси $y=0$ напряжённым состояниям, а при $180^\circ < \gamma < 257^\circ$ — одно значение, соответствующее симметричному напряжённому состоянию (рисунок 1.3, *a*).

Для расчёта напряжённо-деформированного состояния на основе линейной теории упругости использовался метод конечных элементов. В процессе численных экспериментов, связанных с сопоставлением результатов, полученных на сетках конечных элементов, равномерно сгущающихся к вершине выреза (рисунок 1.14, *b*), были найдены подобласти, где в нескольких узловых точках, расположенных на прямых, исходящих из вершины выреза, с приемлемой точностью ($\sim 0.05\%$) выполнялись соотношения (1.24).

В таблице 1 для рассматриваемых задач приведены найденные по формуле (1.24) собственные значения в узловых точках, расположенных на луче, исходящем из особой точки. Здесь d — расстояние от вершины выреза при $y=0$, λ — собственные значения, p и τ — результаты, полученные, соответственно, при нагружении нормальными и сдвиговыми усилиями на торцах пластины.

Таблица 1 — Первые собственные значения, найденные по формуле (1.24), для пластин с вырезами при ПДС

Трещина, $\gamma = 360^\circ$			Вырез, $\gamma = 300^\circ$		
$d \times 10^5$	p	τ	$d \times 10^5$	p	τ
	λ_1	λ_2		λ_1	λ_2
2.02	0.5004	0.5002	1.62	0.5122	0.7309
2.10	0.5003	0.5004	1.69	0.5122	0.7303
2.19	0.5003	0.5004	1.76	0.5123	0.7306
2.28	0.5002	0.5004	1.83	0.5123	0.7308
2.37	0.5004	0.5004	1.90	0.5123	0.7308
2.47	0.5005	0.5003	1.98	0.5123	0.7310
2.56	0.5003	0.5003	2.06	0.5125	0.7308
2.67	0.5001	0.5002	2.14	0.5121	0.7308
2.77	0.5002	0.5002	2.23	0.5120	0.7309
2.89	0.5004	0.5004	2.32	0.5123	0.7309

При $\gamma = 300^\circ$ одно собственное значение $\lambda_1 = 0.512$ соответствует симметричному, а второе $\lambda_2 = 0.731$ — кососимметричному относительно оси $y = 0$ напряжённому состоянию (рисунок 1.3, а).

В рассматриваемых численных экспериментах необходима демонстрация погрешности конечно-элементного решения, которая оценивалась на основе анализа асимптотики решения при увеличении числа элементов. Для вариантов дискретизации расчётной области на конечные элементы отличие собственных значений, найденных с помощью данной численной процедуры от значений, полученных из аналитического решения, составляет не более 0.08 %.

Численные исследования поведения напряжений в окрестности точек границы, где меняется тип граничных условий, выполнено на примере задачи для пластины, имеющей на одном ребре условия заделки, при плоскодеформированном состоянии (рисунок 1.15).

В таблице 2 приведены собственные значения λ_1 при ПДС, полученные на основе рассматриваемой численной процедуры. Результаты приведены для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$, $b/a = 1$ и двух значений угла γ . Размер d соответствует расстоянию от точки с координатами $(a, 0)$ вдоль оси $y = 0$. В этом случае собственное значение λ_1 , найденное с помощью соотношения (1.18) при $\nu = 0.3$, равно 0.711 для $\gamma = 90^\circ$ и 0.621 для $\gamma = 120^\circ$.

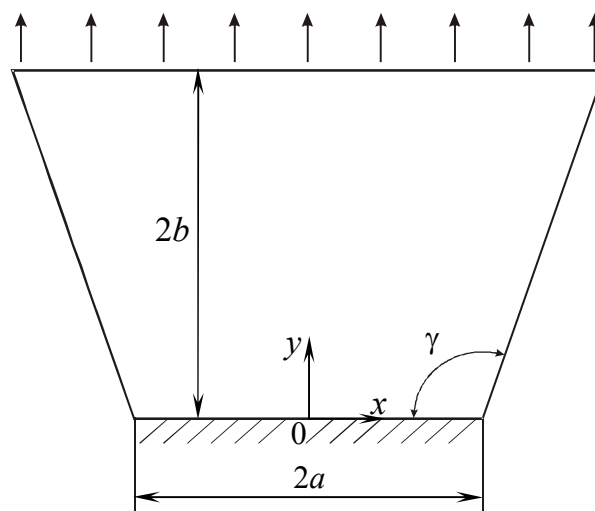


Рисунок 1.15 — Расчётная схема пластины

Таблица 2 — Первые собственные значения, найденные по формуле (1.24), для пластины со смешанными граничными условиями при ПДС

$\gamma=90^\circ$				$\gamma=120^\circ$			
$d \times 10^6$	λ_1	$d \times 10^6$	λ_1	$d \times 10^6$	λ_1	$d \times 10^6$	λ_1
3.97	0.7113	4.53	0.7113	8.56	0.6209	9.81	0.6209
4.08	0.7109	4.65	0.7111	8.80	0.6208	10.09	0.6210
4.19	0.7110	4.77	0.7110	9.05	0.6209	10.36	0.6209
4.29	0.7111	4.90	0.7111	9.29	0.6209	10.64	0.6210
4.41	0.7113	5.02	0.7113	9.55	0.6209	10.93	0.6209

Вариант особой точки границы, где имеет место контакт различных материалов, рассмотрен на примере составной пластины, представленной на рисунке 1.16.

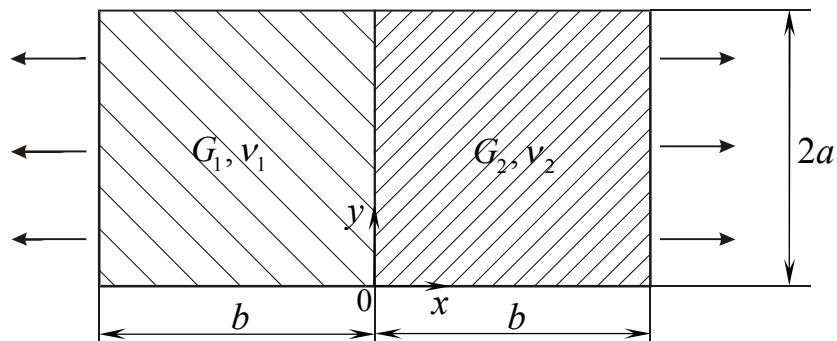


Рисунок 1.16 — Расчётная схема составной пластины

Пусть коэффициенты Пуассона одинаковы $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, отношение модулей сдвига $G_2/G_1 = 100$, $b/a = 2$. В таблице 3 приведены результаты расчётов λ_1 при ПДС. В рассматриваемом варианте собственное значение λ_1 , найденное на основе аналитического решения, равно 0.722, а собственные значения, полученные численным методом, приведены в таблице 3. Здесь d — расстояние от точки с координатами $(0, 0)$ вдоль поверхности соединения двух материалов.

Таблица 3 — Первые собственные значения, найденные по формуле (1.24), для составной пластины при ПДС

$d \times 10^6$	λ_1	$d \times 10^6$	λ_1
1.04	0.7221	1.30	0.7219
1.09	0.7221	1.36	0.7218
1.14	0.7219	1.42	0.7222
1.19	0.7219	1.48	0.7221
1.24	0.7221	1.55	0.7219

Из приведённых результатов можно заключить, что использование сгущающихся сеток конечных элементов позволяет получить достоверную картину о напряжённом состоянии вблизи особых точек различных типов, а выполнение соотношения (1.24) — найти показатели сингулярности напряжений.

Предлагаемая численная процедура вычисления показателей сингулярности напряжений в окрестности особых точек имеет важное самостоятельное значение для задач, где аналитические решения в окрестности особых точек отсутствуют. Проиллюстрируем это на примере трёхмерной задачи для куба, представленного на рисунке 1.17, *a*.

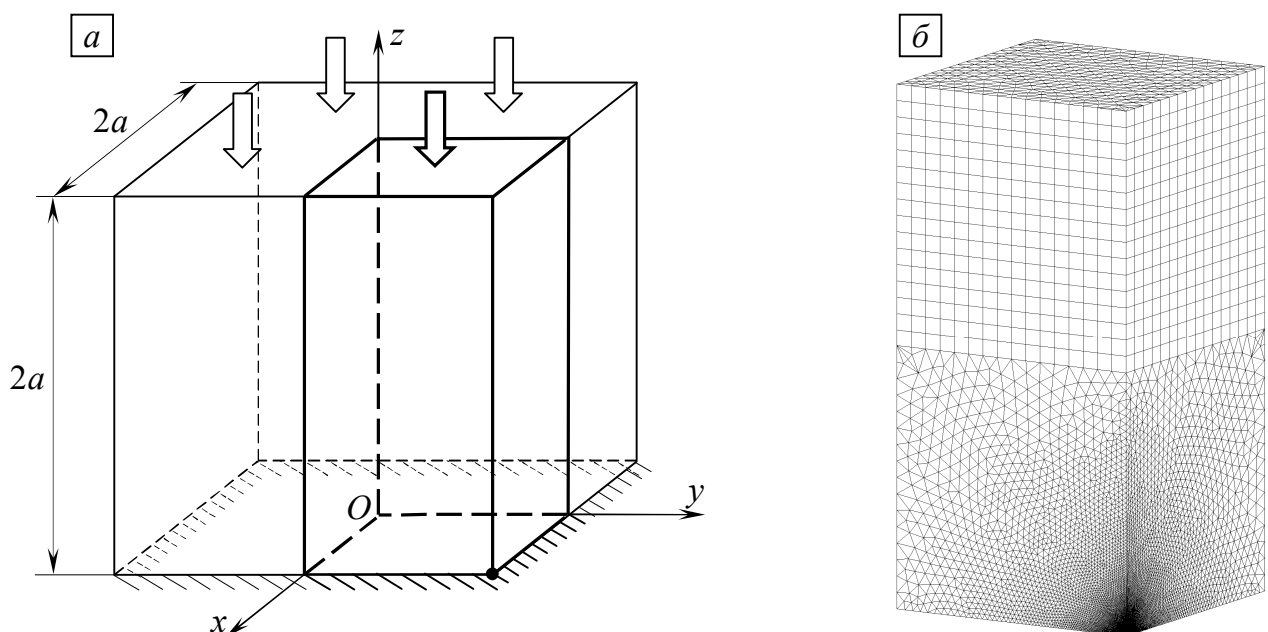


Рисунок 1.17 — Расчётная схема (*a*), схема дискретизации (*б*) для четверти куба

В силу симметрии при расчётах рассматривается $\frac{1}{4}$ часть куба, схема дискретизации которой с конечно-элементной сеткой, сгущающейся к особой точке, приведена на рисунке 1.17, б. В таблице 4 приведены собственные значения λ , полученные на основе предлагаемого алгоритма вычисления показателей сингулярности напряжений (коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$). Размер d — расстояние от особой точки с координатами $(a, a, 0)$ вдоль вертикального ребра куба (в направлении оси z). В работе [26] данная задача рассматривалась на основе другого численно-аналитического метода вычисления показателей сингулярности напряжений. Отличие округлённых до третьего знака после запятой полученных результатов (0.624) от данных работы [26] (0.654) составляет 4.5 %.

Таблица 4 — Первые собственные значения, найденные по формуле (1.24), для куба

$d \times 10^4$	λ_1	$d \times 10^4$	λ_1
1.78	0.6241	2.41	0.6240
1.90	0.6238	2.55	0.6238
2.02	0.6242	2.69	0.6237
2.15	0.6239	2.84	0.6233
2.27	0.6238	3.00	0.6239

1.3. Численный анализ напряжений в окрестности особых точек анизотропных упругих тел

Во введении отражены результаты немногих численных и аналитических исследований сингулярных решений в анизотропных телах. Рассматриваемый численный алгоритм, несмотря на его ограничения, связанные с возможностью

рассмотрения задач с единственным собственным значением в интервале от нуля до единицы, обладает, по сравнению с известными аналитическими и численными алгоритмами, важным преимуществом. Оно состоит в том, что для оценки поведения напряжений в окрестности особых точек не требуется численной реализации сложных аналитических выражений или построения специальных численных алгоритмов. Для вычисления показателя сингулярности напряжений достаточно воспользоваться стандартным пакетом ANSYS с соблюдением описанных в предыдущем параграфе рекомендаций по обеспечению необходимой точности вычислений.

Для иллюстрации возможностей и дополнительных аргументов в пользу достоверности результатов, полученных на основе предлагаемого численного алгоритма, рассмотрим пример, связанный с оценкой поведения напряжений в вершине трещины, фронт которой перпендикулярен поверхности xOy (рисунок 1.18, *a*). Сингулярность напряжений оценивается в точке $x = y = z = 0$. Контур сферы на рисунке 1.18, *a* представлен только для визуализации трещины в упругом полупространстве. В работе [144] для данной задачи приведены численные результаты о показателях сингулярности напряжений для ортотропного материала, упругие характеристики которого представлены в таблице 5.

При использовании численного алгоритма в качестве расчётной схемы вместо упругого полупространства используется куб, размер граней которого в данной задаче не имеет значения (рисунок 1.18, *б*). При этом условия нормального разрыва (вид *I*) реализуются при задании на боковых гранях, параллельных плоскости xOz , нормальных перемещений, а условия поперечного сдвига (вид *II*) — при задании на этих боковых гранях касательных перемещений, направленных параллельно оси x в противоположные стороны относительно друг друга.

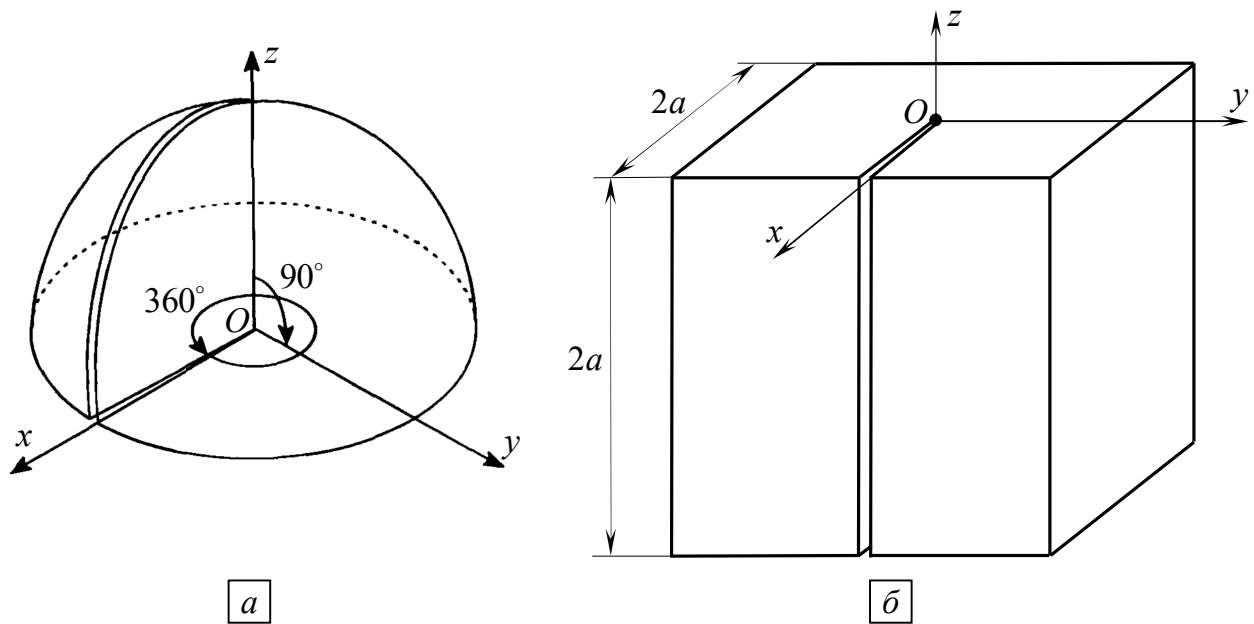


Рисунок 1.18 — Трещина, фронт которой перпендикулярен поверхности упругого полупространства, (а) и её расчётная схема (б)

Таблица 5 — Упругие характеристики углепластика [144]

Материал	E_i , МПа	G_{ij} , МПа	ν_{ij}
Углепластик	$E_x = 130300$	$G_{xy} = 4502$	$\nu_{xy} = 0.33$
	$E_y = 9377$	$G_{xz} = 4502$	$\nu_{xz} = 0.33$
	$E_z = 9377$	$G_{yz} = 2865$	$\nu_{yz} = 0.33$

В таблице 6 для трещин вида *I* и *II* представлены показатели сингулярности напряжений, приведённые в работе [144] и полученные с использованием предлагаемого численного алгоритма, основанного на выделении асимптотики напряжений методом конечных элементов (ВАНМКЭ) в соответствии с соотношениями (1.24). В данном случае результаты, полученные этими двумя методами, совпадают.

Для иллюстрации влияния анизотропии на вид степенной зависимости напряжений рассмотрим ряд задач. Расчёты выполняются на примере трансверсально-изотропных и ортотропных материалов. При анализе влияния значений упругих постоянных на вид степенной зависимости напряжений отправной точкой при варьировании этих величин являются характеристики

трансверсально-изотропного стеклопластика и ортотропного углепластика, приведённые в таблице 7.

Геометрии рассматриваемых тел представляются в декартовой системе координат (x, y, z) . Анизотропные свойства материалов определены в декартовых координатах (x', y', z') , и главные направления анизотропии могут быть различным образом ориентированы относительно этих осей, как это представлено на рисунке 1.19.

В таблице 8 приведены первые собственные значения, найденные с использованием соотношений (1.24), для пластин из стеклопластика и углепластика при различных углах, определяющих величину выреза (рисунок 1.14), и при различных вариантах ориентации главных направлений анизотропии. В этой же таблице представлены собственные значения, найденные аналитическим методом для изотропного материала, которые в данной задаче определяются только величиной угла γ .

Таблица 6 — Показатели сингулярности напряжений для трещины, фронт которой перпендикулярен поверхности упругого полупространства

	λ_1 (вид II)		λ_2 (вид I)	
	[144]	ВАНМКЭ	[144]	ВАНМКЭ
Изотропный $\nu = 0.3$	0.3929	0.40	0.5483	0.55
Анизотропный	0.4543	0.46	0.5227	0.52

Таблица 7 — Упругие характеристики стекло- и углепластиков [10]

Материал	E_i , МПа	G_{ij} , МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
Стеклопластик	$E_{x'} = 24260$	$G_{x'y'} = 4254$	$\nu_{x'y'} = 0.15$	$\nu_{y'x'} = 0.15$
	$E_{y'} = 24260$	$G_{x'z'} = 2947$	$\nu_{x'z'} = 0.42$	$\nu_{z'x'} = 0.173$
	$E_{z'} = 9989$	$G_{y'z'} = 2947$	$\nu_{y'z'} = 0.42$	$\nu_{z'y'} = 0.173$
Углепластик	$E_{x'} = 84457$	$G_{x'y'} = 12410$	$\nu_{x'y'} = 0.21$	$\nu_{y'x'} = 0.104$
	$E_{y'} = 42026$	$G_{x'z'} = 4287$	$\nu_{x'z'} = 0.28$	$\nu_{z'x'} = 0.049$
	$E_{z'} = 14703$	$G_{y'z'} = 3677$	$\nu_{y'z'} = 0.3$	$\nu_{z'y'} = 0.105$

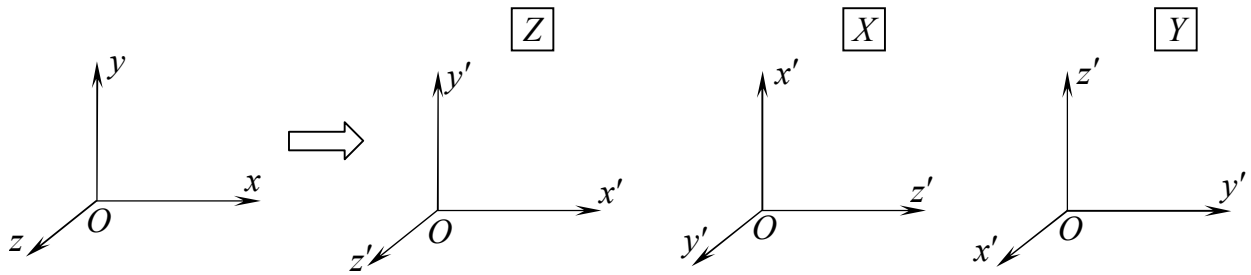


Рисунок 1.19 — Варианты ориентации главных направлений анизотропии x', y', z' относительно осей x, y, z

Таблица 8 — Первые собственные значения для пластин с вырезами при ПДС

Стеклопластик								
Вариант ориентации главных направлений	$\gamma = 360^\circ$		$\gamma = 300^\circ$		$\gamma = 240^\circ$		$\gamma = 200^\circ$	
	ρ	τ	ρ	τ	ρ	τ	ρ	τ
	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2
Z	0.500	0.501	0.512	0.779	0.587	1.102	0.772	1.536
X	0.500	0.501	0.508	0.724	0.567	1.034	0.746	1.479
Y	0.500	0.501	0.519	0.824	0.619	1.186	0.811	1.618
Изотропный	0.500	0.500	0.512	0.731	0.616	1.149	0.819	1.631
Углепластик								
Вариант ориентации главных направлений	$\gamma = 360^\circ$		$\gamma = 300^\circ$		$\gamma = 240^\circ$		$\gamma = 200^\circ$	
	ρ	τ	ρ	τ	ρ	τ	ρ	τ
	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2
Z	0.500	0.501	0.518	0.811	0.616	1.176	0.809	1.613
X	0.500	0.501	0.505	0.708	0.540	0.962	0.679	1.339
Y	0.500	0.501	0.516	0.802	0.609	1.159	0.801	1.597
Изотропный	0.500	0.500	0.512	0.731	0.616	1.149	0.819	1.631

Приведённые результаты позволяют сделать следующие выводы. Наличие анизотропных свойств не влияет на характер сингулярности напряжений в вершине трещины. При значениях γ , отличных от 360° , анизотропные свойства оказывают незначительное влияние на показатели сингулярности. Систематизировать эти изменения, по-видимому, не имеет смысла.

В следующем примере для трапецидального тела (рисунок 1.15) рассмотрен вариант особой точки, где имеет место смена типа краевых условий. В таблицах 9 и 11 приведены собственные значения, найденные на основе соотношений (1.24), при различных углах и при различных вариантах ориентации главных направлений анизотропии относительно поверхности трапецидального тела. В изотропном теле в особой точке, где меняется тип краевых условий, поведение напряжений определяется величиной угла γ и значением коэффициента Пуассона. Для оценки влияния анизотропии на вид степенной зависимости напряжений в окрестности особых точек в таблицах 10 и 12 приведены показатели сингулярности напряжений для изотропного тела при значениях коэффициента Пуассона, имеющих место в различных направлениях для рассматриваемых анизотропных материалов. Эти данные не претендуют на качественные обобщения, но вместе с тем дают определённые представления о влиянии анизотропии на вид степенной зависимости напряжений в окрестности особых точек.

Рассмотрен вариант составной пластины (рисунок 1.16), одна часть которой выполнена из изотропного материала, а вторая часть — из анизотропного. Найденные на основе соотношений (1.24) результаты для показателя сингулярности напряжений в точке границы, где контактируют два материала, приведены в таблице 13 для двух вариантов изотропных материалов.

В таблице 14 приведены найденные на основе соотношений (1.24) показатели сингулярности напряжений в вершине куба, на нижней грани которого заданы нулевые перемещения, а к верхней приложено распределённое сжимающее усилие (рисунок 1.17).

Для оценки влияния анизотропии на показатели сингулярности напряжений в таблице 15 приведены значения показателей сингулярности напряжений в вершине куба из изотропного материала при значениях коэффициента Пуассона стеклопластика и углепластика по различным направлениям.

Таблица 9 — Собственные значения для трапецеидальной пластины из стеклопластика со смешанными граничными условиями при ПДС

Вариант ориентации главных направлений анизотропии	Угол сопряжения боковой поверхности пластины с заделкой			
	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 60^\circ$	$\gamma = 75^\circ$	$\gamma = 90^\circ$
	λ_1	λ_1	λ_1	λ_1
Z	1.215	1.037	0.905	0.784
X	1.305	1.063	0.893	0.749
Y	1.108	0.954	0.843	0.749

Таблица 10 — Собственные значения в вершине изотропного клина при ПДС, одна грань которого неподвижна, а другая свободна от напряжений

Коэффициент Пуассона	Угол раствора однородного клина			
	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 60^\circ$	$\gamma = 75^\circ$	$\gamma = 90^\circ$
	λ_1	λ_1	λ_1	λ_1
0.15	1.4016	1.0942	0.9222	0.8212
0.173	1.3734	1.0718	0.9027	0.8022
0.42	1.0893	0.8525	0.7193	0.6384

Таблица 11 — Собственные значения для трапецеидальной пластины из углепластика со смешанными граничными условиями при ПДС

Вариант ориентации главных направлений анизотропии	Угол сопряжения боковой поверхности пластины с заделкой			
	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 60^\circ$	$\gamma = 75^\circ$	$\gamma = 90^\circ$
	λ_1	λ_1	λ_1	λ_1
Z	1.196	1.032	0.916	0.818
X	1.413	1.179	1.017	0.839
Y	1.166	0.997	0.876	0.773

Таблица 12 — Собственные значения в вершине изотропного клина при ПДС, одна грань которого свободна от напряжений, а на другой заданы нулевые перемещения

Коэффициент Пуассона	Угол раствора однородного клина			
	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 60^\circ$	$\gamma = 75^\circ$	$\gamma = 90^\circ$
	λ_1	λ_1	λ_1	λ_1
0.049	1.5327	1.2004	1.0188	0.9239
0.104	1.4597	1.1408	0.9638	0.8631
0.105	1.4584	1.1397	0.9628	0.8621
0.21	1.3289	1.0367	0.8723	0.7735
0.28	1.2472	0.9731	0.8184	0.7243
0.3	1.2243	0.9554	0.8036	0.7111

Таблица 13 — Собственные значения для составных пластин при ПДС

Вариант ориентации главных направлений анизотропии	Стеклопластик и		Углепластик и	
	$E_1 = 2600$ МПа; $\nu_1 = 0.3$	$E_1 = 260$ МПа; $\nu_1 = 0.3$	$E_1 = 2600$ МПа; $\nu_1 = 0.3$	$E_1 = 260$ МПа; $\nu_1 = 0.3$
	λ_1	λ_1	λ_1	λ_1
Z	0.816	0.723	0.760	0.717
X	0.861	0.731	0.799	0.722
Y	0.861	0.731	0.840	0.728

Таблица 14 — Собственные значения для куба

Вариант ориентации главных направлений	Стеклопластик	Углепластик
	λ_1	λ_1
Z	0.655	0.743
X	0.689	0.764
Y	0.689	0.730

Таблица 15 — Собственные значения для куба из изотропного материала

Коэффициент Пуассона	Изотропный куб
	λ_1
0.15	0.739
0.173	0.717
0.42	0.561

Коэффициент Пуассона	Изотропный куб
	λ_1
0.049	0.873
0.104	0.790
0.105	0.789
0.21	0.685
0.28	0.636
0.3	0.624

Представляет интерес анализ изменения значения показателя сингулярности напряжений при изменении отдельных параметров анизотропного материала, в нашем случае технических констант. В качестве отправной точки возьмём характеристики трансверсально-изотропного стеклопластика (таблица 7). Оценим изменение показателя сингулярности напряжений в вершине куба (рисунок 1.17) с вариантом ориентации главных направлений — Z .

Сначала будем варьировать техническую константу $\nu_{x'y'}$ при фиксированных значениях $E_{x'}$, $E_{y'}$, $E_{z'}$, $G_{x'y'}$, $G_{x'z'}$, $G_{y'z'}$, $\nu_{x'z'}$, $\nu_{y'z'}$. Результаты изменения показателя сингулярности напряжений в вершине куба в зависимости от $\nu_{x'y'}$ представлены на рисунке 1.20, *а*.

Как видно из рисунка 1.20, *а* техническая константа $\nu_{x'y'}$ оказывает слабое влияние на значение показателя сингулярности напряжений (порядка 3 %). Теперь будем варьировать техническую константу $E_{z'}$ при фиксированных значениях $E_{x'}$, $E_{y'}$, $G_{x'y'}$, $G_{x'z'}$, $G_{y'z'}$, $\nu_{x'y'}$, $\nu_{x'z'}$, $\nu_{y'z'}$. Результаты изменения показателя сингулярности напряжений в вершине куба в зависимости от $E_{z'}$ представлены на рисунке 1.20, *б*. По сравнению с технической константой $\nu_{x'y'}$ изменение $E_{z'}$ оказывает более заметное влияние на сингулярное поведение напряжений в окрестности вершины куба.

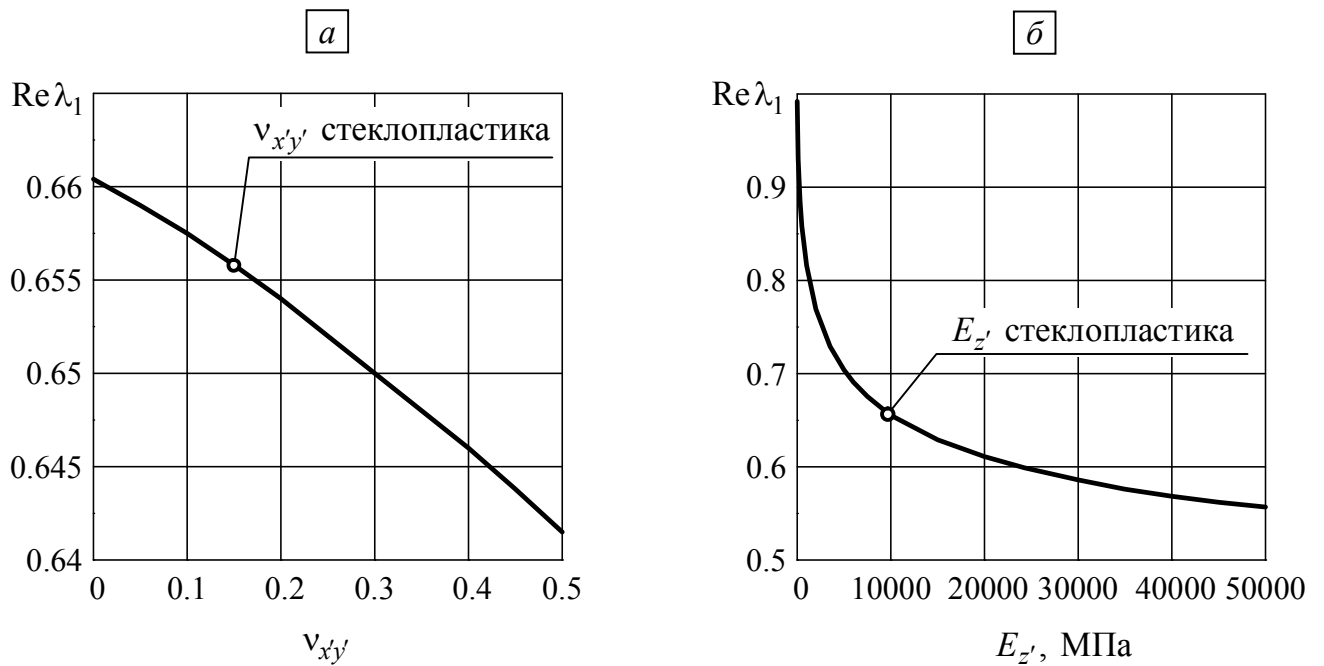


Рисунок 1.20 — Показатели сингулярности напряжений в вершине куба:

а) в зависимости от $\nu_{x'y'}$; б) в зависимости от $E_{z'}$.

1.4. Численный анализ напряжений в окрестности особых точек тел, описываемых моделью несимметричной теории упругости

Сингулярные решения являются результатом классической теории упругости. Математический результат о наличии бесконечных напряжений противоречит физической реальности. Данное противоречие побуждает наряду с исследованиями в рамках классической теории упругости рассматривать задачи построения сингулярных решений и на основе различных вариантов упругих и неупругих моделей, в том числе, моделей несимметричной теории упругости [86, 139]. Возникает вопрос: меняется ли поведение напряжений в окрестности особых точек при использовании других моделей, отличных от модели классической теории упругости? Известны результаты о сингулярности напряжений в вершине трещины, полученные на основе моделей несимметричной теории упругости [191]. Представленные в этой работе результаты демонстрируют, что поведение напряжений в окрестности вершины трещины

для классической и несимметричной теорий упругости совпадает. Тем не менее, вопрос остается открытым для остальных вариантов особых точек. Чтобы ответить на этот вопрос, были проведены численные эксперименты на основе модели несимметричной теории упругости на выше представленных задачах, для которых уже имеются результаты, полученные в рамках классической теории упругости, и проведено сравнение.

Для анализа поведения напряжений на основе модели несимметричной теории упругости использован вариант дискретизации исследуемой области, при котором для классической теории упругости регистрируется описываемый соотношением (1.24) вид степенной зависимости напряжений в окрестности особой точки. В рассматриваемом варианте модели несимметричной теории упругости [29] тензор деформации и тензор изгиба-кручения имеют вид:

$$\tilde{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\chi} = \nabla \boldsymbol{\omega}. \quad (1.25)$$

Физические уравнения для изотропного тела определяются соотношениями:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2G\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(S)} + 2\alpha\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\boldsymbol{\gamma}})\tilde{\mathbf{e}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}} = 2\eta\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{(S)} + 2\varepsilon\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\boldsymbol{\chi}})\tilde{\mathbf{e}}. \quad (1.26)$$

В уравнениях (1.25)–(1.26) \mathbf{u} — вектор перемещения; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор поворота; $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; G, λ — постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \eta, \varepsilon$ — физические постоянные материала в рамках модели несимметрично теории упругости; $\tilde{\mathbf{E}}$ — тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $(\cdot)^{(S)}$ — операция симметрирования; $(\cdot)^{(A)}$ — операция альтернирования, $\nabla(\cdot)$ — набла-оператор, $I_1(\cdot)$ — первый инвариант тензора. В отличие от классической теории, тензоры $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ являются несимметричными.

При расчётах для двумерных задач использовались следующие физические характеристики несимметричной теорий упругости [127]: $G = 1.033 \times 10^9$ Н/м²,

$\alpha = 1.148 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\eta = 4.1 \text{ Н}$, $\varepsilon = 0.131 \text{ Н}$. Значения коэффициента Пуассона приводятся при описании конкретных задач.

Для пластины с вырезами (рисунок 1.14, *a*), вершины которых являются точками нарушения гладкости поверхности, размеры a , b , l определяются теми же соотношениями, что и при решении задачи на основе классической теории упругости: $b/a = 1$, $b/l = 10$. Результаты, найденные по формуле (1.24) в рамках модели несимметричной теории упругости при углах 360° (трещина) и 300° (вырез 60°), приведены в таблице 16.

Таблица 16 — Первые собственные значения, найденные по формуле (1.24), для пластин с вырезами при решении в рамках несимметричной теории упругости

Трещина, $\gamma = 360^\circ$			Вырез, $\gamma = 300^\circ$		
$d \times 10^5$	p	τ	$d \times 10^5$	p	τ
	λ_1	λ_2		λ_1	λ_2
2.02	0.5004	0.5003	1.62	0.5317	0.6983
2.10	0.5003	0.5003	1.69	0.5318	0.6984
2.19	0.5003	0.5001	1.76	0.5318	0.6985
2.28	0.5002	0.5002	1.83	0.5319	0.6988
2.37	0.5004	0.5002	1.90	0.5319	0.6988
2.47	0.5004	0.5003	1.98	0.5319	0.6992
2.56	0.5003	0.5003	2.06	0.5320	0.6991
2.67	0.5001	0.5002	2.14	0.5316	0.6992
2.77	0.5002	0.5004	2.23	0.5316	0.6995
2.89	0.5004	0.5004	2.32	0.5318	0.6996

В таблице 16 приведены найденные по формуле (1.24) собственные значения в узловых точках, расположенных на границе выреза. Здесь d — расстояние от вершины выреза, λ_1 , λ_2 — собственные значения, p и τ — результаты, полученные соответственно при нагружении нормальными и сдвиговыми усилиями на торцах пластины. При $\gamma = 300^\circ$ одно собственное

значение $\lambda_1 = 0.512$ соответствует симметричному, а второе $\lambda_2 = 0.731$ — кососимметричному относительно оси $y = 0$ напряжённому состоянию (рисунок 1.3, *a*).

При сравнении результатов, полученных на основе моделей классической (таблица 1) и несимметричной (таблица 16) теорий упругости, можно отметить, что они подтверждают ранее полученные в [191] результаты о том, что поведение напряжений в окрестности вершины трещины для классической и несимметричной теорий упругости совпадает. Однако при γ , отличных от 360° , имеет место небольшое количественное различие в показателях λ_1 . В частности, при $\gamma = 300^\circ$ и вышеприведённых значениях упругих постоянных это различие составляет $\sim 4\%$. Изменение упругих постоянных, характеризующих моментные эффекты, приводит к изменению значений λ_1 . Так, при $\alpha = 1.148 \cdot 10^9$ Н/м² различие в показателях λ_1 составляет уже 14% .

Для пластины, нижнее основание которой закреплено, результаты для плоско-деформированного состояния (рисунок 1.15) приведены в таблице 17 при тех же значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$, $b/a = 1$ и угла γ . Размер d соответствует расстоянию от точки с координатами $(a, 0)$ вдоль оси $y = 0$.

Таблица 17 — Первые собственные значения, найденные по формуле (1.24),

для пластины, нижнее основание которой закреплено, при решении

в рамках модели несимметричной теории упругости при ПДС

$\gamma = 90^\circ$				$\gamma = 120^\circ$			
$d \times 10^6$	λ_1	$d \times 10^6$	λ_1	$d \times 10^6$	λ_1	$d \times 10^6$	λ_1
3.97	0.7276	4.53	0.7275	8.56	0.6196	9.81	0.6197
4.08	0.7276	4.65	0.7276	8.80	0.6196	10.09	0.6199
4.19	0.7278	4.77	0.7275	9.05	0.6197	10.36	0.6198
4.29	0.7280	4.90	0.7275	9.29	0.6196	10.64	0.6199
4.41	0.7276	5.02	0.7282	9.55	0.6197	10.93	0.6199

Напомним, что первое собственное значение λ_1 , найденное на основе трансцендентного уравнения (1.18) при $\nu = 0.3$, равно 0.711 для $\gamma = 90^\circ$ и 0.621 для $\gamma = 120^\circ$.

При сравнении результатов, полученных на основе моделей классической (таблица 2) и несимметричной (таблица 17) теорий упругости, можно отметить, что показатели λ_1 , определяющие асимптотику напряжений в окрестности угловой точки, где имеет место смена типа краевых условий, отличаются в пределах 2 % для угла $\gamma = 90^\circ$, и 0.2 % для угла $\gamma = 120^\circ$.

Для составной пластины, представленной на рисунке 1.16, взяты те же механические характеристики $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $G_1/G_2 = 100$ и размеры $b/a = 2$, что и при решении на основе модели классической теории упругости. В таблице 18 приведены результаты расчётов λ_1 для различных значений упругих характеристик α , определяющих моментное напряжённое состояние.

Таблица 18 — Первые собственные значения, найденные по формуле (1.24), для составной пластины при решении в рамках модели несимметричной теории упругости

$d \times 10^6$	λ_1		
	$\alpha = 1.148 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$	$\alpha = 2.3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$	$\alpha = 5.74 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$
1.0403	0.7408	0.7622	0.8448
1.0871	0.7408	0.7622	0.8448
1.1377	0.7406	0.7620	0.8447
1.1883	0.7405	0.7620	0.8447
1.2431	0.7408	0.7622	0.8449
1.2980	0.7406	0.7620	0.8448
1.3573	0.7405	0.7620	0.8448
1.4167	0.7408	0.7622	0.8450
1.4811	0.7408	0.7622	0.8450
1.5454	0.7406	0.7621	0.8449

В данном случае различие первых собственных значений λ_1 , полученных на основе моделей классической и несимметричной теорий упругости, изменяется от 3 % при $\alpha = 1.148 \times 10^8$ Н/м² до 17 % при $\alpha = 5.74 \times 10^8$ Н/м².

Подводя итог сравнению результатов численного анализа поведения напряжений в окрестности особых точек различных типов в двумерных задачах классической и несимметричной теории упругости, можно сказать, что поведение напряжений в окрестности вершины трещины одинаковое для классической и несимметричной теорий упругости. Для других вариантов вырезов, а также в особых точках, где имеет место смена типа граничных условий или контакт различных материалов, показатели сингулярности напряжений, полученные в рамках моделей классической и несимметричной теорий упругости, имеют количественные отличия. Величина этих отличий зависит от механических характеристик, определяющих моментное поведение материала. При этом для значений моментных упругих характеристик композиционного материала с полыми частицами (синтаксической пены), приведённых в работе [127], это различие достаточно мало (в пределах 4 %) для всех рассмотренных вариантов особых точек.

В данном и предыдущих параграфах продемонстрированы возможности разработанной конечно-элементной процедуры вычисления показателей сингулярности напряжений в окрестности особых точек не только для модели классической теории упругости, но и для модели несимметричной теории упругости. Аналогичные исследования на основе данного алгоритма могут быть выполнены и для других моделей деформируемых тел.

Глава 2. Исследование поведения напряжений в окрестности особых точек упругих тел из функционально-градиентных материалов

2.1. Исследование аналитическими методами поведения напряжений в упругих клиновидных телах из функционально-градиентных материалов

Рассматривается плоский клин, вершина которого совпадает с центром полярной системы координат (рисунок 1.2, *a*). Клин занимает область $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \gamma$. Дифференциальные уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

В дальнейшем будем рассматривать клин, выполненный из функционально-градиентного материала (ФГМ), свойства которого непрерывно изменяются вдоль координаты r . Тогда физические соотношения записываются следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda(r) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + 2\mu(r) \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \sigma_\varphi &= \lambda(r) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + 2\mu(r) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right); \\ \tau_{r\varphi} &= \mu(r) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\mu(r)$ — модуль сдвига, $\lambda(r)$ — параметр Ламе, который при плоско-деформированном состоянии связан с модулем сдвига и коэффициентом Пуассона соотношением $\lambda(r) = 2G(r)\nu(r)/[1-2\nu(r)]$, а при плоско-напряжённом состоянии — $\lambda(r) = 2G(r)\nu(r)/[1-\nu(r)]$.

Непосредственно рассматривается наиболее общий вариант зависимости упругих постоянных, а именно, в виде степенного ряда по координате r

$$\begin{aligned}\lambda(r) &= A_0 + A_1r + A_2r^2 + A_3r^3 + \dots; \\ \mu(r) &= B_0 + B_1r + B_2r^2 + B_3r^3 + \dots\end{aligned}\tag{2.3}$$

Отметим, что при данном варианте представления упругих постоянных их значения в вершине клина будут равны A_0 и B_0 соответственно.

Подставляя соотношения (2.2) в уравнения (2.1) с учётом вида упругих постоянных (2.3), можно получить дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для ФГМ, свойства которого имеют зависимость в виде степенного ряда по координате r

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n\right) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2}\right) + \\&+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n\right) \left(2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2u_r}{r^2}\right) + \\&+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} n A_n r^{n-1}\right) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right) + 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n B_n r^{n-1}\right) \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \\&\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n\right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right) + \\&+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n\right) \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2}\right) + \\&+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} n B_n r^{n-1}\right) \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}\right) = 0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Решение для перемещений будем искать в виде обобщённого степенного ряда

$$u_r = \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+\alpha} \xi_r^{(k)}(\varphi), \quad u_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+\alpha} \xi_\varphi^{(k)}(\varphi). \quad (2.5)$$

Искомые перемещения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия в перемещениях (2.4) и одному из вариантов однородных граничных условий на боковых гранях (1.4).

Подстановка принятого вида решения (2.5) в уравнения равновесия (2.4) и приравнивание к нулю выражений при одинаковых степенях r приводит к рекуррентной последовательности задач относительно функций $\xi_r^{(k)}(\varphi)$, $\xi_\varphi^{(k)}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} B_0 \xi_r^{(0)} + (A_0 + 2B_0)(\alpha^2 - 1) \xi_r^{(0)} + [(A_0 + B_0)\alpha - A_0 - 3B_0] \xi_\varphi^{\prime(0)} &= 0, \\ (A_0 + 2B_0) \xi_\varphi^{(0)} + B_0(\alpha^2 - 1) \xi_\varphi^{(0)} + [(A_0 + B_0)\alpha + A_0 + 3B_0] \xi_r^{\prime(0)} &= 0; \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$\begin{aligned} B_0 \xi_r^{(1)} + (A_0 + 2B_0)(\alpha^2 + 2\alpha) \xi_r^{(1)} + [(A_0 + B_0)\alpha - 2B_0] \xi_\varphi^{\prime(1)} + \\ + B_1 \xi_r^{(0)} + [(A_1 + 2B_1)(\alpha^2 + \alpha) - 2B_1] \xi_r^{(0)} + [(A_1 + B_1)\alpha - 3B_1] \xi_\varphi^{\prime(0)} &= 0, \\ (A_0 + 2B_0) \xi_\varphi^{(1)} + B_0(\alpha^2 + 2\alpha) \xi_\varphi^{(1)} + [(A_0 + B_0)\alpha + 2A_0 + 4B_0] \xi_r^{\prime(1)} + \\ + (A_1 + 2B_1) \xi_\varphi^{(0)} + B_1(\alpha^2 + \alpha - 2) \xi_\varphi^{(0)} + [(A_1 + B_1)\alpha + A_1 + 4B_1] \xi_r^{\prime(0)} &= 0; \end{aligned} \quad (2.6b)$$

$$\begin{aligned} B_0 \xi_r^{(2)} + [(A_0 + 2B_0)(\alpha^2 + 4\alpha) + 3A_0 + 6B_0] \xi_r^{(2)} + [(A_0 + B_0)\alpha + A_0 - B_0] \xi_\varphi^{\prime(2)} + \\ + B_1 \xi_r^{(1)} + [(A_1 + 2B_1)(\alpha^2 + 3\alpha) + 2A_1 + 2B_1] \xi_r^{(1)} + [(A_1 + B_1)\alpha + A_1 - 2B_1] \xi_\varphi^{\prime(1)} + \\ + B_2 \xi_r^{(0)} + [(A_2 + 2B_2)(\alpha^2 + 2\alpha) + A_2 - 2B_2] \xi_r^{(0)} + [(A_2 + B_2)\alpha + A_2 - 3B_2] \xi_\varphi^{\prime(0)} &= 0, \\ (A_0 + 2B_0) \xi_\varphi^{(2)} + B_0(\alpha^2 + 4\alpha + 3) \xi_\varphi^{(2)} + [(A_0 + B_0)\alpha + 3A_0 + 5B_0] \xi_r^{\prime(2)} + \\ + (A_1 + 2B_1) \xi_\varphi^{(1)} + B_1(\alpha^2 + 3\alpha) \xi_\varphi^{(1)} + [(A_1 + B_1)\alpha + 2A_1 + 5B_1] \xi_r^{\prime(1)} + \\ + (A_2 + 2B_2) \xi_\varphi^{(0)} + B_2(\alpha^2 + 2\alpha - 3) \xi_\varphi^{(0)} + [(A_2 + B_2)\alpha + A_2 + 5B_2] \xi_r^{\prime(0)} &= 0; \end{aligned} \quad (2.6b)$$

...

Аналогично могут быть получены соответствующие последовательности для однородных граничных условий в перемещениях

$$\xi_r^{(0)} = 0, \quad \xi_\varphi^{(0)} = 0; \quad (2.7a)$$

$$\xi_r^{(1)} = 0, \quad \xi_\varphi^{(1)} = 0; \quad (2.7б)$$

$$\xi_r^{(2)} = 0, \quad \xi_\varphi^{(2)} = 0; \quad (2.7в)$$

...

и в напряжениях

$$(A_0 + 2B_0)\xi_\varphi'^{(0)} + ((\alpha + 1)A_0 + 2B_0)\xi_r^{(0)} = 0, \quad \xi_r'^{(0)} + (\alpha - 1)\xi_\varphi^{(0)} = 0; \quad (2.8a)$$

$$(A_1 + 2B_1)\xi_\varphi'^{(1)} + ((\alpha + 2)A_1 + 2B_1)\xi_r^{(1)} = 0, \quad \xi_r'^{(1)} + \alpha\xi_\varphi^{(1)} = 0; \quad (2.8б)$$

$$(A_2 + 2B_2)\xi_\varphi'^{(2)} + ((\alpha + 3)A_2 + 2B_2)\xi_r^{(2)} = 0, \quad \xi_r'^{(2)} + (\alpha + 1)\xi_\varphi^{(2)} = 0; \quad (2.8в)$$

...

Из анализа полученной рекуррентной последовательности задач (2.6) следует, что собственные значения α будут определяться первой системой уравнений (2.6a) относительно функций $\xi_r^{(0)}(\varphi)$, $\xi_\varphi^{(0)}(\varphi)$ и краевыми условиями (2.7a) или (2.8a).

Система уравнений (2.6a) с краевыми условиями (2.7a) или (2.8a) эквивалентна задаче Штурма – Лиувилля (1.5) с соответствующими краевыми условиями (1.6a) или (1.6б) для построения собственных решений однородного клина с упругими постоянными $\lambda = A_0$, $\mu = B_0$.

Чтобы это показать, сначала разделим систему уравнений (2.6a) на B_0 :

$$\xi_r''^{(0)} + \left(\frac{A_0}{B_0} + 2\right)(\alpha^2 - 1)\xi_r^{(0)} + \left(\left(\frac{A_0}{B_0} + 1\right)\alpha - \frac{A_0}{B_0} - 3\right)\xi_\varphi'^{(0)} = 0,$$

$$\left(\frac{A_0}{B_0} + 2\right)\xi_\varphi''^{(0)} + (\alpha^2 - 1)\xi_\varphi^{(0)} + \left(\left(\frac{A_0}{B_0} + 1\right)\alpha + \frac{A_0}{B_0} + 3\right)\xi_r'^{(0)} = 0.$$

Вводя обозначение $\chi = \frac{A_0}{B_0} + 1$, получим:

$$\begin{aligned} \xi_r^{(0)} + (\chi + 1)(\alpha^2 - 1)\xi_r^{(0)} + (\chi\alpha - \chi - 2)\xi_\varphi^{(0)} &= 0, \\ (\chi + 1)\xi_\varphi^{(0)} + (\alpha^2 - 1)\xi_\varphi^{(0)} + (\chi\alpha + \chi + 2)\xi_r^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Система (2.9) в точности совпадает с задачей Штурма – Лиувилля (1.5).

Исходя из этого следует, что поведение напряжений в вершине клина из ФГМ, свойства которого непрерывно изменяются по радиусу, определяется геометрией клина (углом раствора) и значениями упругих характеристик в вершине клина $\lambda = A_0$, $\mu = B_0$.

2.2. Численные исследования напряжений в окрестности особых точек упругих тел из функционально-градиентных материалов

Для обоснования и обобщения результатов о поведении напряжений вблизи особых точек упругих тел, имеющих функционально-градиентные свойства, приведём результаты цикла численных экспериментов.

В качестве первой задачи рассмотрим трапециевидную пластину (рисунок 2.1), нижняя грань которой неподвижна, а на верхней грани задана нормальная распределённая нагрузка P . Отношение большего основания пластины $2a$ к её высоте h равно $4/\sqrt{3}$. Угол в основании пластины равен $\pi/3$. В рассматриваемой задаче угловые точки нижнего основания являются особыми, в которых меняется тип краевых условий. Поведение напряжений в окрестности этих точек определяется величиной угла γ и значением коэффициента Пуассона материала ν , что следует из анализа собственных решений для однородного клина. На рисунках 1.6 и 1.7 в пространстве параметров (γ, ν) построены кривые, определяющие области решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений для ПДС и ПНС. Согласно данным, приведённым на рисунке 1.6,

для пластины, представленной на рисунке 2.1, при ПДС и величине угла $\gamma = \pi/3$ сингулярные решения будут иметь место при $\nu > 0.25$, для $\nu = 0.25$ напряжения в угловых точках будут конечны, а при $\nu < 0.25$ напряжения в угловой точке будут равны нулю.

Рассмотрим вариант, когда окрестность угловой точки, определяемая радиусом R , выполнена из ФГМ, коэффициент Пуассона которого изменяется линейно по радиусу от значения в угловой точке $\nu = \nu_0$ до значения $\nu = 0.4$ на дуге радиуса R . В оставшейся части пластины материал однороден и имеет значение коэффициента Пуассона $\nu = 0.4$ (рисунок 2.2).

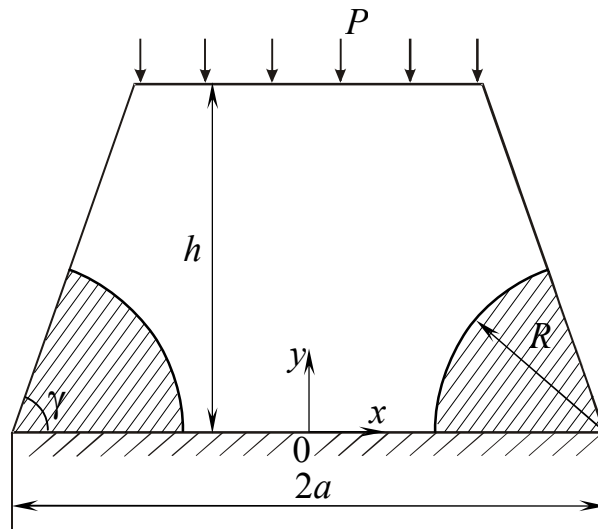


Рисунок 2.1 — Расчётная схема пластины

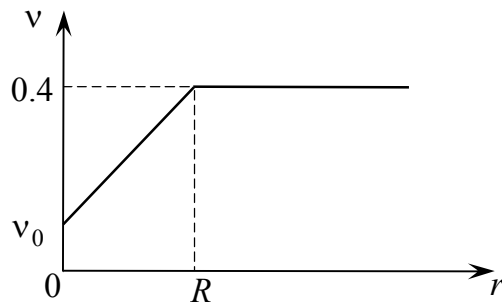


Рисунок 2.2 — Зависимость коэффициента Пуассона от расстояния до особой точки

Численные результаты при ПДС для рассматриваемых задач получены на основе метода конечных элементов. При этом использованы описанные в разделе 1.2 варианты дискретизации, которые обеспечивают необходимую точность для анализа напряжений в окрестности особых точек. Расчёты были выполнены для значений $\nu_0 > 0.25$, $\nu_0 = 0.25$ и $\nu_0 < 0.25$. Полученные численные результаты показывают, что напряжения в особых точках при $\nu_0 > 0.25$ стремятся к бесконечности при увеличении степени дискретизации, при $\nu_0 = 0.25$ имеют конечные значения, а при $\nu_0 < 0.25$ — стремятся к нулю.

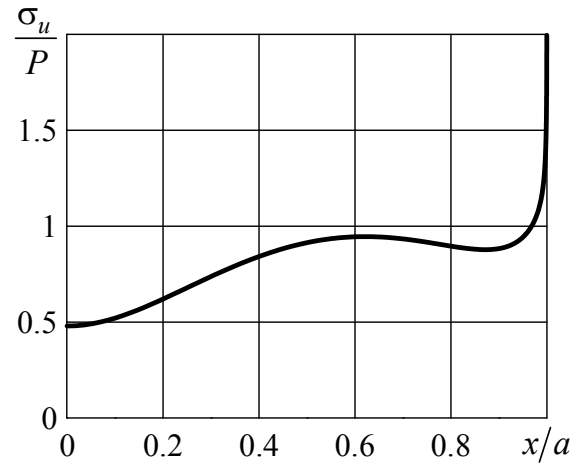
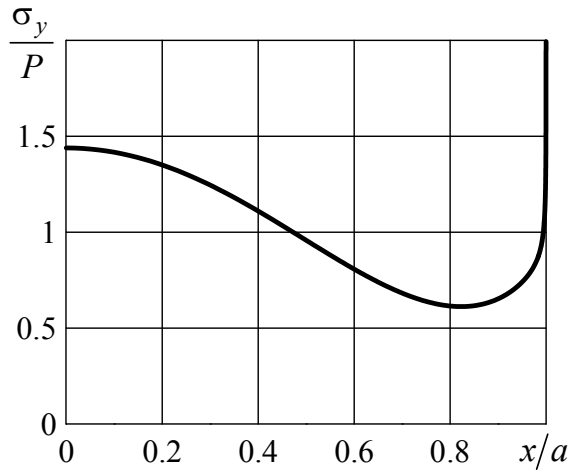
Демонстрацией этих результатов являются приведённые на рисунке 2.3 распределения напряжений σ_y и интенсивности напряжений σ_u при $\nu_0 = 0.4$, $\nu_0 = 0.25$, $\nu_0 = 0.1$ при $R_0/a = 0.1$. Аналогичные результаты при $R_0/a = 0.5$ приведены на рисунке 2.4.

Рассмотрим вариант, когда градиентные свойства изменяются не по линейному закону. Пусть на участке от 0 до R коэффициент Пуассона изменяется по закону $\nu_0 + (0.4 - \nu_0)\sqrt{r/R}$ (рисунок 2.5). На рисунке 2.6 для данного варианта градиентных свойств приведены распределения напряжений σ_y и интенсивности напряжений σ_u по нижней грани трапеции для $\nu_0 = 0.4$, $\nu_0 = 0.25$, $\nu_0 = 0.1$, при $R_0/a = 0.1$.

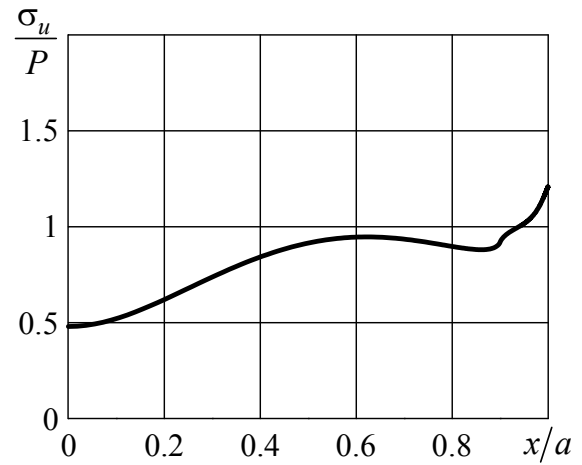
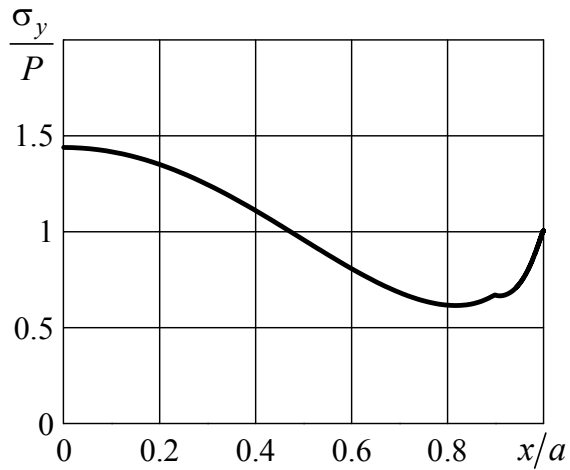
Полученные численные результаты подтверждают заключение аналитического решения, состоящее в том, что поведение напряжений в окрестностях особых точек при наличии градиентных упругих свойств по радиусу определяется значениями упругих характеристик в этих точках.

Следующая задача отличается от предыдущей тем, что из ФГМ выполнен наружный слой боковой поверхности пластины толщиной t (рисунок 2.7), в котором коэффициент Пуассона изменяется по линейному закону вдоль координаты x от значения $\nu = \nu_0$ на внешней поверхности до значения $\nu = 0.4$ на внутренней стороне слоя. Таким образом, в данном варианте в элементе из ФГМ упругие характеристики изменяются не только по координате r ,

$$\nu_0 = 0.4$$



$$\nu_0 = 0.25$$



$$\nu_0 = 0.1$$

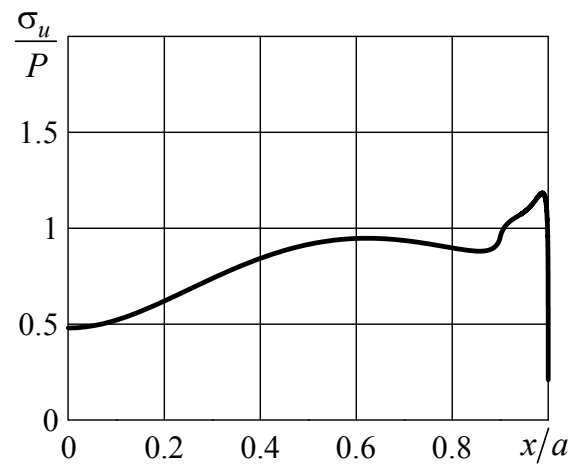
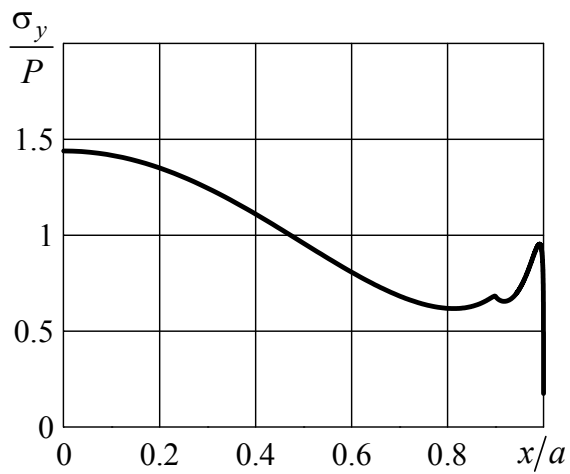


Рисунок 2.3 — Распределение напряжений σ_y и σ_u по нижнему торцу пластины при $\nu_0 = 0.4$, $\nu_0 = 0.25$, $\nu_0 = 0.1$ и $R/a = 0.1$

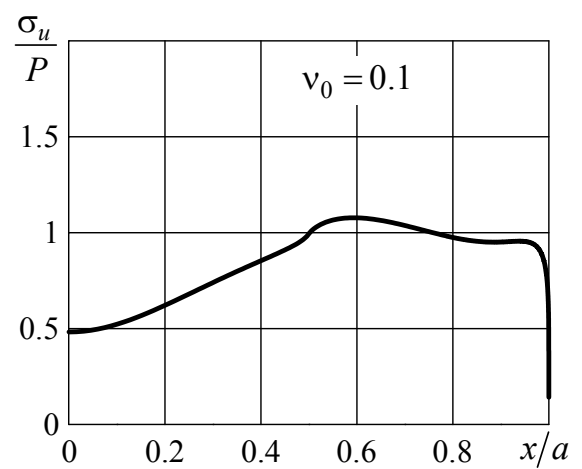
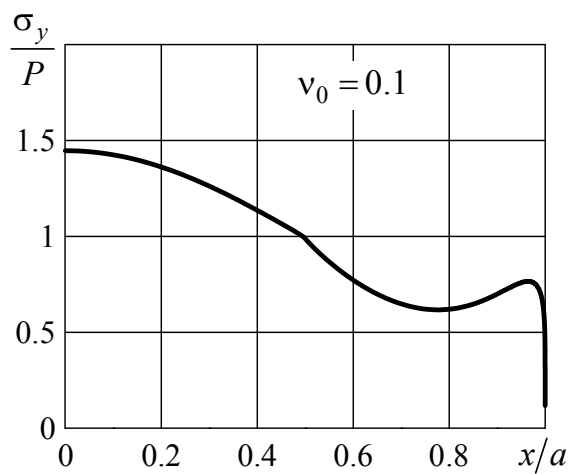
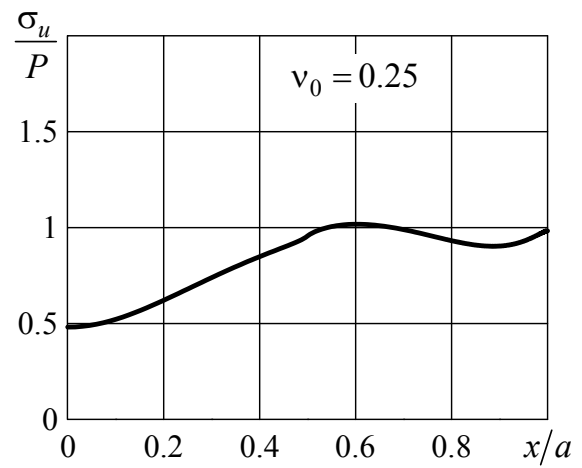
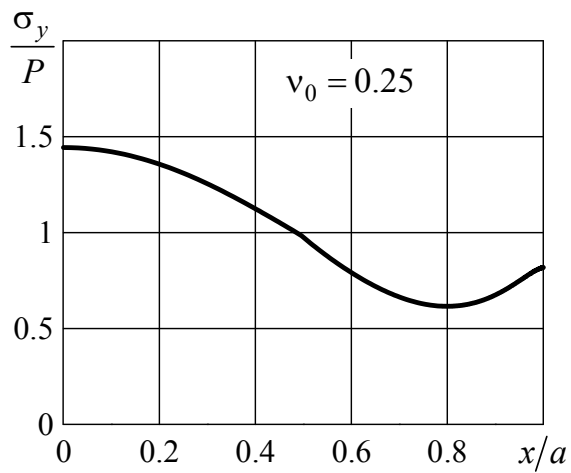
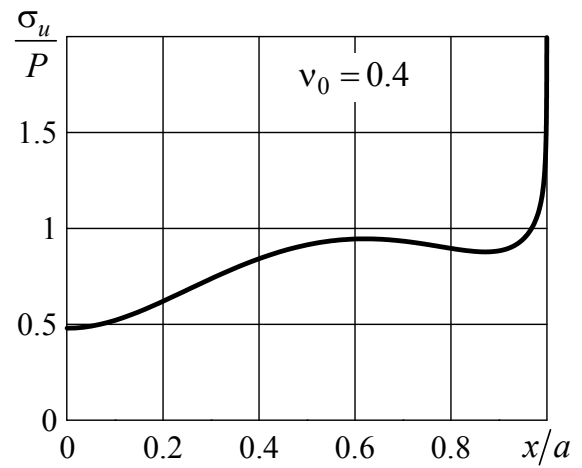
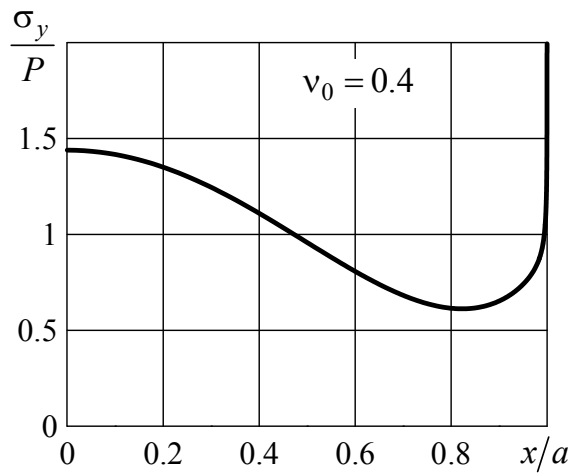


Рисунок 2.4 — Распределение напряжений σ_y и σ_u по нижнему торцу пластины при $\nu_0 = 0.4$, $\nu_0 = 0.25$, $\nu_0 = 0.1$ и $R/a = 0.5$

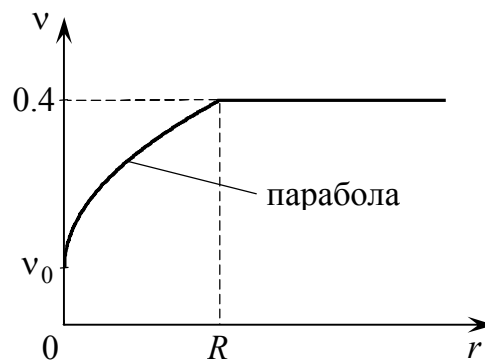


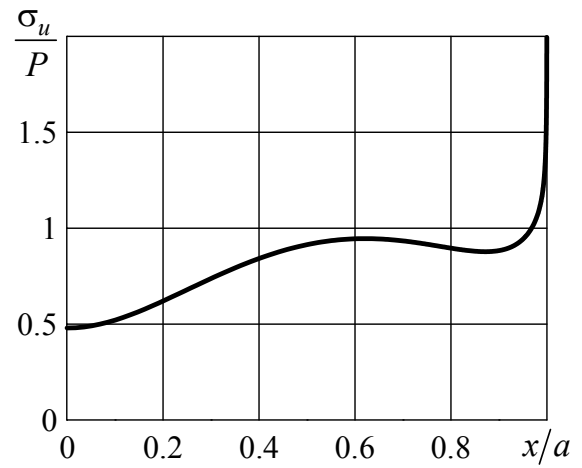
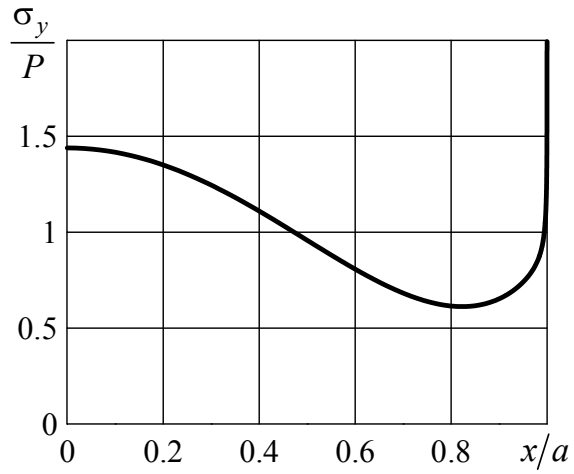
Рисунок 2.5 — Зависимость коэффициента Пуассона вдоль радиуса:

$$0 \leq r \leq R, \quad \nu = \nu_0 + (0.4 - \nu_0) \sqrt{\frac{r}{R}}; \quad r > R, \quad \nu = 0.4$$

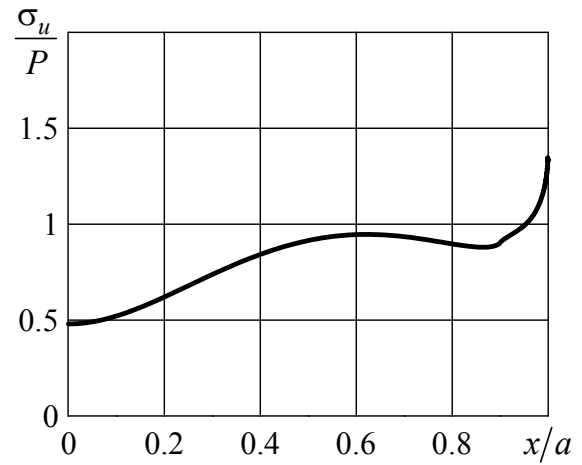
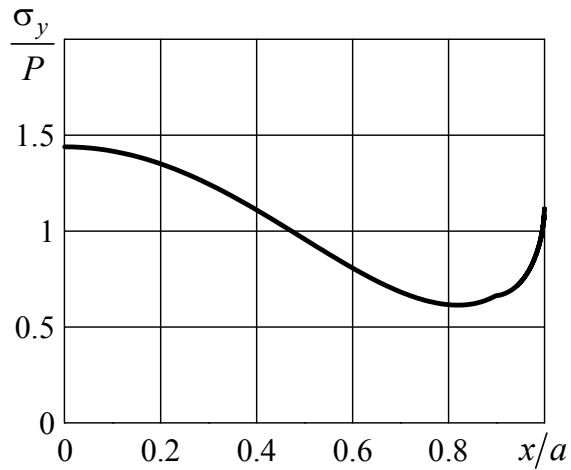
но и от угловой координаты полярной системы. Для данного варианта также были выполнены расчёты при различных значениях коэффициента Пуассона $0 \leq \nu_0 \leq 0.4$, которые показали, что при градиентной зависимости упругих характеристик материала от обеих полярных координат поведение напряжений в окрестностях особых точек определяется свойствами материала в этих точках. В качестве демонстрации на рисунке 2.8 приведены распределения напряжений по нижнему торцу при различных значениях коэффициента Пуассона ν_0 в особой точке.

Рассмотрим задачи с особыми точками на поверхности тела, где имеет место скрепление различных материалов. Пример такой задачи приведён на рисунке 2.9. Одна из пластин имеет упругие характеристики E_1, ν_1 . В другой пластине упругие характеристики E_2, ν_2 в зоне с однородными свойствами имеют значения E_2', ν_2' , а в зоне из ФГМ изменяются вдоль радиуса по линейному закону от значений E_2^0, ν_2^0 в особой точке до значений E_2', ν_2' на дуге радиуса R . Для рассмотренной особой точки при однородных свойствах материалов поведение напряжений определяется величинами углов в окрестности этой точки, образованными касательными в особой точке к внешней поверхности и поверхности контакта двух материалов, значениями коэффициента Пуассона ν_1, ν_2 и отношением модулей E_2/E_1 .

$$\nu_0 = 0.4$$



$$\nu_0 = 0.25$$



$$\nu_0 = 0.1$$

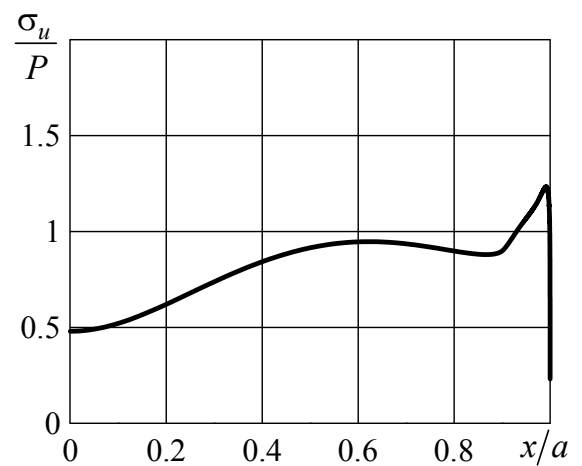
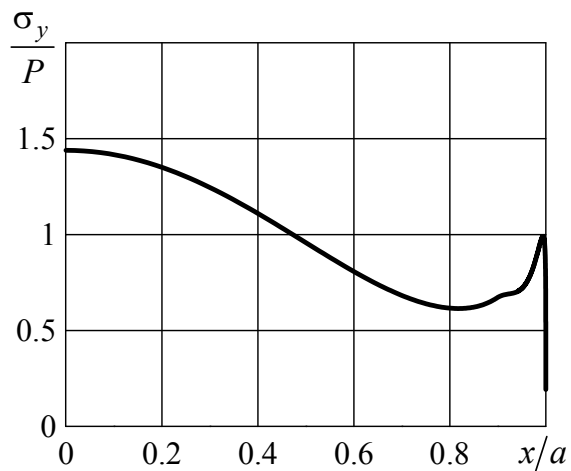


Рисунок 2.6 — Распределение напряжений σ_y и σ_u по нижнему торцу пластины при $\nu_0 = 0.4$, $\nu_0 = 0.25$, $\nu_0 = 0.1$ и $R/a = 0.1$

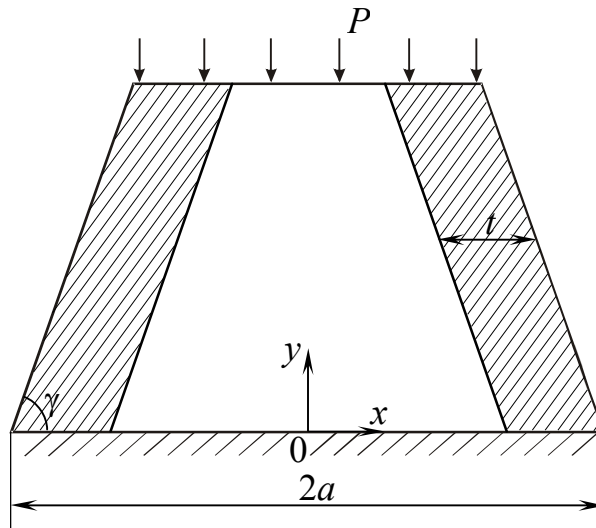
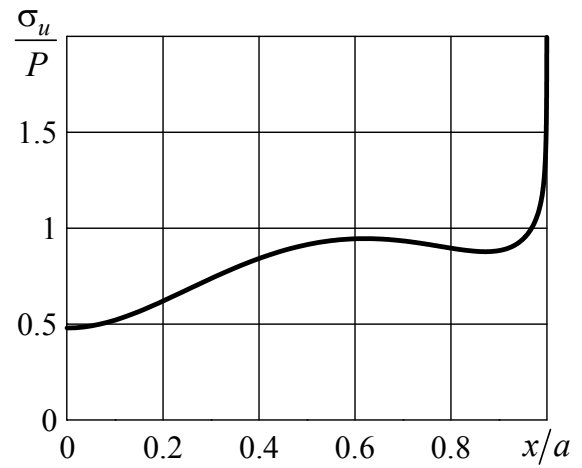
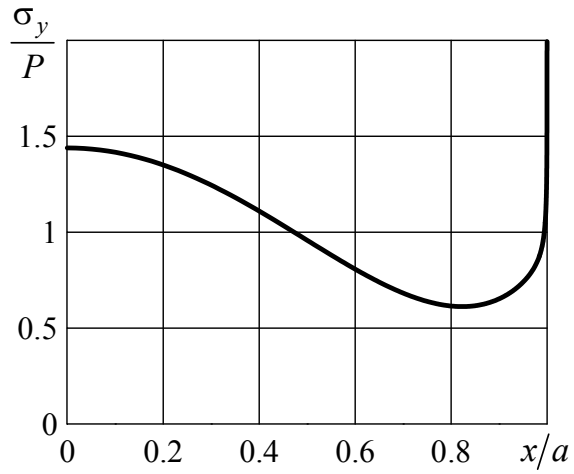


Рисунок 2.7 — Расчётная схема пластины

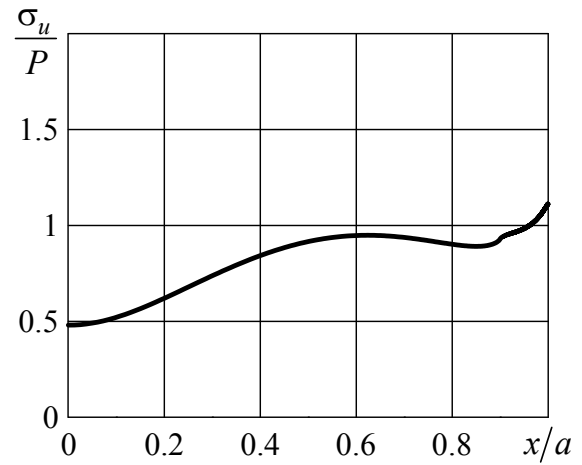
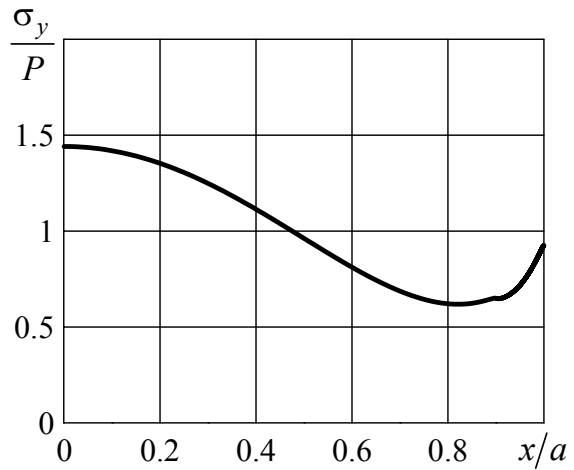
В рассматриваемом примере $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi/2$, значения E_1 и ν_1 заданы. Следуя результатам, приведённым в разделе 1.1, можно в пространстве параметров $(E_2/E_1, \nu_2)$ построить кривую, которая разделяет области сингулярных и несингулярных решений (рисунок 2.10). Для исследуемой составной пластины выполнены расчёты напряжений при ПДС и различных значениях E_2^0, ν_2^0 . При этом E_2^0, ν_2^0 выбирались таким образом, чтобы их значения в области параметров на рисунке 2.10 соответствовали сингулярным, конечным, или нулевым значениям напряжений в особых точках. Здесь возможны различные сценарии изменения упругих характеристик вдоль радиуса r . Эти сценарии приведены на рисунке 2.11.

На рисунках 2.12–2.14 приведены картины распределения напряжений σ_y по поверхности идеального соединения двух материалов. Результаты на рисунке 2.12 соответствуют ФГМ с линейным изменением коэффициента Пуассона ν_2 вдоль радиуса (рисунок 2.11, а), на рисунке 2.13 — ФГМ с линейным изменением модуля E_2 вдоль радиуса (рисунок 2.11, б) и на рисунке 2.14 — ФГМ с линейным изменением E_2 и ν_2 вдоль радиуса (рисунок 2.11, в). На рисунках 2.12, 2.14 представлен один из вариантов с сингулярным решением, вариант со значениями E_2^0, ν_2^0 , при которых напряжения имеют в особой точке конечные значения, и один из вариантов с нулевыми напряжениями в особых точках.

$$\nu_0 = 0.4$$



$$\nu_0 = 0.25$$



$$\nu_0 = 0.1$$

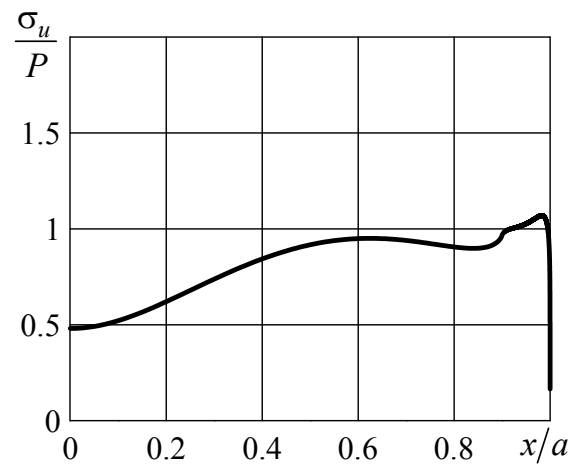
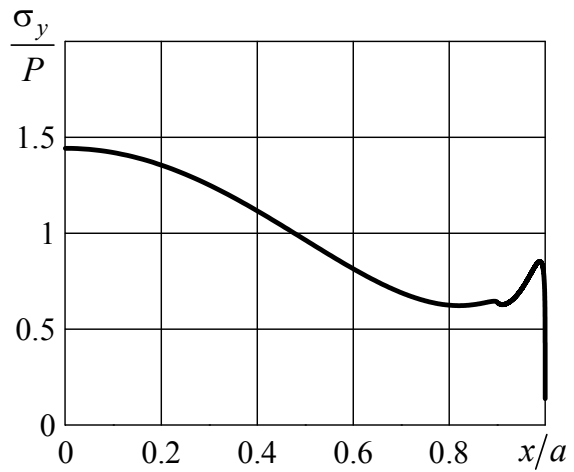


Рисунок 2.8 — Распределение напряжений σ_y и σ_u по нижнему торцу пластины при $\nu_0 = 0.4$, $\nu_0 = 0.25$, $\nu_0 = 0.1$ и $R/a = 0.1$

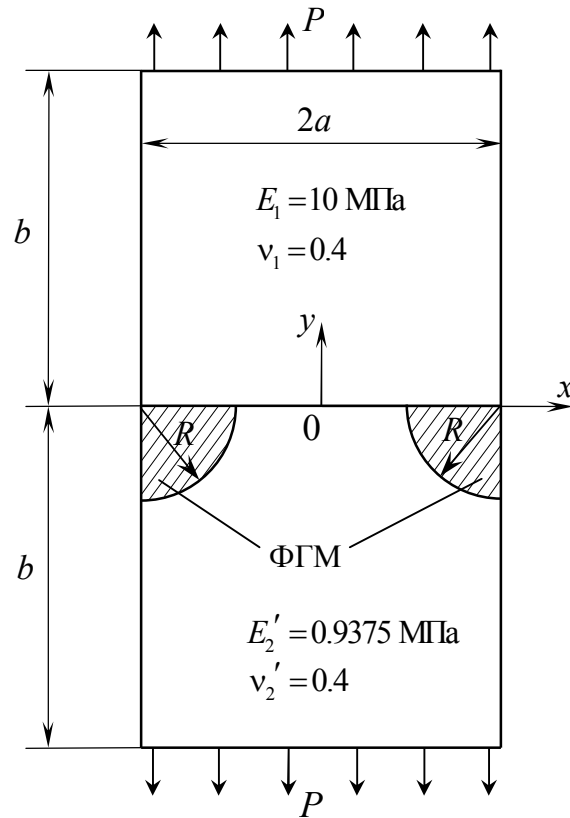


Рисунок 2.9 — Составная плита с включениями из ФГМ, свойства которого изменяются по радиусу

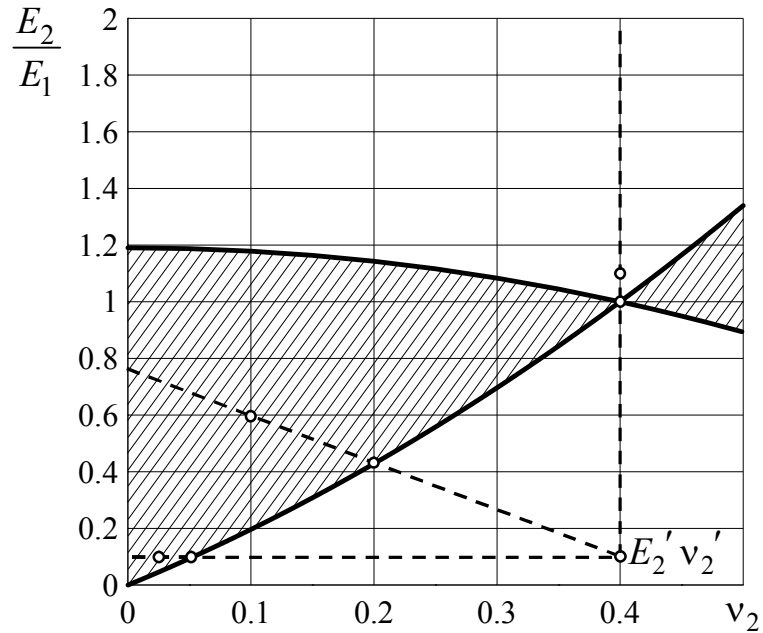


Рисунок 2.10 — Кривая, разделяющая решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений, при $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi/2$, $E_1 = 10^7$ Па, $\nu_1 = 0.4$ (штриховкой отмечены области решений без сингулярности)

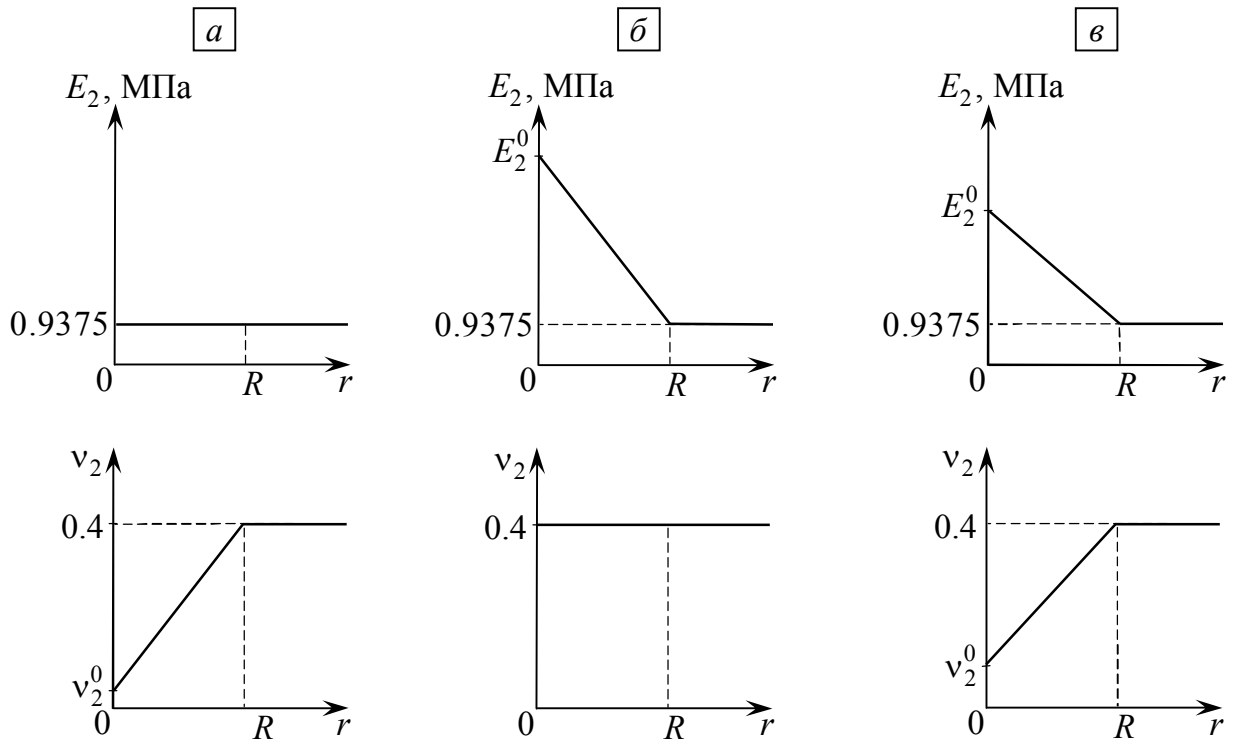


Рисунок 2.11 — Зависимость упругих характеристик вдоль радиуса из особой точки

На рисунке 2.13 представлены два варианта с сингулярными решениями и вариант с конечными значениями напряжений в особой точке. Все результаты на рисунках 2.12–2.14 приведены для двух значений R/a .

Заключительный пример в рассматриваемой серии численных экспериментов важен не только для теоретических обобщений, но и может иметь конкретные приложения в практике клеевых соединений. Рассматривается вариант клеевого соединения двух пластин (рисунок 2.15). Здесь $E_1 = 10$ МПа, $\nu_1 = 0.3$. Клеевой слой имеет характеристики E_2, ν_2 , которые в средней однородной части равны $E_2' = 1$ МПа, $\nu_2' = 0.35$, а в краевой части, выполненной из ФГМ, упругие свойства изменяются по линейному или нелинейному (степенному, параболическому) закону вдоль координаты x . Как и в предыдущей задаче, для рассматриваемых параметров $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi/2$, $E_1 = 10$ МПа, $\nu_1 = 0.3$ приведём в плоскости параметров $(E_2/E_1, \nu_2)$ кривую, разделяющую решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений (рисунок 2.16).

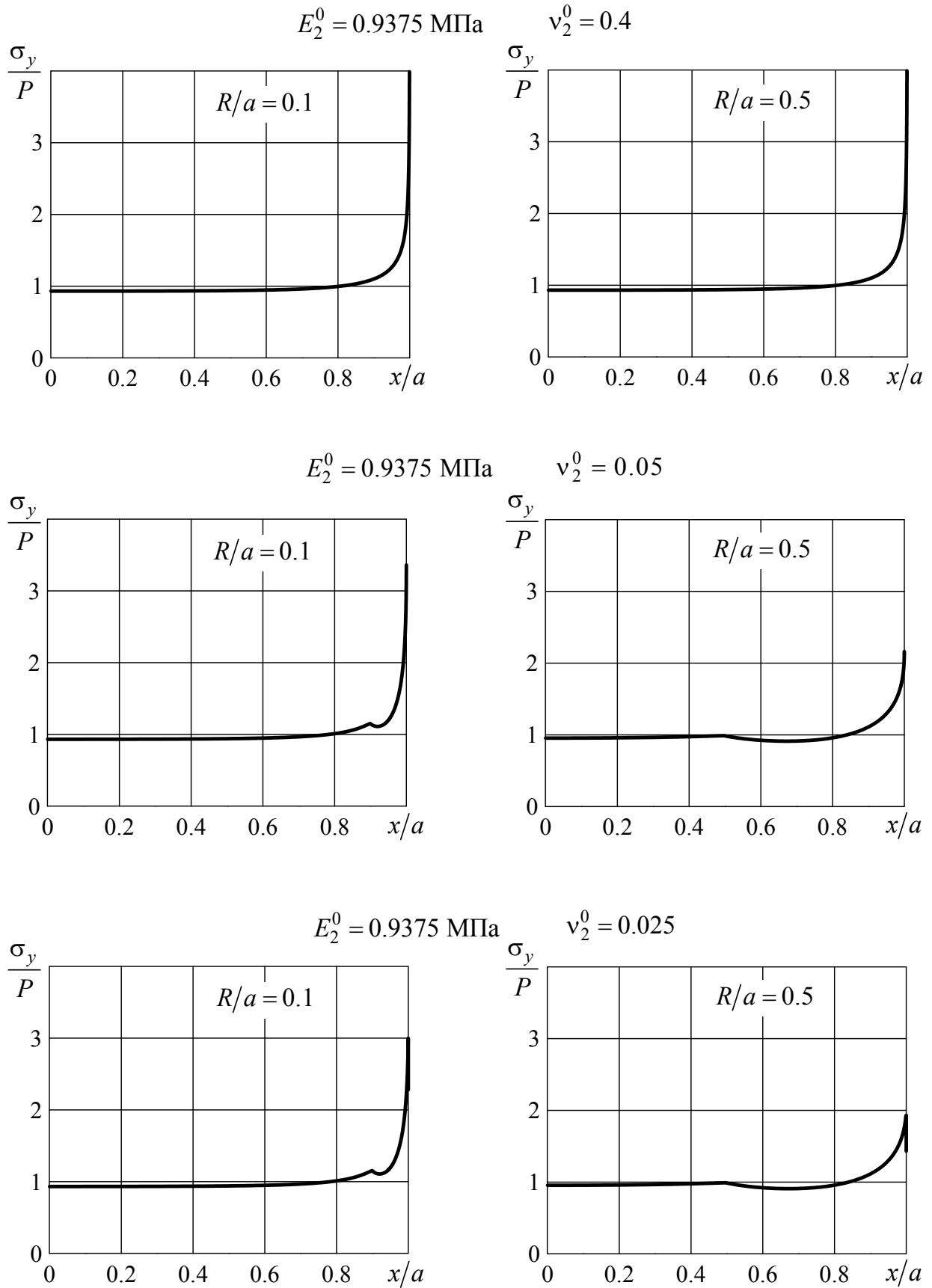


Рисунок 2.12 — Распределение напряжений σ_y по поверхности идеального соединения двух материалов при варианте изменения упругих характеристик согласно рисунку 2.11, *a*

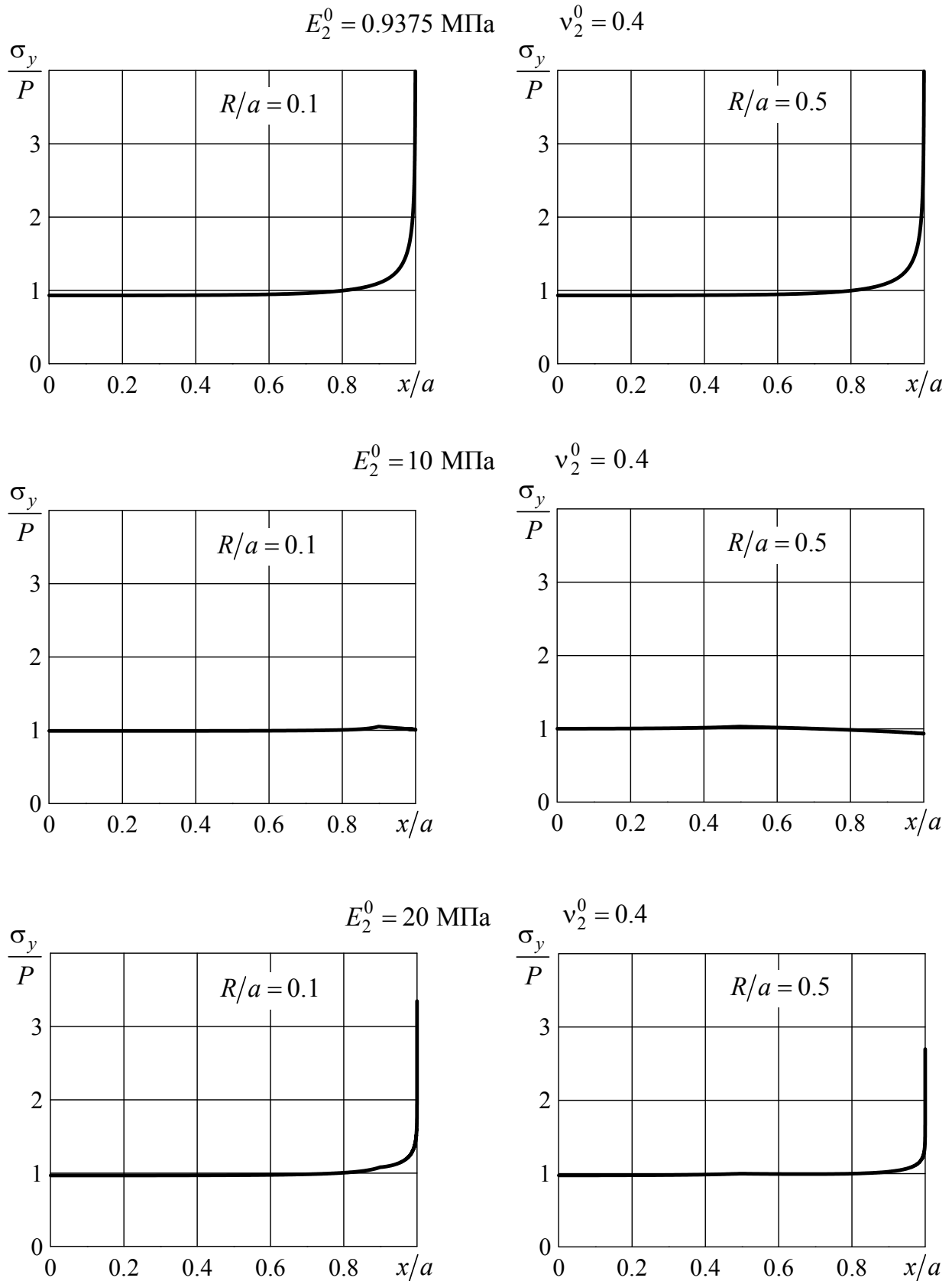


Рисунок 2.13 — Распределение напряжений σ_y по поверхности идеального соединения двух материалов при варианте изменения упругих характеристик согласно рисунку 2.11, б

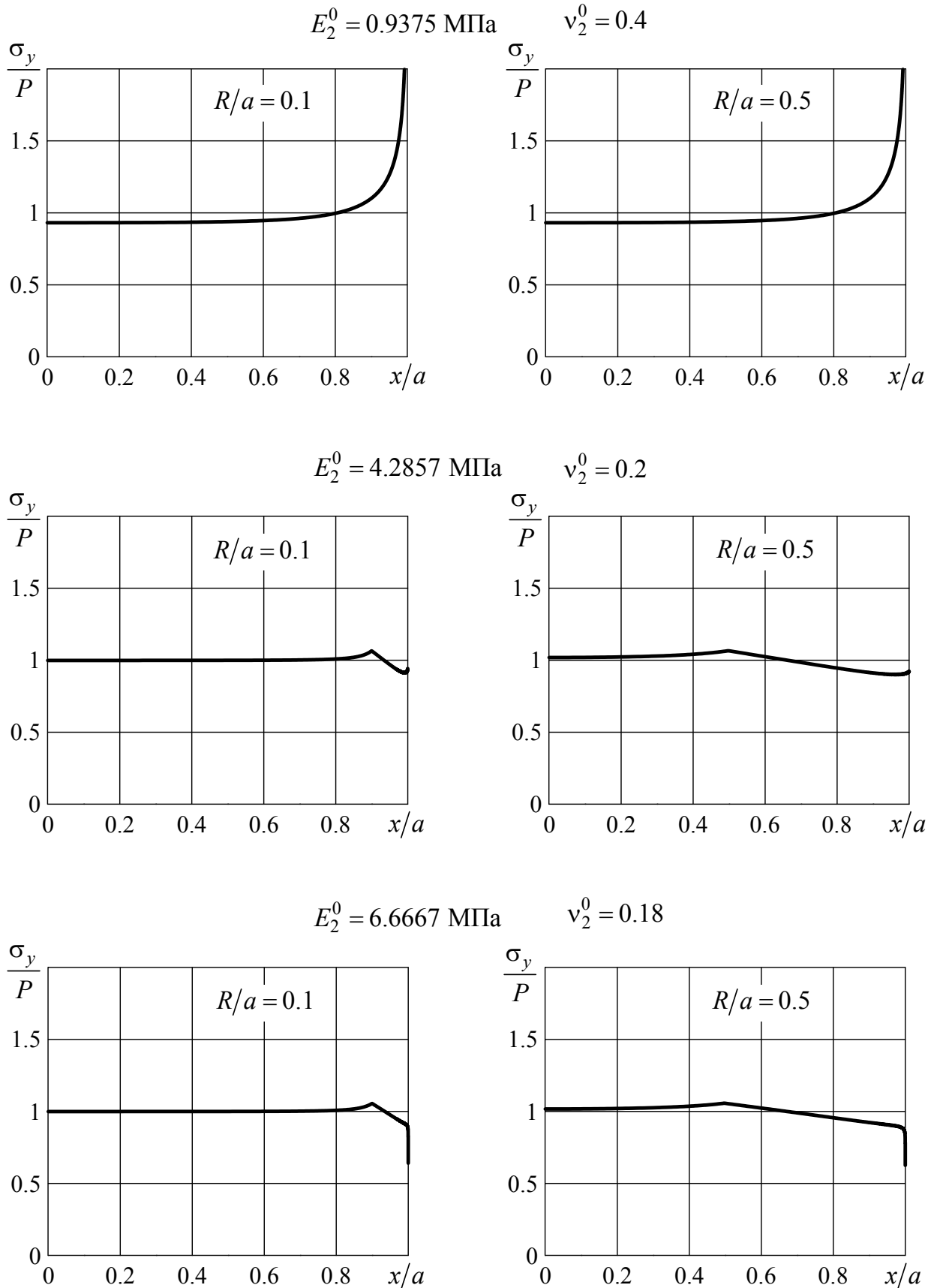


Рисунок 2.14 — Распределение напряжений σ_y по поверхности идеального соединения двух материалов при варианте изменения упругих характеристик согласно рисунку 2.11, в

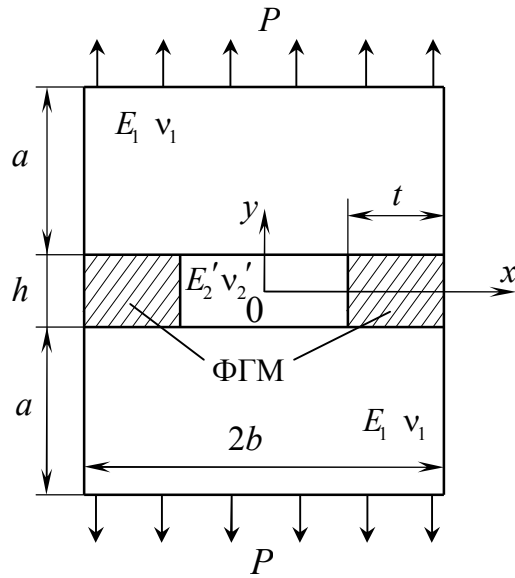


Рисунок 2.15 — Трёхслойная пластина с прослойкой, содержащей подобласть из ФГМ

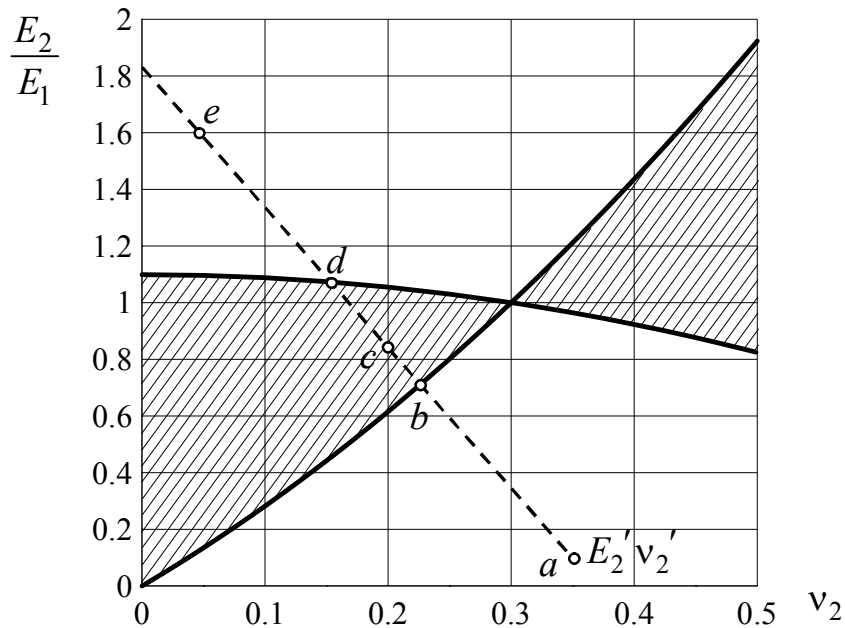


Рисунок 2.16 — Кривая, разделяющая в области параметров E_2/E_1 и ν_2 решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений, при $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi/2$, $E_1 = 10$ МПа, $\nu_1 = 0.3$ (штриховкой отмечены области решений без сингулярности)

На рисунке 2.17 приведены варианты значений упругих характеристик в клеевом слое при их линейном (а) и нелинейном (б) изменении в зоне,

выполненной из ФГМ. Точки a, b, c, d, e на рисунке 2.16 определяют сценарий численных экспериментов, связанный с выбором различных значений E_2^0, ν_2^0 .

На рисунках 2.18, 2.19 приведены картины распределения напряжений σ_y по границе материал–клей при размерах пластины $a/b = 2$, $h/b = 0.2$ и $t/b = 0.1$. Результаты на рисунке 2.18 соответствуют линейному изменению модуля Юнга E_2 и коэффициента Пуассона ν_2 (рисунок 2.17, *a*) вдоль градиентной по свойствам клеевой зоны при значениях E_2^0, ν_2^0 , соответствующих точкам a, b, c, d, e на рисунке 2.16. На рисунке 2.19 результаты приведены при нелинейном изменении упругих характеристик в градиентном по свойствам участке клеевого слоя (рисунок 2.17, *б*) при тех же значениях E_2^0, ν_2^0 , соответствующих точкам a, b, c, d, e на рисунке 2.16. На каждом из рисунков 2.18, 2.19 представлены два варианта с сингулярным решением (a, e), два варианта со значениями E_2^0, ν_2^0 , при которых напряжения имеют в особых точках конечные значения (b, d), и вариант с нулевыми напряжениями в особых точках (c).

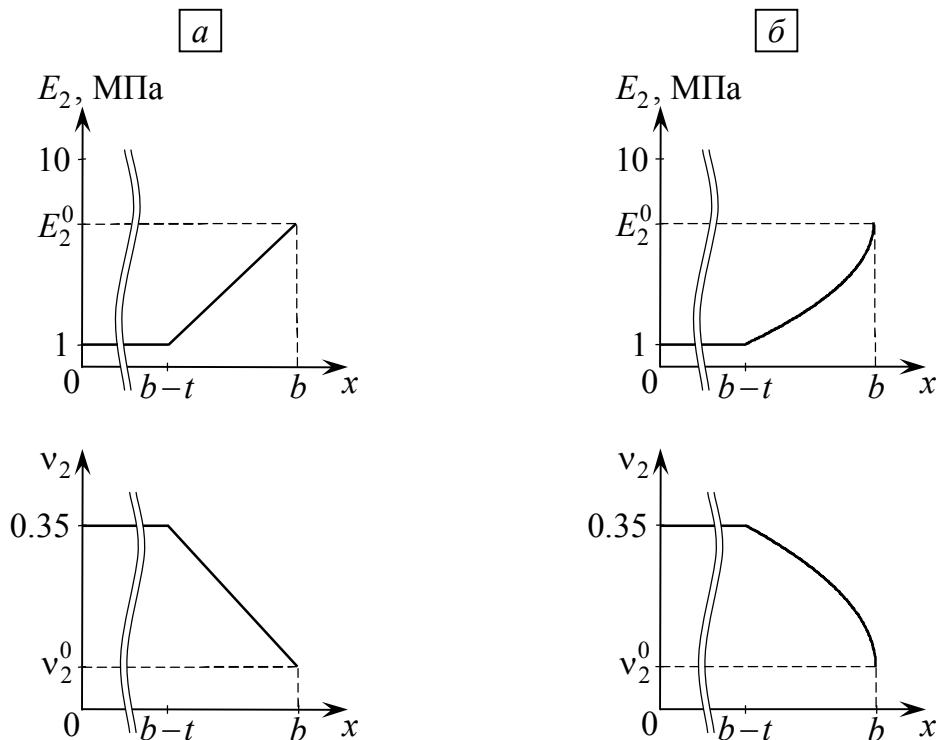


Рисунок 2.17 — Варианты изменения упругих свойств по длине клеевого слоя при их линейном (*a*) и нелинейном (*б*) изменениях в зоне, являющейся ФГМ

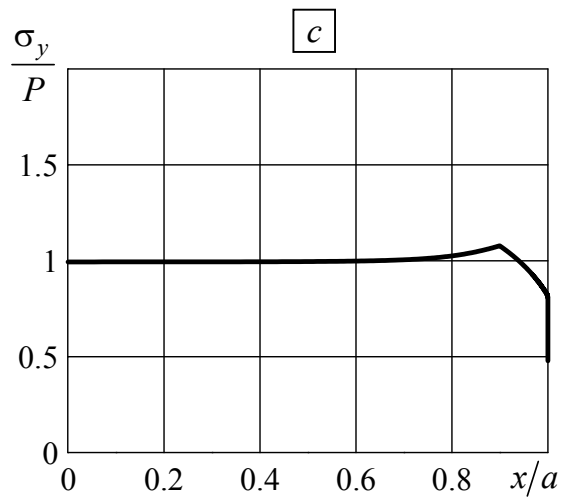
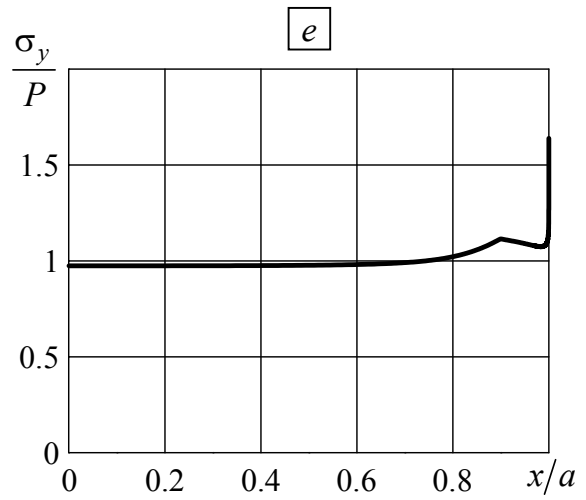
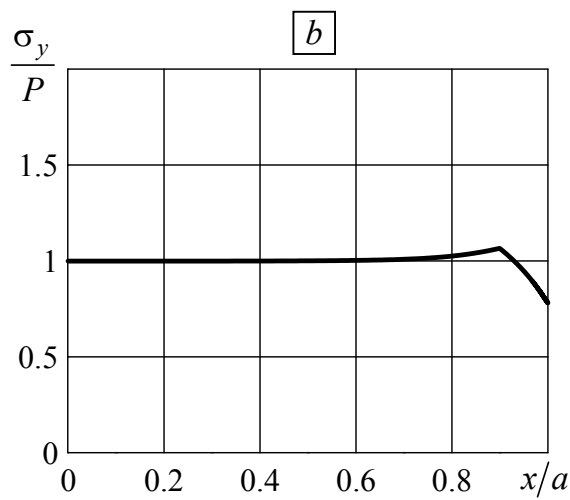
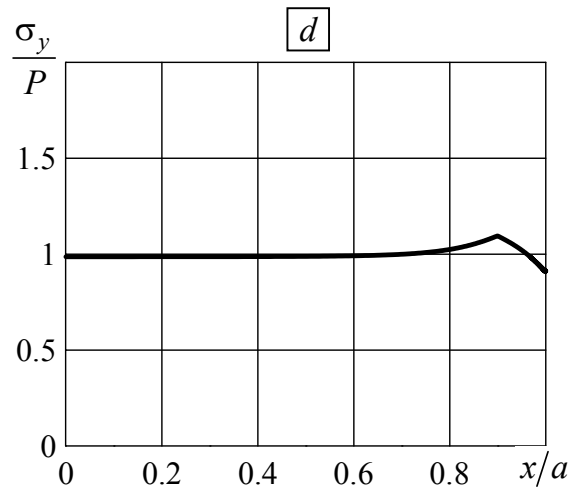
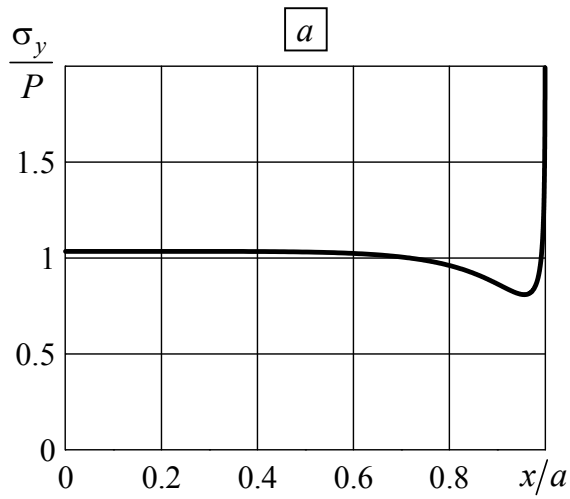


Рисунок 2.18 — Распределение напряжений σ_y по поверхности идеального соединения двух материалов при варианте линейной зависимости упругих характеристик в градиентном по свойствам участке клеевого слоя (рисунок 2.17, *a*) для различных значений E_2^0, ν_2^0

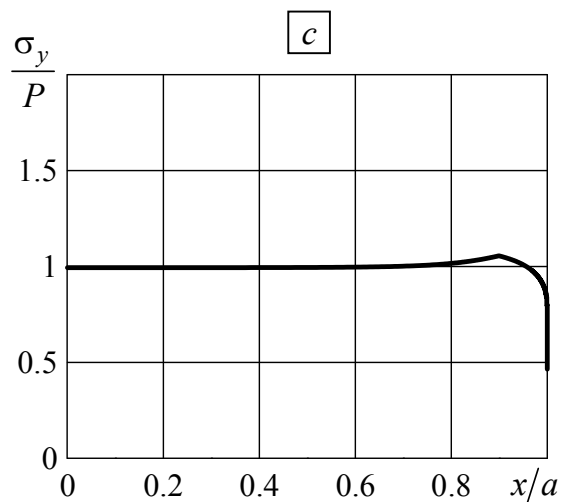
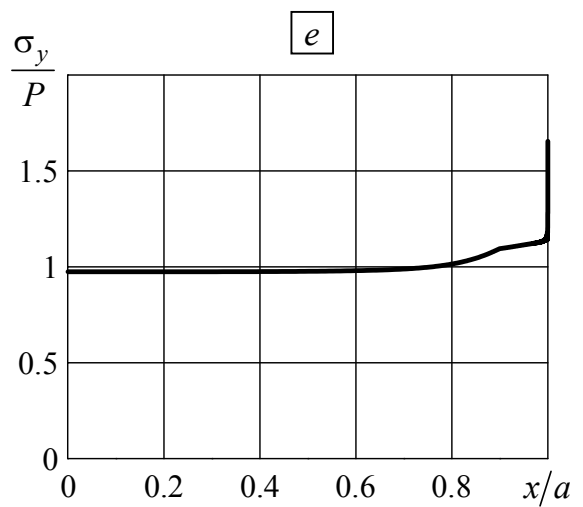
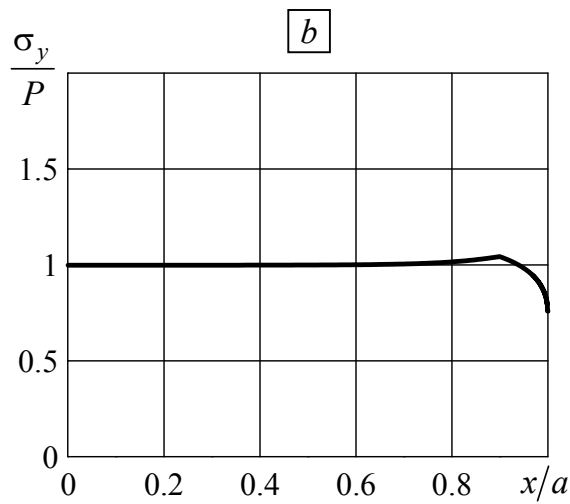
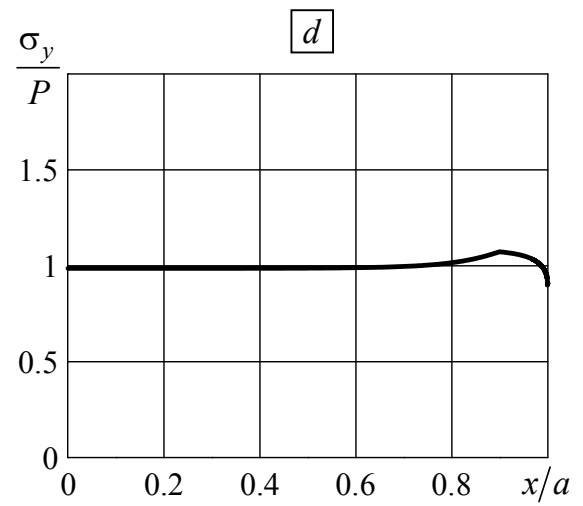
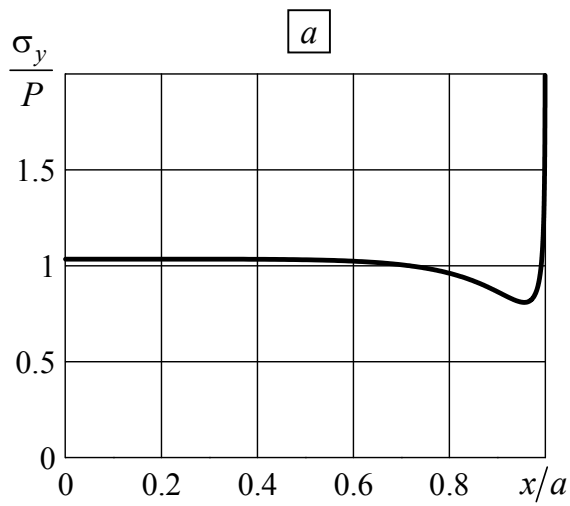


Рисунок 2.19 — Распределение напряжений σ_y по поверхности идеального соединения двух материалов при варианте нелинейной зависимости упругих характеристик в градиентном по свойствам участке клеевого слоя (рисунок 2.17, б) для различных значений E_2^0, ν_2^0

Обобщая результаты численных экспериментов, можно сделать вывод о том, что поведение напряжений в различных вариантах особых точек упругих тел из ФГМ не зависит от варианта непрерывного распределения упругих свойств в окрестности особых точек и определяется их значениями в этих точках.

Глава 3. Оптимизация геометрии и упругих характеристик материала в окрестности особых точек

3.1. Математическая постановка задачи оптимизации геометрии и упругих характеристик материала в окрестности особых точек и её численная реализация

Одним из важных этапов математического моделирования является построение геометрического образа объекта. Реализация этого этапа приводит к проблеме, суть которой состоит в том, что приближение геометрического образа к реальному объекту усложняет дальнейший процесс математического моделирования. Решение этой проблемы, как правило, связано с компромиссом между стремлением приблизить геометрию к реальному объекту и возможностью довести математическое моделирование до конкретных численных результатов. Следствием этого компромисса является появление в расчётных схемах особых точек на границе тела, в которых имеет место нарушение гладкости границы, смена типа краевых условий, контакт различных материалов.

В первой главе настоящей диссертации были приведены результаты, демонстрирующие возможность появления в таких точках сингулярных решений, связанных с бесконечными значениями напряжений. Данный математический результат, полученный в рамках модели линейной теории упругости и идеализированной геометрии реального объекта, отражает известные экспериментальные результаты, многочисленные примеры расчётов напряжённо-деформированного состояния конструкций, машин и сооружений, опыт их эксплуатации, свидетельствующие о том, что окрестности особых точек являются зонами ярко выраженной концентрации напряжений. Именно в этих точках

происходит накопление повреждений, снижение прочности и разрушение конструкций. Накопленный опыт и известные теоретические результаты говорят о том, что на уровень напряжённо-деформированного состояния в окрестности особых точек большое влияние оказывают форма поверхности и механические характеристики материалов.

Данное обобщение отражает одно из направлений снижения уровня напряжённого состояния, связанное с изменением формы поверхности тела в окрестности особых точек и выбором материалов. Анализ практических приложений демонстрирует использование в этом направлении различных конструктивных решений. На рисунке 3.1 показаны некоторые из таких практических реализаций. Приведённые обобщения и результаты исследований, отмеченных во введении, отражают актуальность поиска оптимальных решений, в том числе на основе математического моделирования.

Задачи нахождения оптимальной геометрии и оптимального варианта распределения упругих свойств материала в окрестности особых точек (линий) связаны с рассмотрением кусочно-однородного тела объёма V , состоящего из K однородных частей (рисунок 3.2). На границе соединения однородных частей могут выполняться условия идеального соединения, идеального скольжения или иной вариант граничных условий, рассмотренных в первой главе. На внешней границе S кусочно-однородного тела могут быть заданы различные варианты граничных условий. Рассматриваемые кусочно-однородные тела содержат особые точки t_i как на границе S , так и на границе контакта частей V_k составного тела. На границе S особые точки связаны с нарушением гладкости поверхности, сменой типа граничных условий или выходом на поверхность S границы соединения различных материалов. Внутри тела на поверхностях соединения различных материалов особые точки возникают при нарушении гладкости границы контакта различных материалов или в точках (линиях), где контактируют более двух однородных материалов (рисунок 3.2).

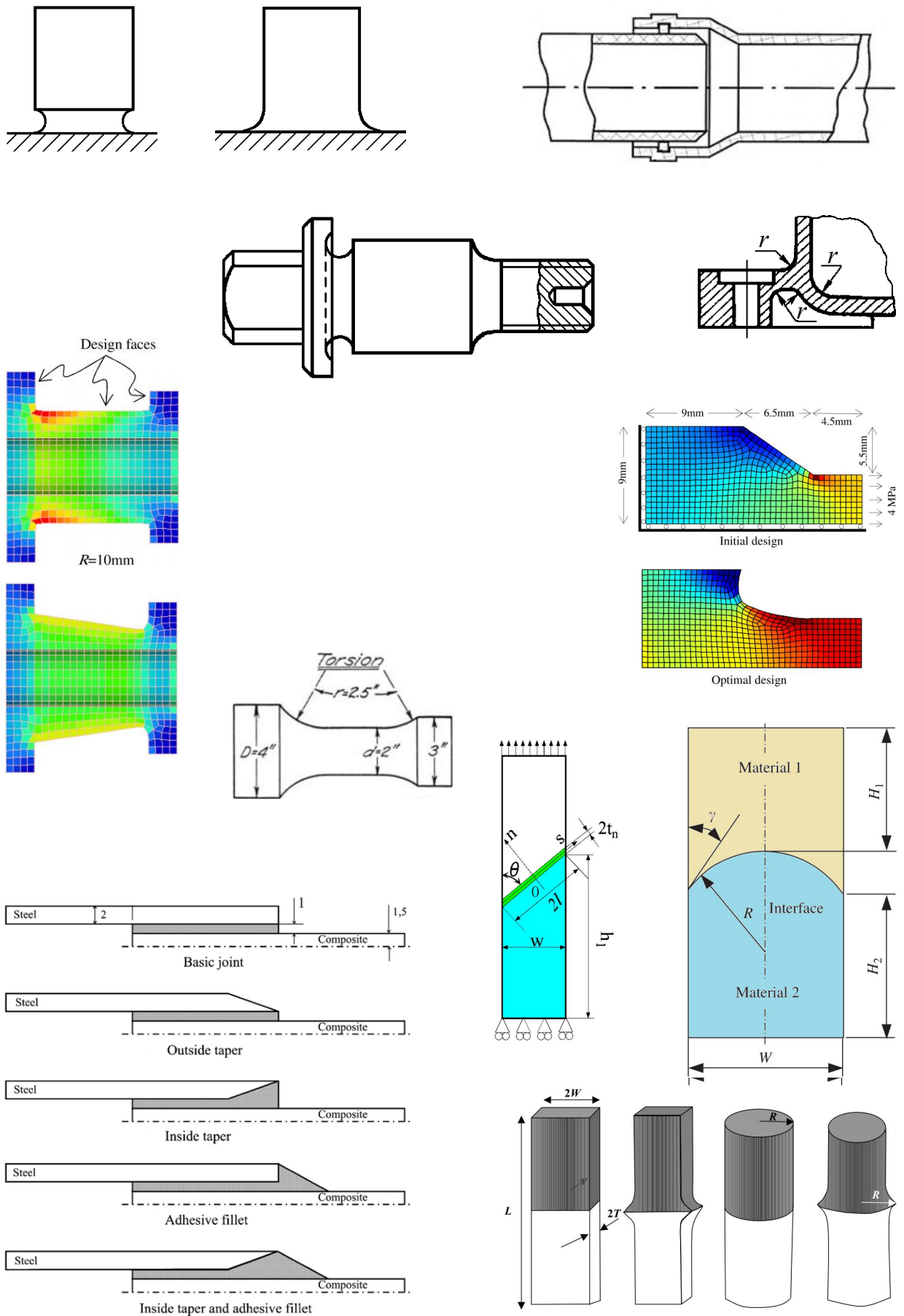


Рисунок 3.1 — Конструктивные решения, направленные на снижение уровня концентрации напряжений

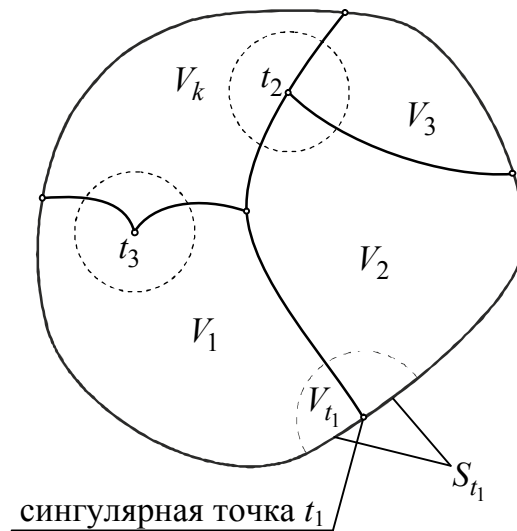


Рисунок 3.2 — Кусочно-однородное тело, содержащее особые точки:

t_1 — особая точка внешней поверхности, принадлежащая границе соединения двух материалов; t_2 — особая точка на поверхности соединения трёх материалов; t_3 — особая точка на поверхности соединения двух материалов, обусловленная нарушением её гладкости

Для математической постановки задачи в окрестности особых точек рассматриваются следующие функционалы

$$F_i(S_{t_i}, E_{klmn}^*) = \max_{V_{t_i}} f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

где S_{t_i} — часть поверхности S или поверхности соединения различных материалов, V_{t_i} — часть объёма V составного тела в окрестности особых точек t_i ; $E_{klmn}^*(\vec{x})$ — тензор упругих постоянных материалов составного тела в окрестности особых точек t_i ; $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ — заданная функция напряжений и деформаций в объёме V_{t_i} ; N — число особых точек.

В рассматриваемом варианте постановки задачи при наличии нескольких особых точек предполагается, что локальные изменения геометрии в окрестности любой из особых точек не влияют на напряжённое состояние в других особых точках. Основываясь на данном предположении, функционалы (3.1) могут рассматриваться независимо друг от друга.

На поверхности в окрестности особых точек могут быть наложены ограничения в виде равенств и неравенств

$$\vec{x} \in S_{t_i}^* : \quad S_{t_i}(\vec{x}) = S_{t_i}^*(\vec{x}), \quad (3.2)$$

$$\vec{x} \in V_{t_i}^* : \quad S_{t_i}(\vec{x}) \subset V_{t_i}^*(\vec{x}). \quad (3.3)$$

Здесь $S_{t_i}^*(\vec{x})$, $V_{t_i}^*(\vec{x})$ — заданные ограничения.

В рассматриваемой задаче оптимизации требуется найти поверхности S_{t_i} и характеристики материала $E_{klmn}^*(\vec{x})$, удовлетворяющие ограничениям (3.2), (3.3) и минимизирующие функционал (3.1), либо обеспечивающие его значение меньше некоторой заданной величины.

В конкретных задачах оптимизации в качестве функций $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ могут приниматься различные комбинации компонент тензоров напряжений и деформаций, имеющие определенный механический смысл. Примерами таких функций являются интенсивность напряжений по Мизесу

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)},$$

интенсивность деформаций

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)},$$

максимальные главные напряжения

$$\sigma_1, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \max\{|\tau_1|, |\tau_2|, |\tau_3|\}.$$

Наряду с функционалом вида (3.1) могут быть рассмотрены и другие варианты функционалов. Для клеевых и адгезионных соединений достаточно

актуальной является задача обеспечения однородного характера напряжённого состояния по поверхности соединения, например, однородного характера распределения нормальных или касательных напряжений. Поиск оптимальной поверхности и оптимального варианта градиентных свойств материала в этом случае может быть выполнен при использовании функционала вида

$$F(S_{t_i}, E_{klmn}^*) = \int_{S_a} \left[\sigma(S) - \frac{1}{S_a} \int_{S_a} \sigma(S) ds \right]^2 ds. \quad (3.4)$$

Здесь S_a — поверхность соединения двух материалов, S_{t_i} — оптимизируемая геометрия клеевого или адгезионного соединения, $\sigma(S)$ — нормальные или касательные напряжения по поверхности S_a для геометрии S_{t_i} . Данный функционал определяет среднее квадратичное отклонение напряжений σ по поверхности скрепления от их среднего значения на этой поверхности. Поиск геометрии S_{t_i} , минимизирующей данный функционал, позволит обеспечить в рамках ограничений на поверхность S_{t_i} наиболее однородный характер нормальных или касательных напряжений по поверхности соединения S_a .

При численной реализации рассматриваемых оптимизационных задач решение предлагается отыскивать на классе поверхностей и аппроксимаций механических характеристик, определяемых конечным числом параметров. В этом случае функционалы вида (3.1) превращаются в функцию параметров, определяющих класс поверхностей и вариант аппроксимации упругих характеристик материала $E_{klmn}^*(\vec{x})$, и задача минимизации функционала (3.1) при ограничениях (3.2), (3.3) сводится к минимизации функции конечного числа переменных при соответствующих ограничениях, то есть к классической задаче нелинейного математического программирования.

Для расчёта напряжённо-деформированного состояния с целью вычисления значения целевой функции в процессе оптимизационного поиска используется процедура метода конечных элементов, реализованная в пакете ANSYS. При этом

должна быть обеспечена достаточная точность решения в окрестности рассматриваемой особой точки. Это достигается за счёт сгущения конечно-элементной сетки в соответствующих подобластях исследуемого тела с использованием приёмов, описанных в первой главе (раздел 1.2). Кроме этого необходимо учитывать, что оптимизация геометрии тела ведёт к изменению конечно-элементной модели в процессе оптимизационного поиска и, соответственно, к изменению точности решения.

Для решения этой вычислительной проблемы необходимо использовать такие схемы создания сеток, которые на каждом этапе решения оптимизационной задачи позволяли бы обеспечить соизмеримые погрешности решения. Основные положения, обеспечивающие решение этой задачи, состоят в следующем. Из соображений качественного описания поведения напряжений определяется размер элемента в окрестности особой точки. В данной задаче характерный размер этого элемента составил менее 10^{-4} от определяющих размеров исследуемой области. Размер этого элемента определяет характер сгущения элементов. На каждом шаге оптимизационного поиска контролируется точность расчёта путём оценки погрешности выполнения естественных краевых условий в окрестности особой точки и при необходимости вносятся коррективы в параметры, определяющие сгущение конечно-элементной сетки.

Важным элементом вычислительной процедуры при построении алгоритма оптимизации является выбор метода оптимизации. Для решения задачи были выбраны два метода, доступные в пакете ANSYS, — метод аппроксимации (subproblem approximation method) и метод первого порядка (first order method).

Метод аппроксимации — это метод нулевого порядка, обеспечивающий эффективное решение большинства конструкторских задач. При использовании данного метода на каждой итерации проводится аппроксимация целевой функции и переменных состояния (методом наименьших квадратов) квадратичными функциями переменных проекта. Для аппроксимации используются значения целевой функции и переменных состояния на предыдущих итерациях (то есть, для предыдущих наборов параметров).

Метод первого порядка — это градиентный метод, основанный на оценке чувствительности проекта к изменению определенных факторов. Метод первого порядка использует информацию о производных зависимых переменных относительно переменных проекта. Этот метод очень точный и хорошо решает задачи с большими диапазонами изменения зависимых переменных, однако требует больших вычислительных ресурсов. Следует особо подчеркнуть, что применение градиентных методов во многих случаях требует оценки характера изменения целевой функции.

В данной работе оптимизация проводится последовательно двумя методами: сначала методом аппроксимации, так как это позволяет эффективно провести исследование всей области варьирования параметров проекта, а затем методом первого порядка, используя найденный набор параметров проекта в качестве начального.

С учётом всех вышеприведённых положений был создан алгоритм и написана программа на языке APDL для ANSYS с целью оптимизации геометрии упругих тел и упругих постоянных в окрестности особых точек.

При решении двумерных задач для описания изменяемой части границы тела использовались сплайны первого и третьего порядков. Для сплайнов первого порядка варьируемыми параметрами оптимизационной задачи являлись координаты узловых точек, а для сплайнов третьего порядка — координаты узловых точек и значения производных в этих точках.

Наряду с рассматриваемыми вариантами аппроксимации искомых поверхностей был рассмотрен вариант, представляющий интерес с точки зрения простоты технологической реализации. В данном случае оптимизируемая поверхность аппроксимируется дугой окружности и варьируемыми параметрами являются координаты центра окружности и её радиус.

Для аппроксимации зависимости от координат упругих постоянных в окрестности особых точек могут использоваться полиномиальные, экспоненциальные или другие представления, которые при решении прикладных задач должны качественно описывать ФГМ в окрестности особых точек.

3.2. Решение модельных задач оптимизации геометрии и упругих постоянных материалов в окрестности различных вариантов особых точек

Рассмотрим задачу для однородного упругого цилиндрического тела, нижний торец которого неподвижен (рисунок 3.3). К верхнему торцу приложена равномерная нагрузка. Боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузок. Требуется определить геометрию боковой поверхности в окрестности угловой точки, где имеет место смена типа краевых условий.

Поиск оптимальной геометрии боковой поверхности тела осуществляется посредством изменения части боковой поверхности в окрестности особой точки (линии), которая является зоной сильной концентрации напряжений (в данном случае — это линия смены типа граничных условий). Параметры h и l ограничивают область изменения геометрии.

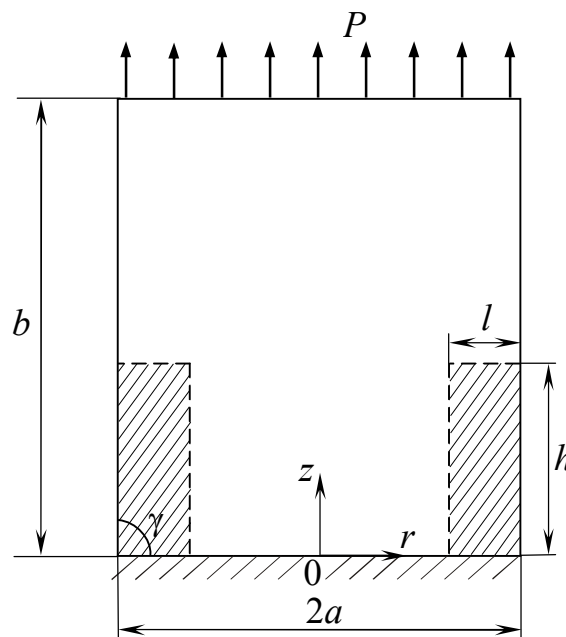


Рисунок 3.3 — Расчётная схема для цилиндрического тела

В расчётах принимались следующие параметры: $b/a = 4$, $h/a = 0.5$, $l/a = 0.1$. В качестве оптимизируемой геометрии S_t рассматривался кубический сплайн (рисунок 3.4). Координаты узловых точек r, z в данном варианте фиксированы и равны соответственно $(a, 0)$ и (a, h) . Оптимизируемыми параметрами являются производные в узловых точках, определяемые углами φ_1 и φ_2 (рисунок 3.4).

На рисунке 3.5 приведены результаты решения задачи оптимизации для значений коэффициента Пуассона 0.3 и 0.45 при использовании в качестве целевой функции интенсивности напряжений σ_u . При этом для найденных оптимальных геометрий угол φ_1 равен 58.78° для $\nu = 0.3$ и 47.82° для $\nu = 0.45$.

Аналогичные результаты на рисунке 3.6 приведены при использовании для поиска оптимизируемой геометрии функционала вида (3.4). В этом варианте угол φ_1 равен 58.48° для $\nu = 0.3$ и 48.86° для $\nu = 0.45$.

Кроме поиска оптимальной геометрии в виде кубического сплайна рассмотрим аппроксимацию боковой поверхности дугой окружности. Набор результатов, аналогичный предыдущему, приведён на рисунке 3.7 при использовании в оптимизационном поиске в качестве целевой функции f интенсивности напряжений σ_u , а на рисунке 3.8 — функционала (3.4).

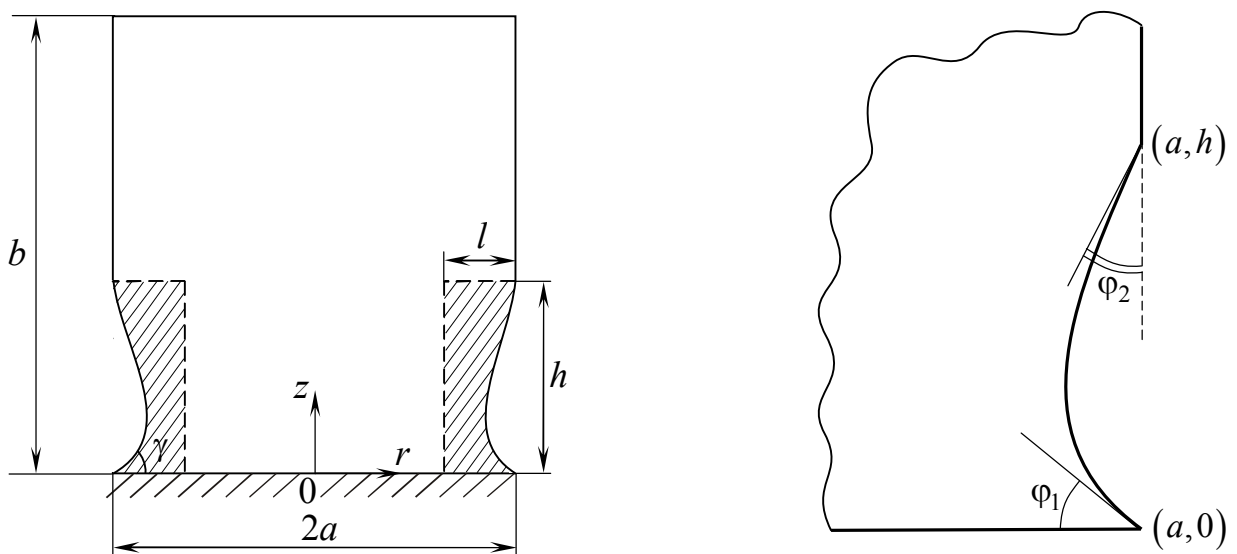


Рисунок 3.4 — Цилиндр с оптимизируемой боковой поверхностью

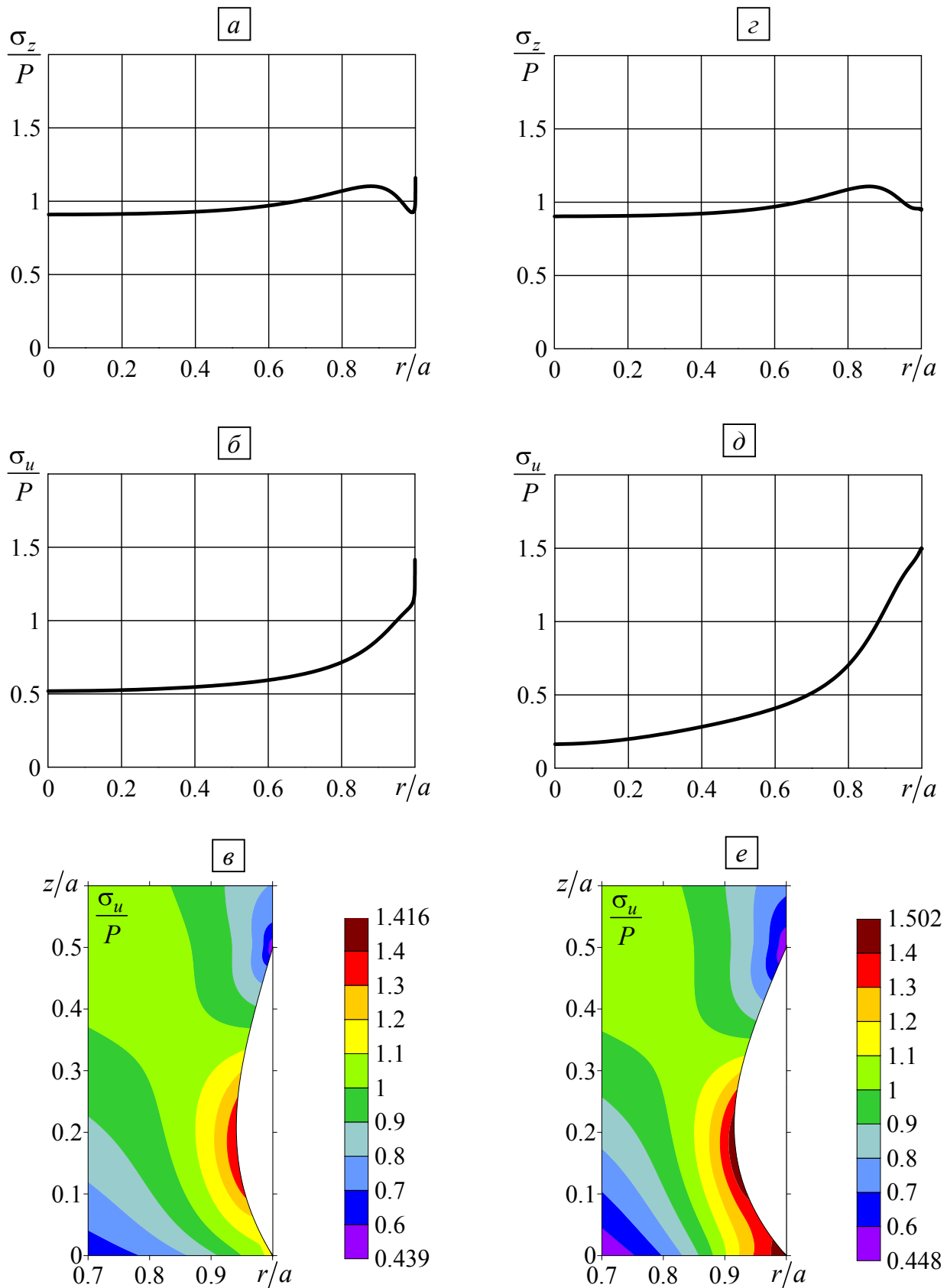


Рисунок 3.5 — Распределение напряжений σ_z , интенсивности напряжений σ_u по нижней торцевой поверхности цилиндра и σ_u в окрестности оптимизируемой поверхности при $\nu = 0.3$ (a, б, в) и $\nu = 0.45$ (z, д, e) при использовании в качестве целевой функции интенсивности напряжений

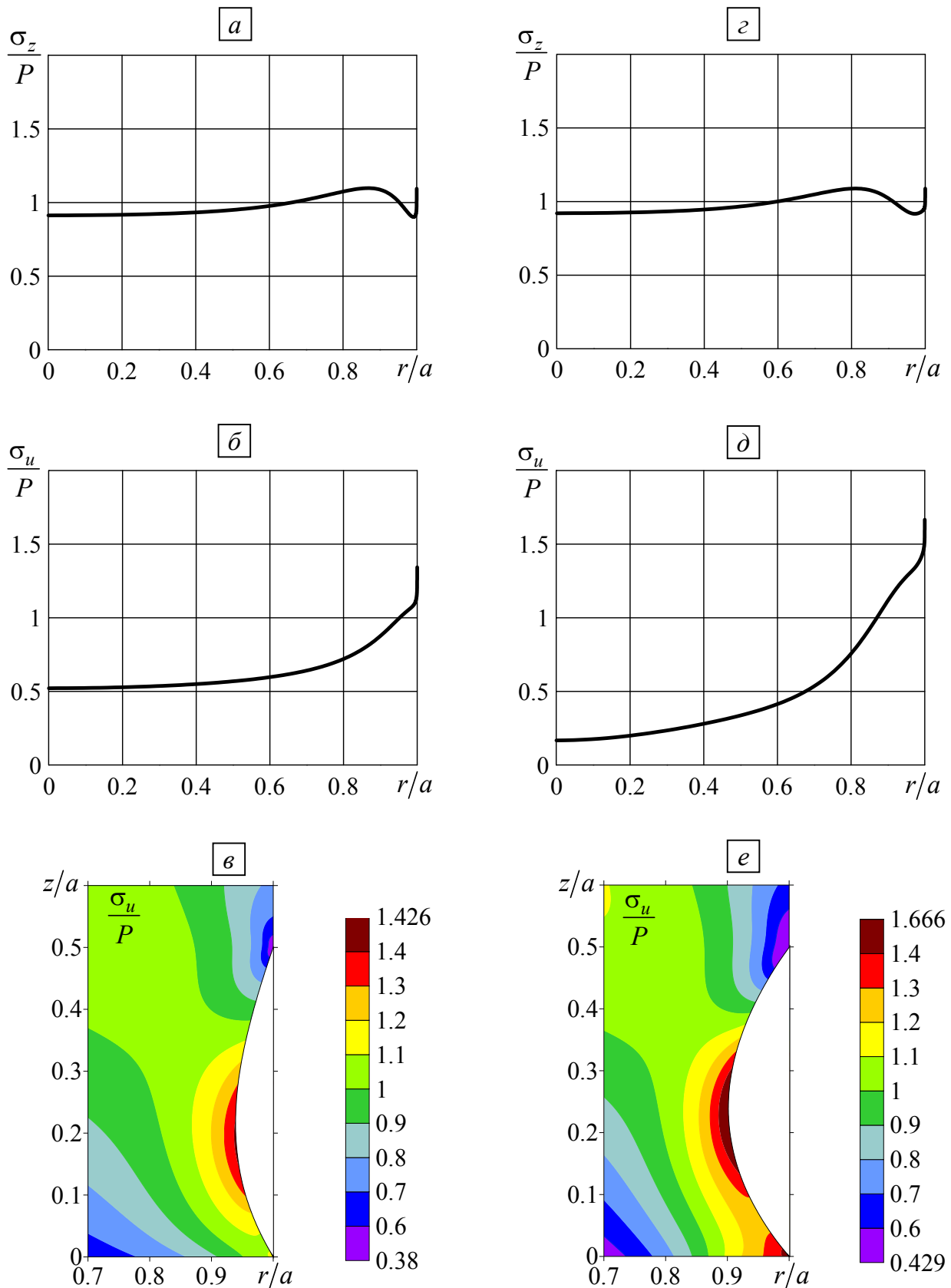


Рисунок 3.6 — Распределение напряжений σ_z , интенсивности напряжений σ_u по нижней торцевой поверхности цилиндра и σ_u в окрестности оптимизируемой поверхности при $\nu = 0.3$ (a, б, в) и $\nu = 0.45$ (z, д, e) при использовании для поиска оптимальной геометрии функционала (3.4)

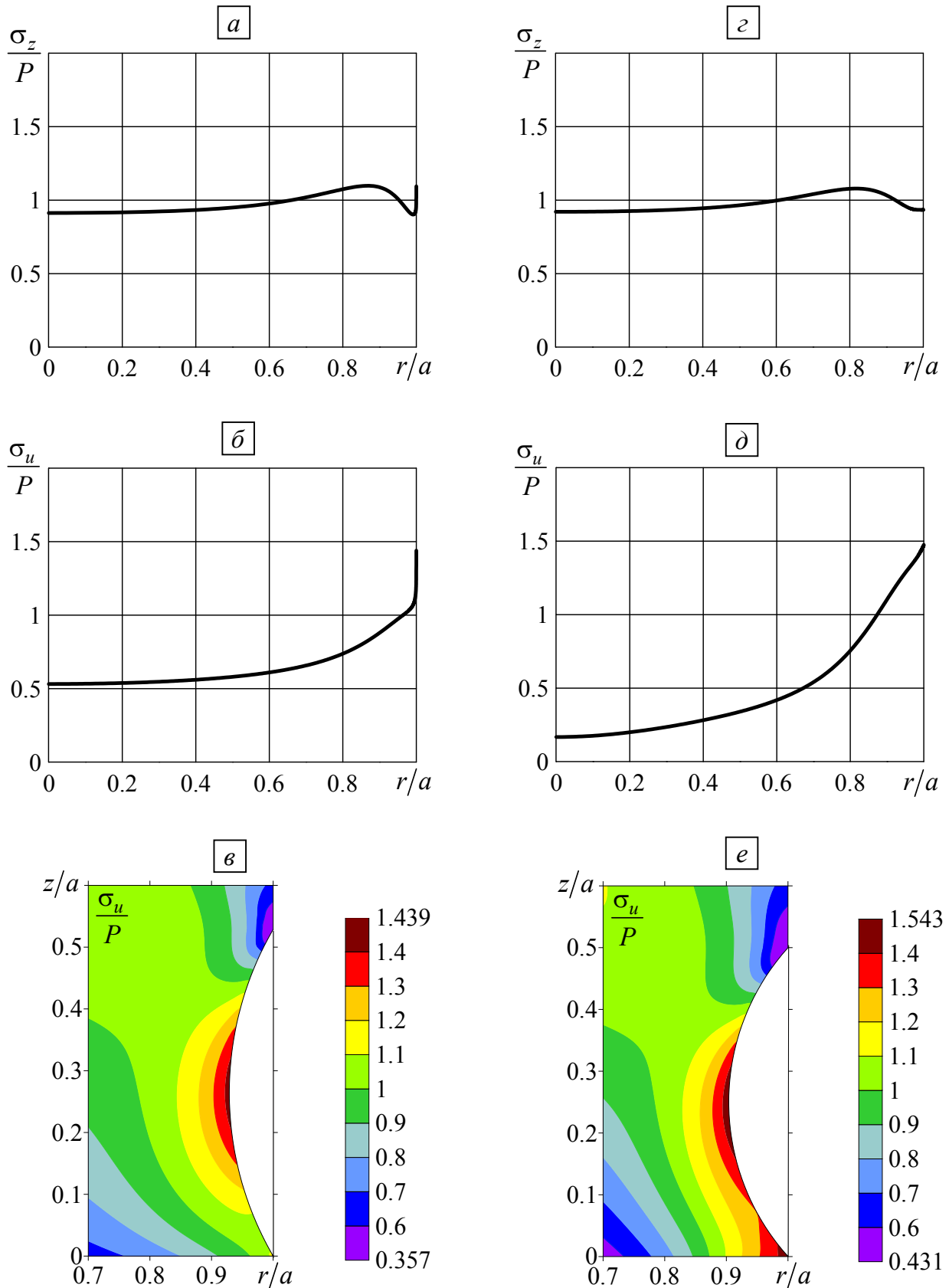


Рисунок 3.7 — Распределение напряжений σ_z , интенсивности напряжений σ_u по нижней торцевой поверхности цилиндра и σ_u в окрестности оптимизируемой поверхности при $\nu = 0.3$ (a, б, в) и $\nu = 0.45$ (z, д, e) при использовании в качестве целевой функции интенсивности напряжений

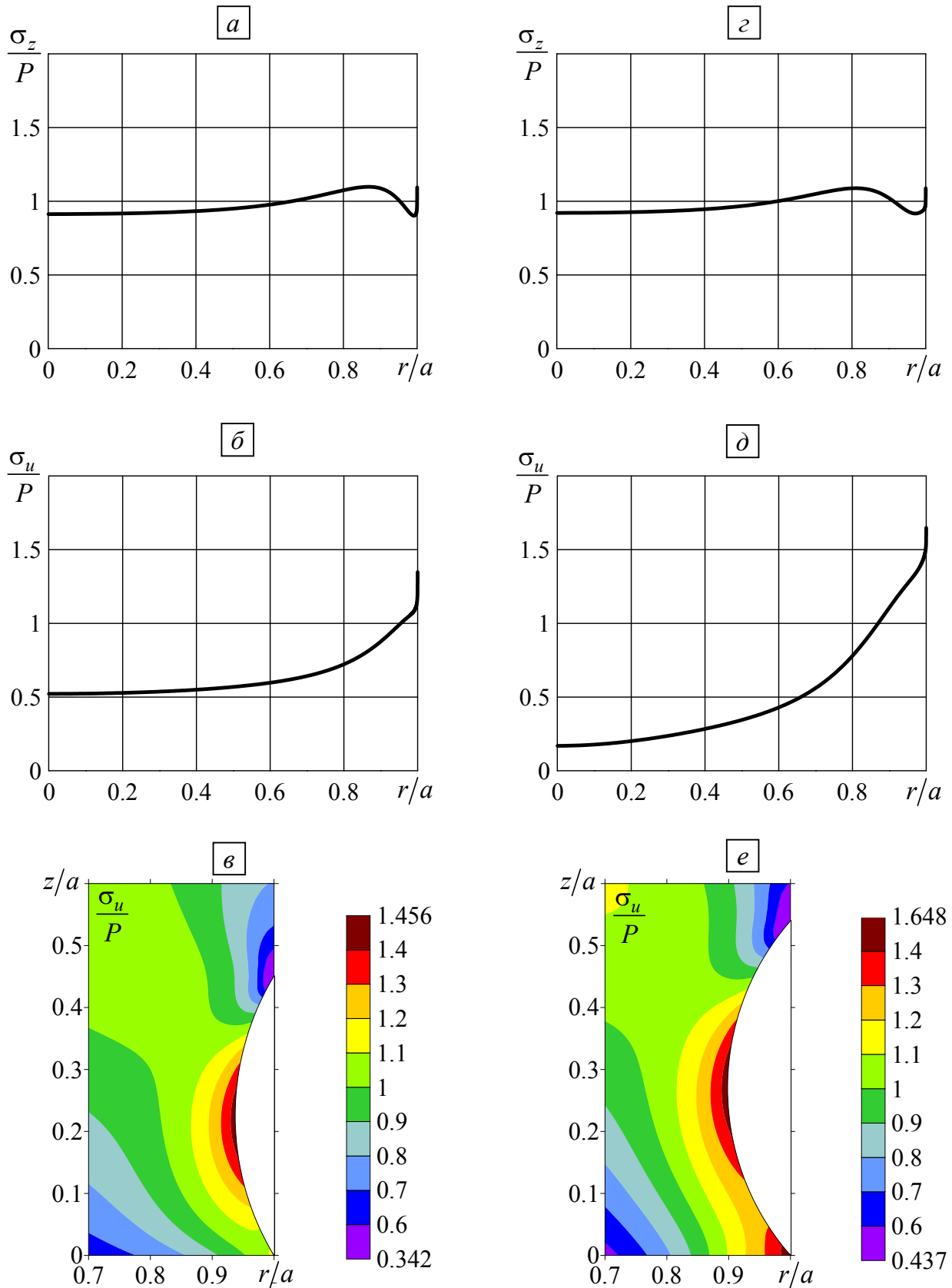


Рисунок 3.8 — Распределение напряжений σ_z , интенсивности напряжений σ_u по нижней торцевой поверхности цилиндра и σ_u в окрестности оптимизируемой поверхности при $\nu = 0.3$ (a, б, в) и $\nu = 0.45$ (z, д, e) при использовании для поиска оптимальной геометрии функционала (3.4)

Для результатов, приведённых на рисунке 3.7, угол φ_1 равен 59.53° для $\nu = 0.3$ и 47.9° для $\nu = 0.45$, а для результатов, приведённых на рисунке 3.8, $\varphi_1 = 58.71^\circ$ для $\nu = 0.3$ и $\varphi_1 = 48.75^\circ$ для $\nu = 0.45$.

Информация о значении угла φ_1 , определяющего в данном случае угол сопряжения дуги окружности с нижней торцевой поверхностью цилиндра, приведена с целью обсуждения и обобщения полученных результатов.

Следует отметить, что результаты, полученные при использовании в оптимизируемом поиске в качестве значения функционала интенсивности напряжений или выражения (3.4), весьма незначительно отличаются друг от друга. Также мало отличаются друг от друга результаты, полученные при различных вариантах аппроксимации оптимизируемых поверхностей — кубический сплайн, дуга окружности. Общим для найденных оптимальных поверхностей при одинаковых коэффициентах Пуассона является почти полное совпадение величин углов, образуемых касательными к поверхностям, проходящими через особую точку, которая в рассматриваемом случае связана с изменением в ней типа граничных условий. Аналогично работе [3] точка, определяемая величиной этого угла и значением коэффициента Пуассона, почти ложится на кривую, разделяющую решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений для клина, одна грань которого неподвижна, а вторая свободна от напряжений (рисунок 1.6). При увеличении степени конечно-элементной дискретизации расчётной области эта точка асимптотически стремится к данной кривой. Для $\nu = 0.3$ угол, определяющий точку на указанной сепаратрисе, равен 56.79° , а для $\nu = 0.45$ — 47.87° .

На рисунке 3.9 для этих углов приведены результаты для варианта с аппроксимацией оптимизируемой поверхности кубическим сплайном, на рисунке 3.10 — дугой окружности. Данные на рисунках 3.9 и 3.10 отличаются от соответствующих результатов, полученных при численном поиске оптимальной геометрии (рисунки 3.5–3.8), в очень малой окрестности особой точки, где искомая процедура отражает сингулярное решение с показателями α , близкими к единице.

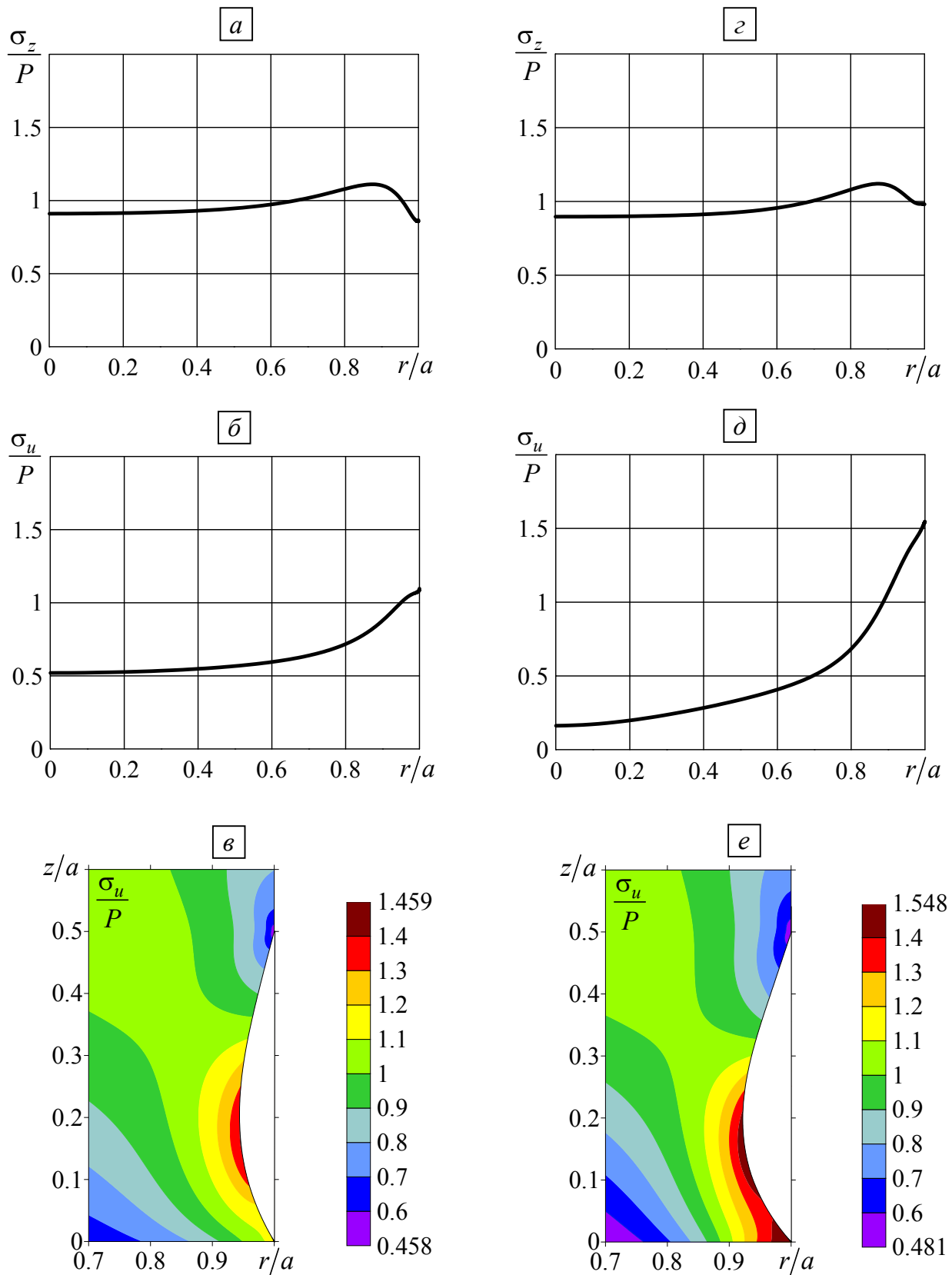


Рисунок 3.9 — Распределение напряжений σ_z , интенсивности напряжений σ_u по нижней торцевой поверхности цилиндра и σ_u в окрестности оптимизируемой поверхности при её аппроксимации кубическим сплайном:

$\nu = 0.3$, $\varphi_1 = 56.79^\circ$ (a, б, в) и $\nu = 0.45$, $\varphi_1 = 47.87^\circ$ (z, д, e)

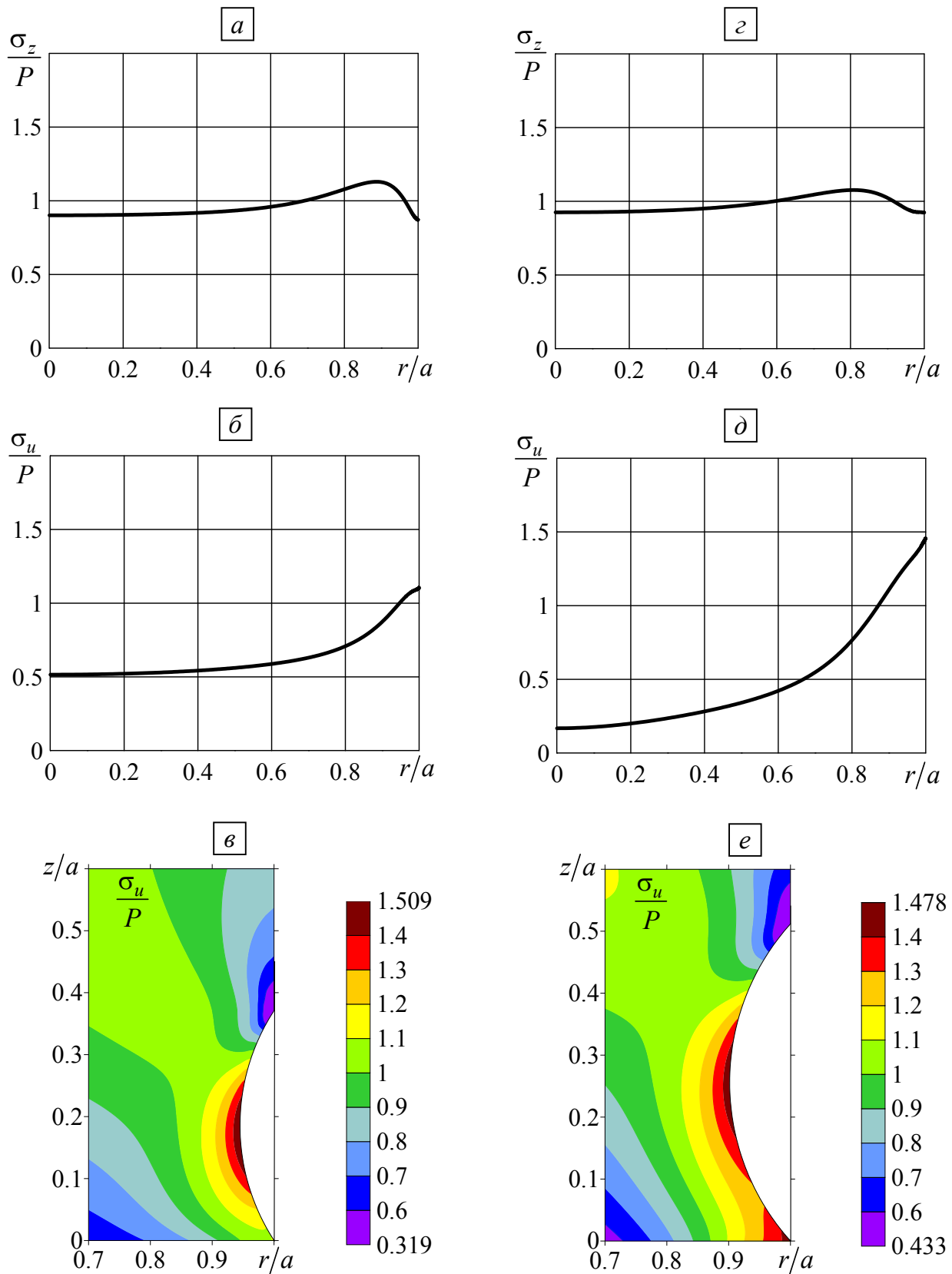


Рисунок 3.10 — Распределение напряжений σ_z , интенсивности напряжений σ_u по нижней торцевой поверхности цилиндра и σ_u в окрестности оптимизируемой поверхности при её аппроксимации дугой окружности:

$\nu = 0.3, \varphi_1 = 56.79^\circ$ (a, б, в) и $\nu = 0.45, \varphi_1 = 47.87^\circ$ (z, д, e)

Таким образом, в данной задаче подтвержден вывод работы [3] о том, что в окрестности особых точек, где имеет место смена типа краевых условий, оптимальные геометрии обладают общим свойством, а именно: значения углов, образуемых касательными к поверхностям в особой точке, и величина коэффициента Пуассона определяют в соответствующей задаче о собственных решениях при ПДС для однородного клина, одна грань которого неподвижна, а вторая свободна от напряжений, границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

Следующая задача связана с рассмотрением составного цилиндра (рисунок 3.11). В данной задаче при выборе в качестве функционала максимального значения интенсивности напряжений имеет смысл распространять этот функционал только на одну из частей составного цилиндра. Сначала оптимизацию геометрии провели только для верхней, менее жёсткой, части составного цилиндра и для аппроксимации оптимизируемой геометрии использовали дугу окружности (рисунок 3.12, а). В качестве функционала были использованы значения интенсивности напряжений в одной из составных частей цилиндрического тела, либо выражения (3.4). Для всех вариантов была получена одна оптимальная геометрия с углами $\gamma_1 = 71.4^\circ$ при $E_2/E_1 = 5$ и $\gamma_1 = 64.05^\circ$ при $E_2/E_1 = 10$. Для данной задачи имеет место особая точка на поверхности границы контакта двух материалов. В главе 1 было показано, что поведение напряжений определяется величинами углов γ_1, γ_2 , значениями коэффициентов Пуассона материалов ν_1, ν_2 и отношением модулей материалов E_2/E_1 . В пространстве этих параметров может быть построена поверхность, разделяющая решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений. В нашем случае для фиксированных параметров $\nu_1, \nu_2, E_2/E_1$ решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений в области параметров (γ_1, γ_2) разделяет кривая, представленная на рисунке 3.13, а, для $E_2/E_1 = 5, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ и на рисунке 3.13, б для $E_2/E_1 = 10, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Результаты оптимальных

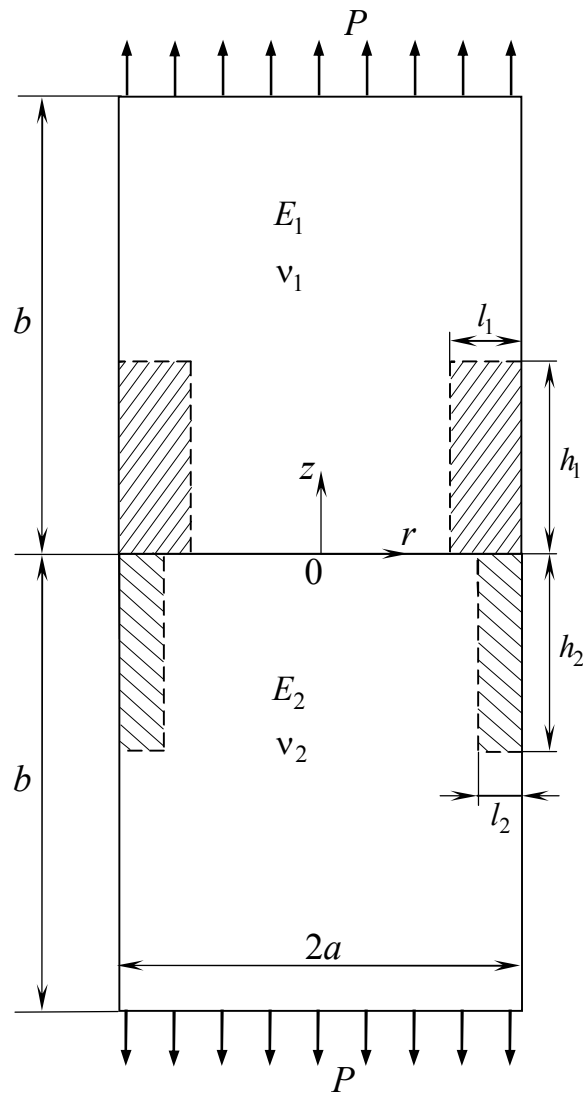


Рисунок 3.11 — Расчётная схема для составного цилиндра

решений определяют точку I на кривой, разделяющей решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений (рисунки 3.13, a и 3.13, $б$).

Другая серия расчётов была выполнена, когда оптимизировалась геометрия нижней, более жёсткой, части составного цилиндра (рисунок 3.12, $б$) и в качестве аппроксимации этой поверхности использовалась дуга окружности. В этом случае параметры оптимальных решений определяют точку II на рисунках 3.13, a , $б$.

В следующей серии расчётов оптимизируется геометрия боковых поверхностей верхней и нижней частей составного цилиндра и для их аппроксимации используются кубические сплайны (рисунок 3.12, $в$). В качестве первого варианта рассмотрено использование для оптимизации функционала, определяющего максимальные значения интенсивности напряжений в верхней

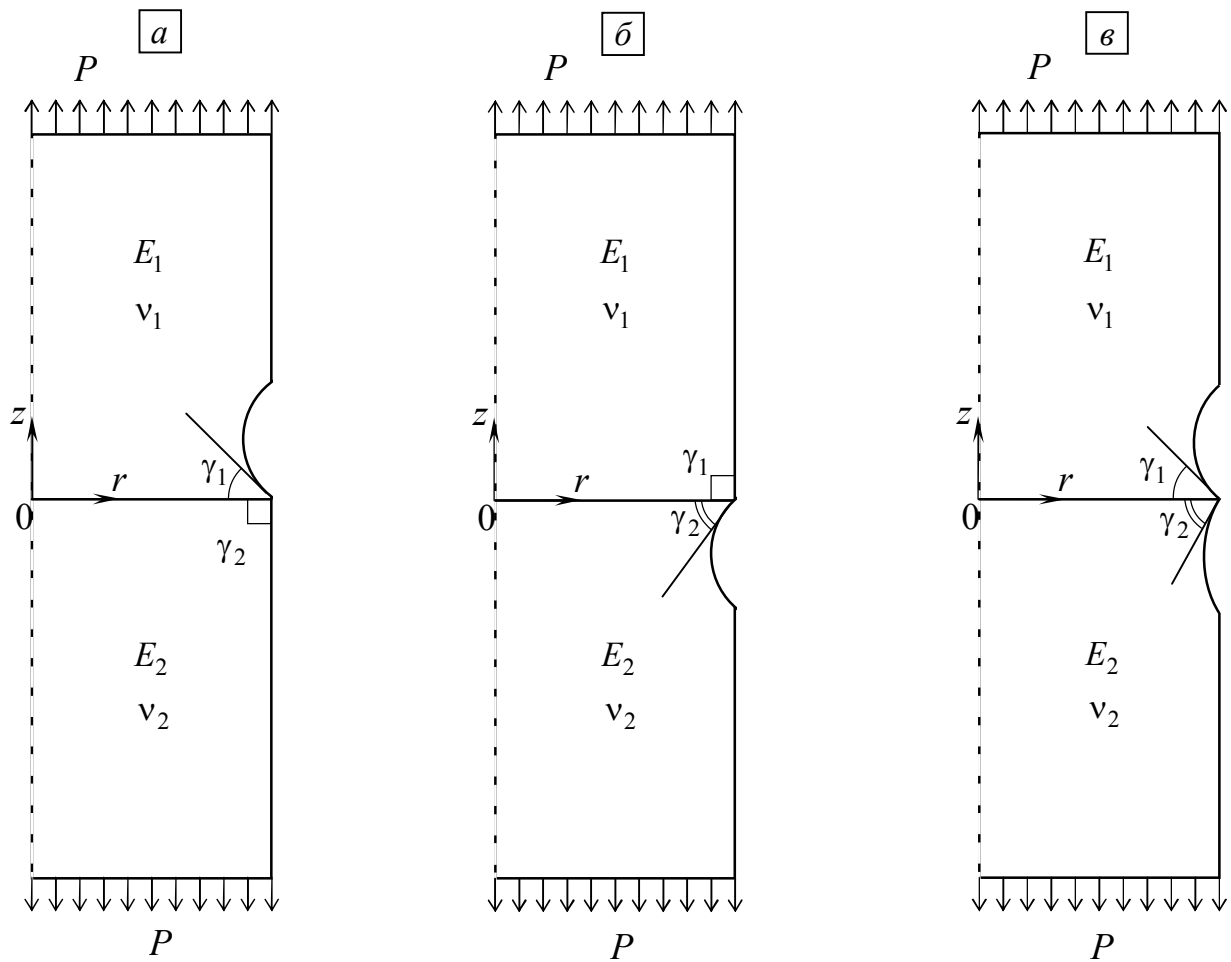


Рисунок 3.12 — Расчётные схемы для трёх вариантов оптимизации геометрии при аппроксимации геометрии дугой окружности

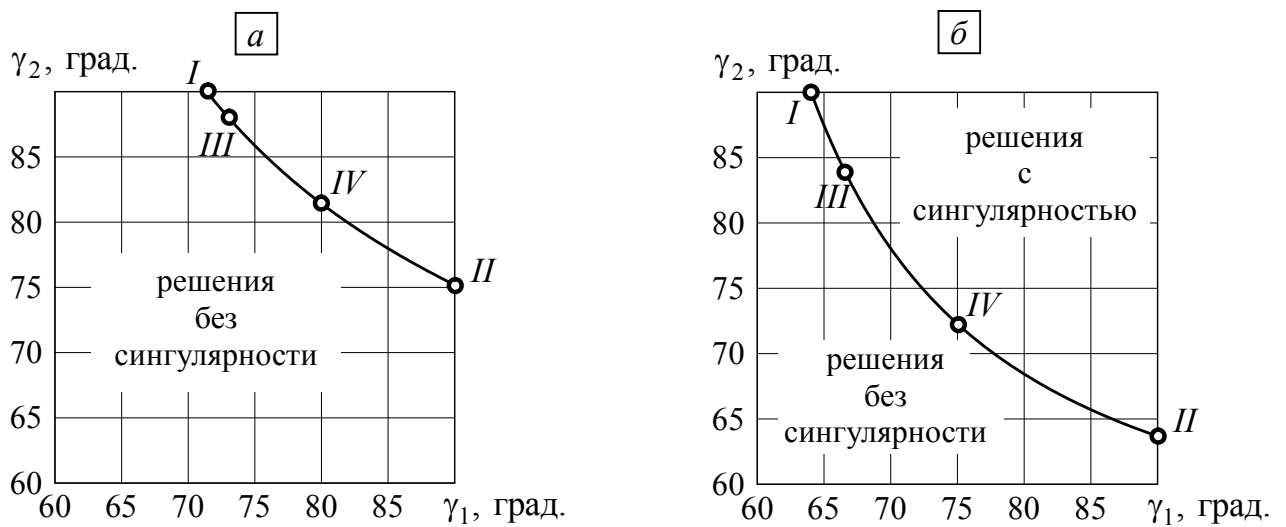


Рисунок 3.13 — Кривые, разделяющие решения с сингулярностью и без сингулярности в плоскости параметров γ_1 и γ_2 (для $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$):

а) $E_2/E_1 = 5$, б) $E_2/E_1 = 10$

(менее жёсткой) части составного цилиндра. В этом случае оптимальные значения углов γ_1 и γ_2 определяют точку *III* на рисунке 3.13. Для полученной оптимальной геометрии на рисунке 3.14 приведены распределения напряжений σ_z по поверхности контакта составных частей цилиндра и интенсивности напряжений в окрестности особой точки для соотношений $E_2/E_1 = 5$ и $E_2/E_1 = 10$.

Во втором варианте в качестве функционала использовались максимальные значения интенсивности напряжений в нижней (более жёсткой) части составного цилиндра. Как и для первого варианта, соответствующие распределения напряжений приведены на рисунке 3.15. В этом случае оптимальные значения углов γ_1 и γ_2 соответствуют точке *I* на рисунке 3.13. И, наконец, в третьем варианте в качестве целевого функционала для решения оптимизационной задачи использовались соотношения (3.4). Для данной задачи примеры распределения напряжений приведены на рисунке 3.16, а значения углов γ_1 , γ_2 соответствуют точке *IV* на рисунке 3.13. Для всех этих вариантов оптимальные значения углов γ_1 , γ_2 определяют границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений (рисунок 3.13).

Следует отметить, что подобные задачи широко представлены в литературе. Например, в работе [107] рассматривается поиск оптимального угла стыка двух склеиваемых пластин (рисунок 3.17), в работах [184, 185] исследуются напряжённые состояния составных образцов при различной геометрии боковой поверхности. В этих работах отмечается взаимосвязь рассматриваемых вариантов с сопутствующими им сингулярными решениями. Однако общей закономерности для оптимальных поверхностей в этой и других работах не установлено.

Рассмотрим задачу (для трапециевидального тела с зоной из ФГМ), которая представлена во второй главе (рисунки 2.1 и 2.2). При постановке задачи оптимизации, связанной с выбором вставки из ФГМ, свойства которого определяются представленной на рисунке 2.2 зависимостью, величина ν_0 может использоваться в качестве оптимизационного параметра. Для математической

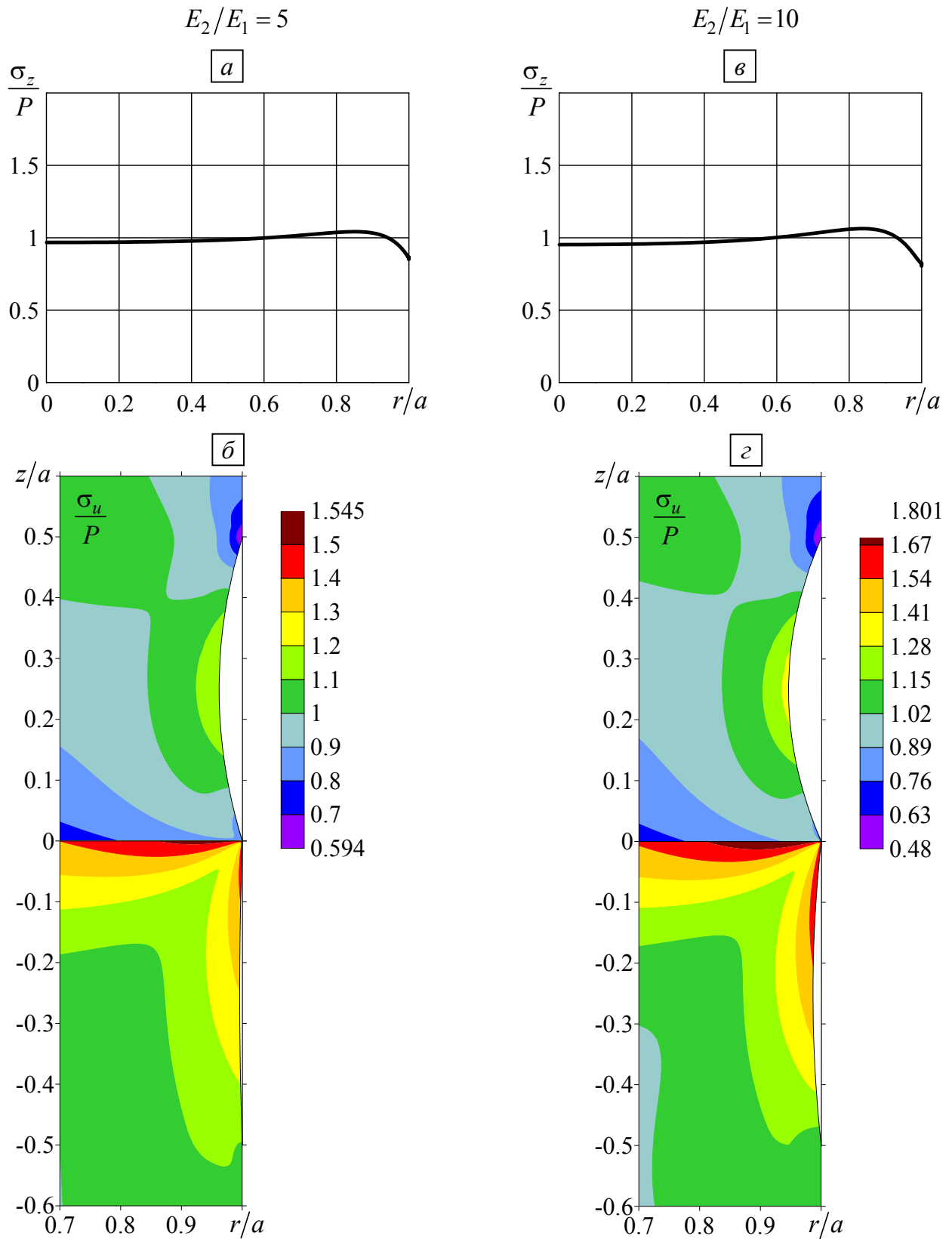


Рисунок 3.14 — Распределение напряжений σ_z по поверхности контакта и распределение интенсивности напряжений σ_u в окрестности особой точки для оптимальной геометрии, полученной при использовании в качестве целевой функции интенсивности напряжений в верхней части цилиндра при $E_2/E_1 = 5$ (а, б) и $E_2/E_1 = 10$ (в, г)

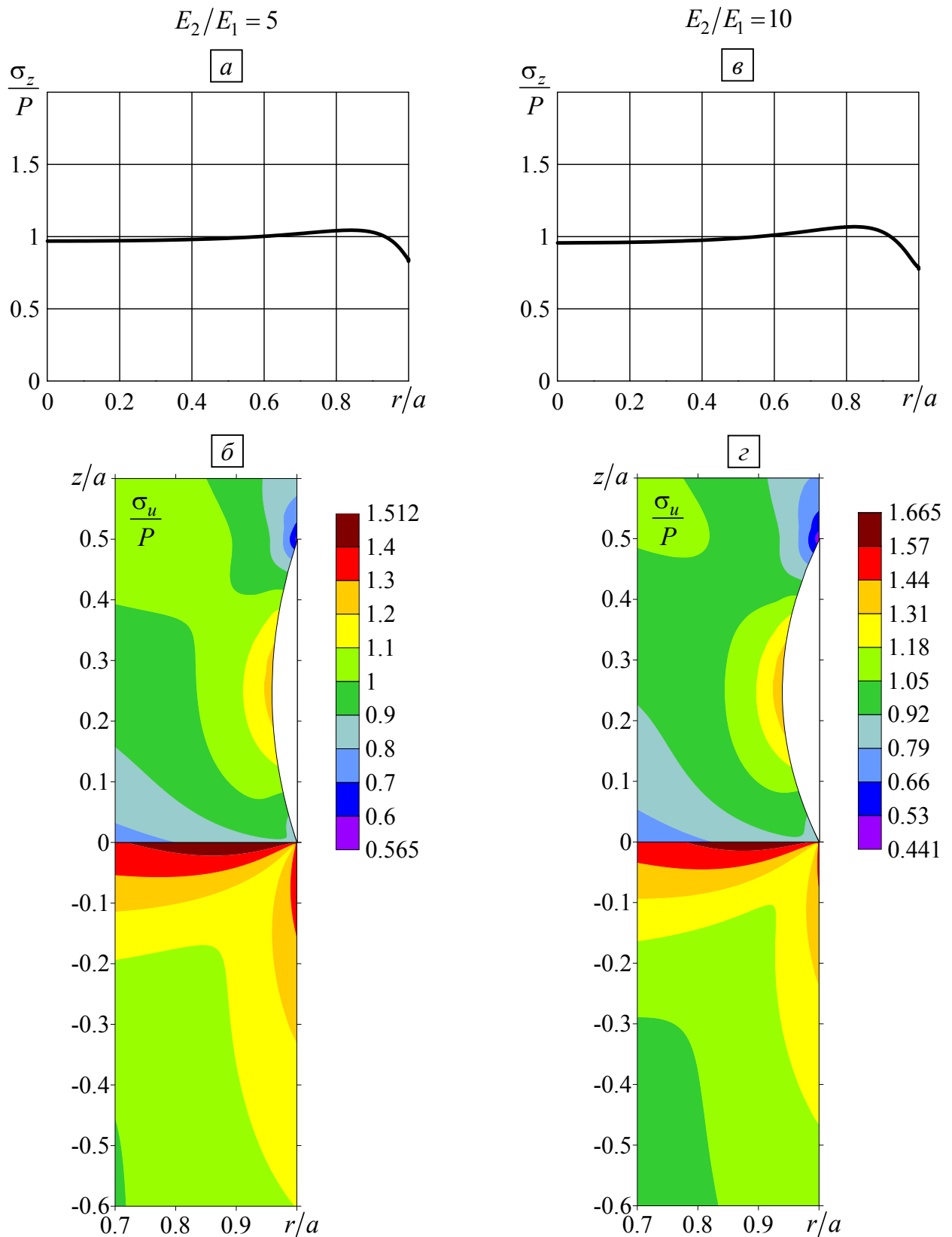


Рисунок 3.15 — Распределение напряжений σ_z по поверхности контакта и распределение интенсивности напряжений σ_u в окрестности особой точки для оптимальной геометрии, полученной при использовании в качестве целевой функции интенсивности напряжений в нижней части цилиндра при $E_2/E_1 = 5$ (а, в) и $E_2/E_1 = 10$ (б, г)

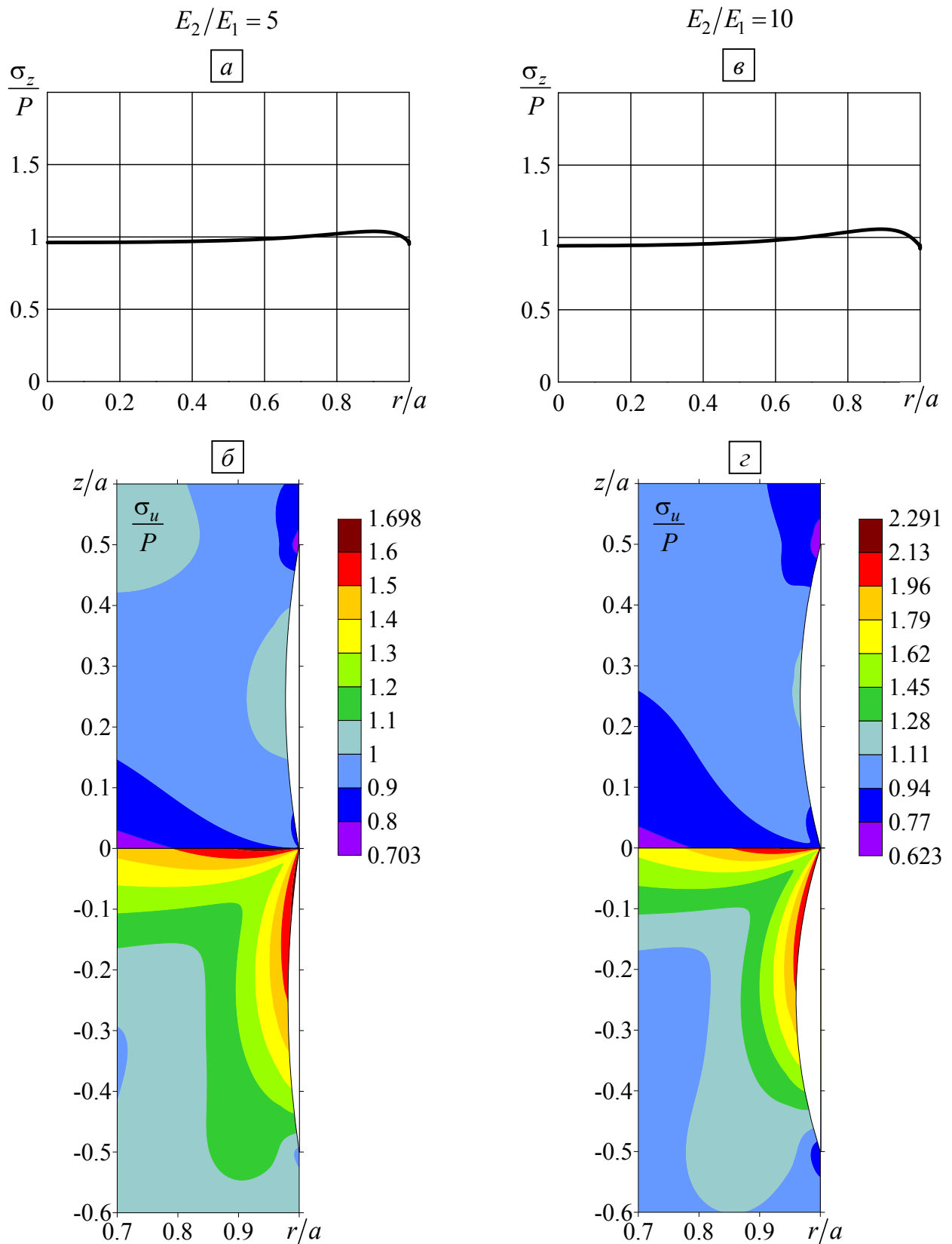


Рисунок 3.16 — Распределение напряжений σ_z по поверхности контакта и распределение интенсивности напряжений σ_u в окрестности особой точки для оптимальной геометрии, полученной при использовании в качестве целевой функции соотношения (3.4) при $E_2/E_1 = 5$ (а, б) и $E_2/E_1 = 10$ (в, з)

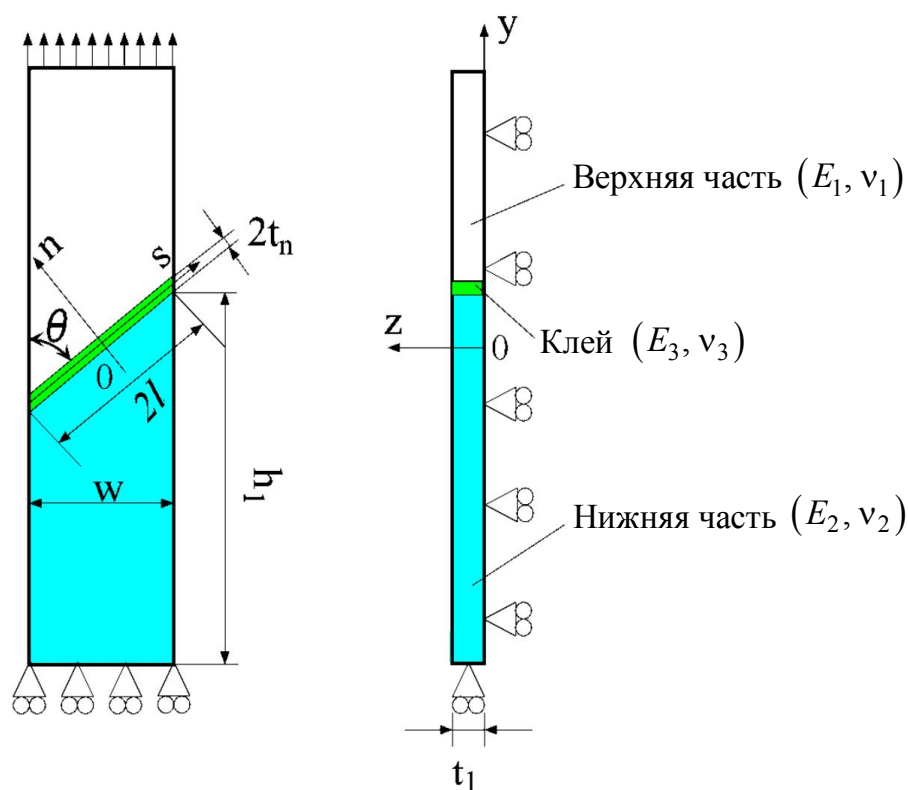


Рисунок 3.17 — Расчётная схема клевого соединения двух различных материалов в косой стык из работы [107]

постановки задачи здесь используется функционал (3.4). Найденное из решения оптимизационной задачи значение ν_0 и величина угла в окрестности особой точки (который в данном случае равен 60°) определяют точку на кривой, разделяющей решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений, для клина при ПДС, одна грань которого неподвижна, а вторая свободна от напряжений (рисунок 1.6). На рисунке 3.18 при оптимальном значении ν_0 приведены распределения нормальных напряжений по нижнему основанию для различных значений величины R , определяющей размер вставки из ФГМ.

В качестве оптимизационной рассмотрена задача из главы 2 (рисунок 2.15), но с другими значениями $E_1 = 5.091$ МПа, $\nu_1 = 0.4$, и теперь характеристики клевого слоя E_2, ν_2 в средней однородной части равны $E_2' = 1$ МПа, $\nu_2' = 0.3$, а во внешней части, выполненной из ФГМ, упругие свойства изменяются по линейному или нелинейному закону вдоль координаты x ,

как показано на рисунке 2.17. В этом случае при линейном или нелинейном распределении свойств функционально-градиентного материала (рисунок 2.17) величины v_2^0 и E_2^0 могут рассматриваться как оптимизационные параметры. В данном варианте при решении задачи оптимизации в качестве целевой функции использовался функционал (3.4). Как и в других примерах, оптимальные значения v_2^0 и E_2^0 в совокупности с другими параметрами, определяющими поведение напряжений в рассматриваемой особой точке, определяют точку на границе решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений. На рисунке 3.19 приведены распределения нормальных напряжений на поверхности контакта материала и клея при оптимальных значениях v_2^0 и E_2^0 .

Опираясь на полученные результаты о свойстве оптимальных решений в окрестности особых точек, можно, не решая оптимизационные задачи, подбирать геометрию в окрестности особых точек либо определять основные параметры ФГМ, обеспечивающие существенное снижение концентрации напряжений в окрестности особых точек. Продемонстрируем это на примере прослойки 2, соединяющей два разных материала 1 и 3 (рисунок 3.20).

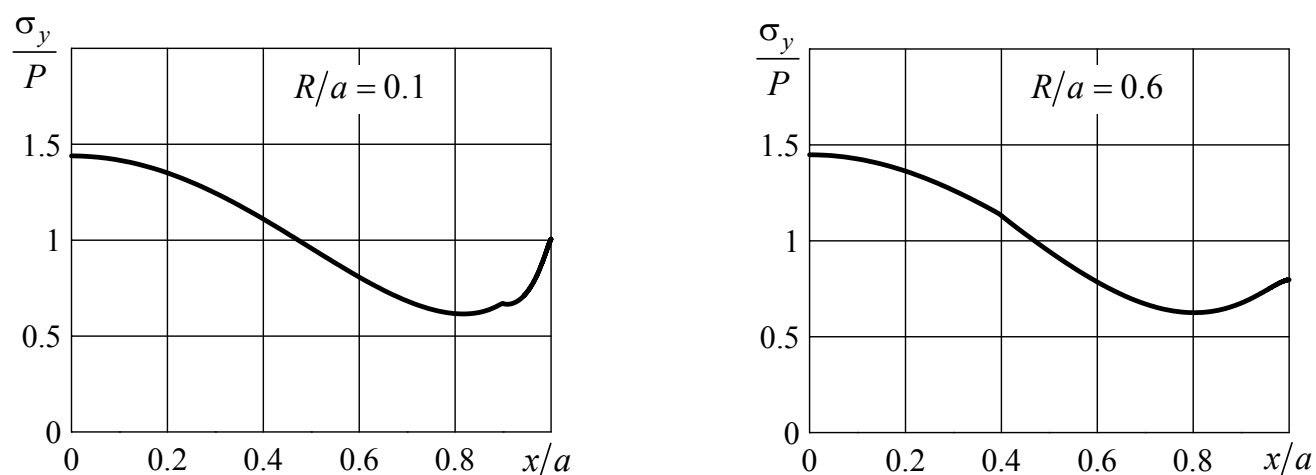


Рисунок 3.18 — Распределения нормальных напряжений по нижнему основанию трапециoidalной пластины для различных значений величины R , определяющей размер вставки из ФГМ, при использовании в качестве целевой функции функционала (3.4)

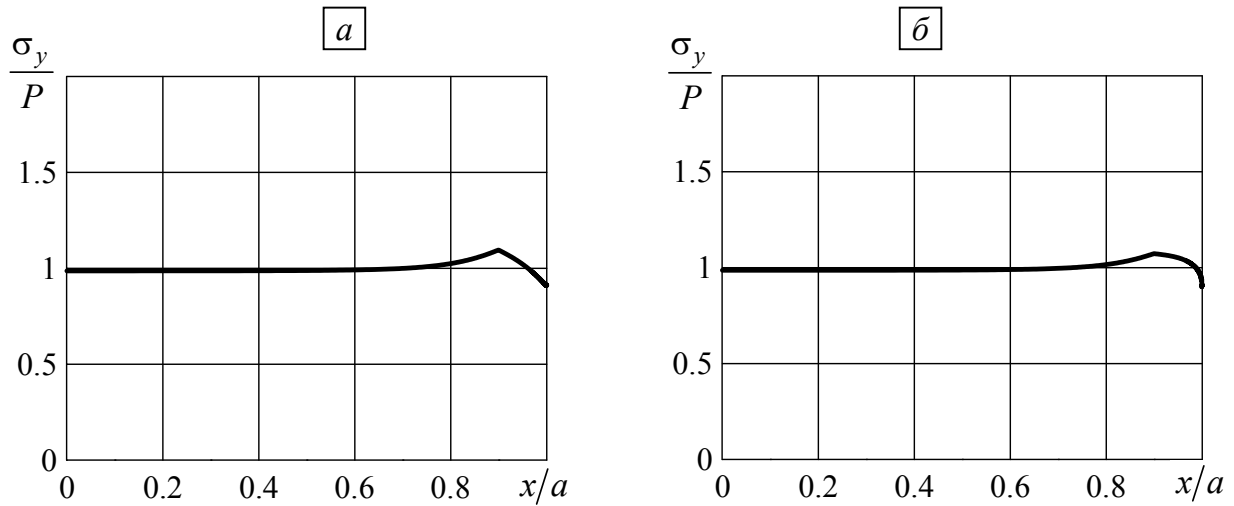


Рисунок 3.19 — Распределение нормальных напряжений на поверхности контакта материала и клея при использовании для решения оптимизационной задачи функционала (3.4) и при линейном (а) и нелинейном (б) изменении свойств внешней части клеевого слоя, выполненной из ФГМ

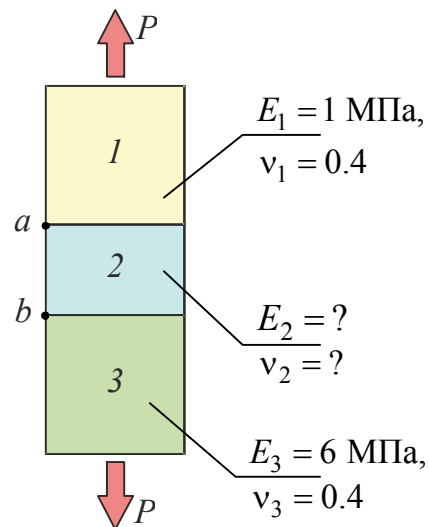


Рисунок 3.20 — Соединение двух материалов 1 и 3 через прослойку 2

В данном примере обнаруженное свойство оптимальных решений позволяет выбрать параметры прослойки из ФГМ в точках a , b , где возможны сингулярные решения. В нашем случае известны значения углов γ_1 , γ_2 и γ_3 в точках a и b ,

а также характеристики материалов E_1, E_3 и ν_1, ν_3 . Из области параметров, определяющих поведение напряжений в окрестностях точек a и b , неизвестными величинами являются E_2, ν_2 . На рисунке 3.21 приведены кривые, разделяющие решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений в пространстве параметров (E_2, ν_2) , для точек a (сплошная линия) и b (пунктирная линия) при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 90^\circ$ и $\nu_1 = \nu_3 = 0.4$. В этом случае точки на сплошной кривой определяют возможные оптимальные значения свойств функционально-градиентной прослойки в точке a , а точки, лежащие на пунктирной кривой, определяют возможные оптимальные значения свойств функционально-градиентной прослойки в точке b .

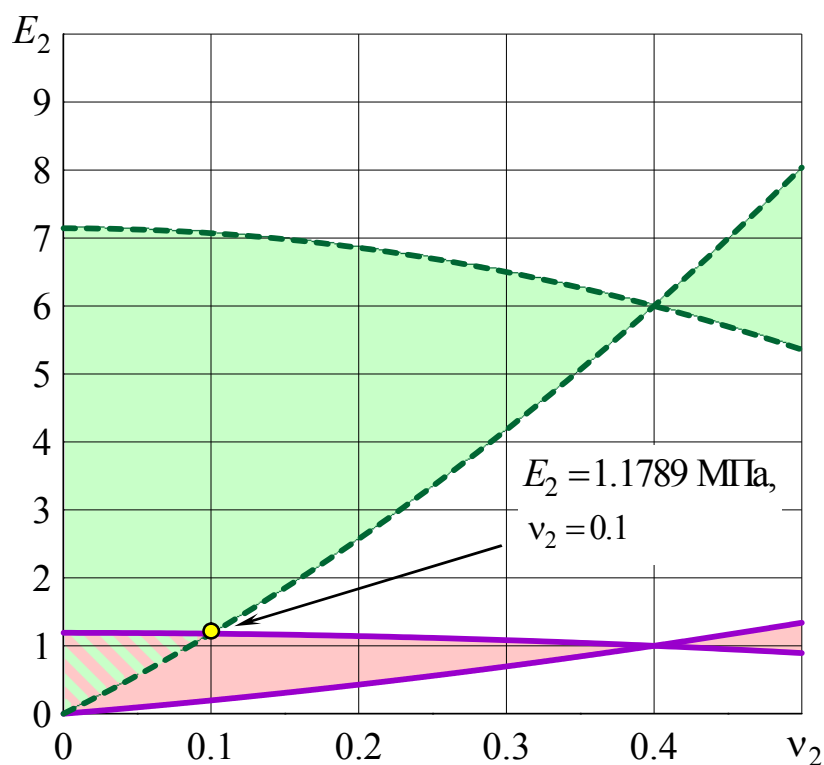


Рисунок 3.21 — Кривые, разделяющие в области параметров E_2 и ν_2 решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений, при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \pi/2$ и $\nu_1 = \nu_3 = 0.4$ (цветным фоном отмечены области решений без сингулярности)

В данном случае возможен выбор однородного материала, который устраняет концентрацию напряжений одновременно в точках a и b . Это будут общие точки для кривых семейства $E_2:E_1$ и кривых семейства $E_2:E_3$. Для рассматриваемых материалов такая точка единственная, ей соответствуют значения $E_2 = 1.1789$ МПа, $\nu_2 = 0.1$. В качестве демонстрации на рисунках 3.22 и 3.23 приведено распределение нормальных напряжений по поверхности контакта материалов 1 и 2, 2 и 3 при однородной прослойке 2 с характеристиками $E_2 = 1.1789$ МПа, $\nu_2 = 0.1$ при различных значениях её толщины t .

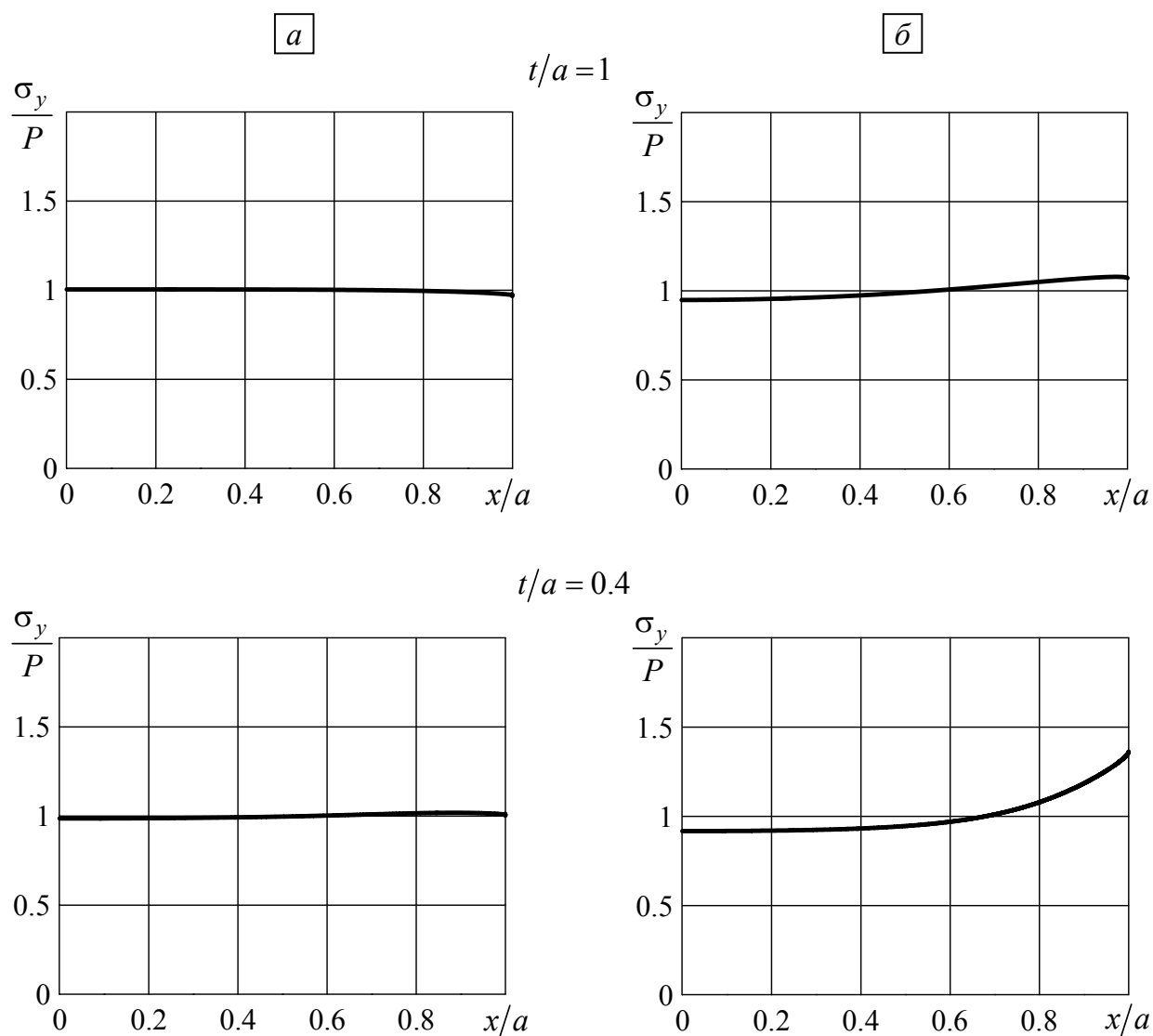


Рисунок 3.22 — Распределения нормальных напряжений по поверхности контакта материала 1 и прослойки 2 (a), материала 3 и прослойки 2 ($б$) при различных толщинах t прослойки

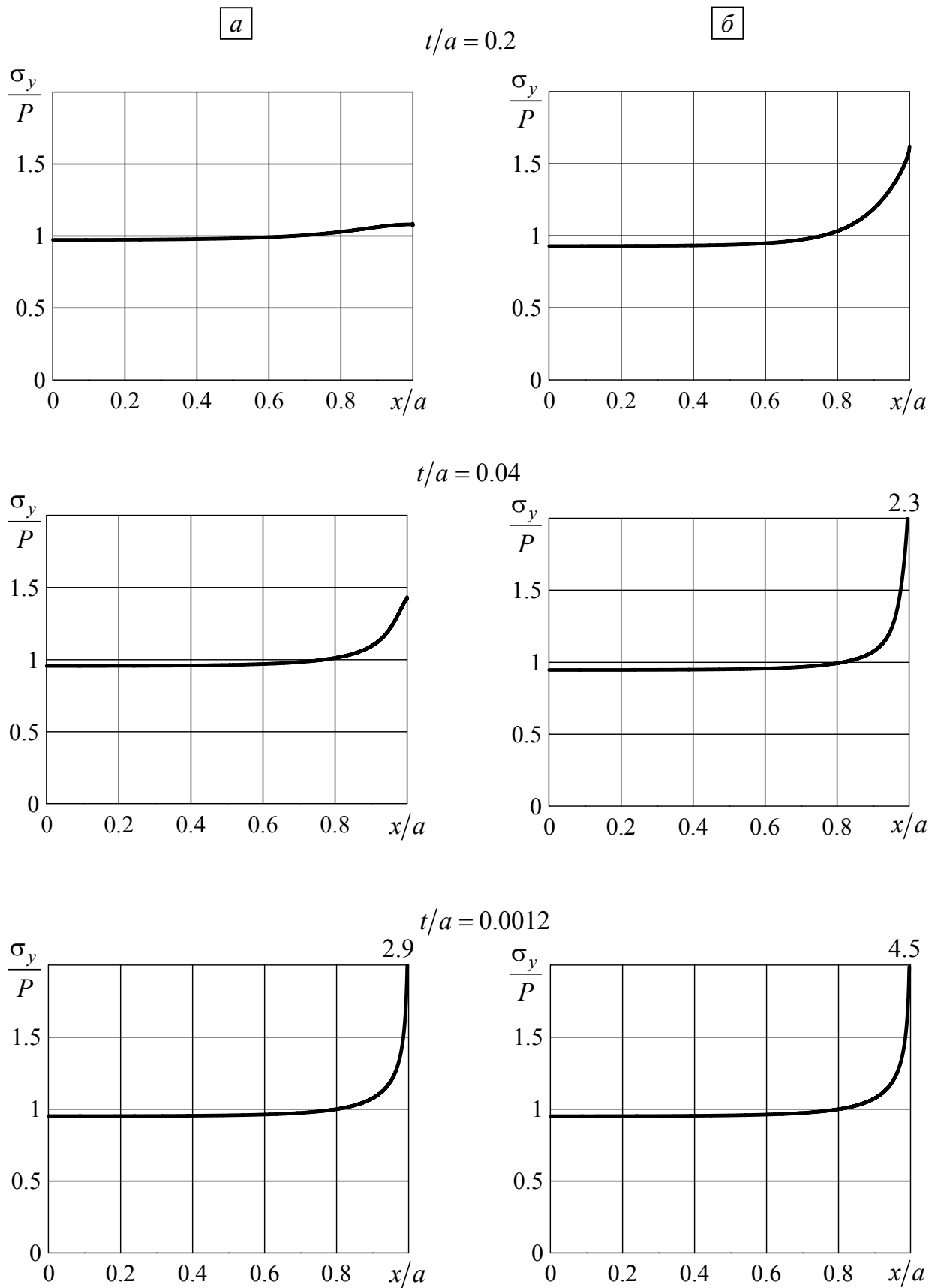


Рисунок 3.23 — Распределения нормальных напряжений по поверхности контакта материала 1 и прослойки 2 (а), материала 3 и прослойки 2 (б) при различных толщинах t прослойки

Результаты данной главы подтверждают и развивают положение об общем свойстве оптимальных геометрий и оптимальном распределении свойств материала в окрестности особых точек, состоящее в том, что оптимальные решения определяют границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

3.3. Критический анализ стандартов определения прочности клеевых соединений на основе моделирования напряжённого состояния в испытываемых образцах

Клеевое соединение — неразъёмное соединение различных тел, осуществляемое с помощью клея. Клеевое соединение позволяет скреплять различные, в том числе и разнородные материалы, обеспечивая непрерывное распределение напряжений по поверхности соединения. Чаще всего с помощью клея выполняют соединения, работающие на равномерный отрыв или сдвиг, так как одним из недостатков клеевых соединений является то, что они имеют низкую прочность на односторонний неравномерный отрыв (так называемый отдир).

Для оценки прочности клеевых соединений при склеивании как одинаковых, так и разных материалов существуют стандартные методы, определенные российскими государственными стандартами (ГОСТами) и зарубежными стандартами (международными и национальными, такими как: ISO, BSI, AFNOR, DIN, ASTM, JIS и многими другими).

Действующие российские ГОСТы для определения прочности клеевых соединений можно условно разделить, например, по виду нагружения (отрыв, сдвиг, отслаивание, расслаивание) или по типу склеиваемых материалов (одинаковые, разные) (рисунок 3.24).

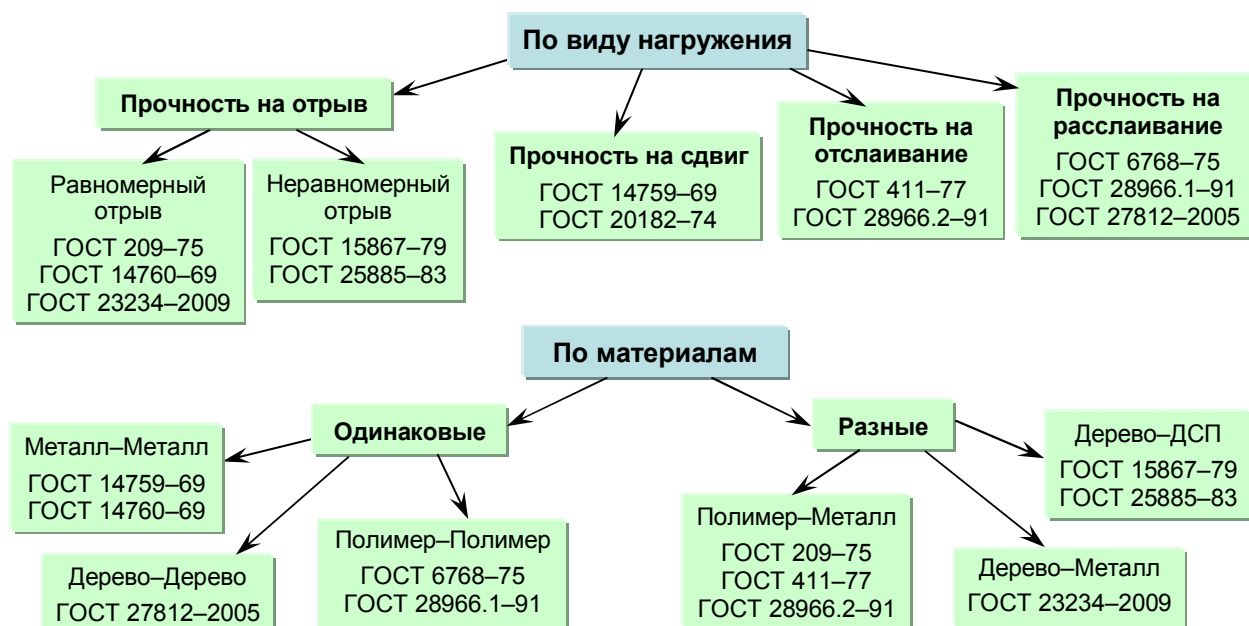


Рисунок 3.24 — Классификация действующих ГОСТов для определения прочности клеевых соединений

Так как чаще всего с помощью клея выполняют соединения, работающие на равномерный отрыв или сдвиг, рассмотрим в первую очередь именно стандарты, предназначенные для определения прочности при равномерном отрыве и сдвиге, сначала для случая склеивания одинаковых материалов, а затем для случая склеивания разных материалов. Все стандарты, приведённые ниже, являются действующими на момент написания данной диссертационной работы.

Метод определения прочности при отрыве (ГОСТ 14760–69 [6]) распространяется на клеи и устанавливает метод определения статической прочности при равномерном отрыве клеевых соединений. Сущность метода заключается в определении величины разрушающей силы при растяжении стандартного образца клеевого соединения встык усилиями, направленными перпендикулярно плоскости склеивания.

Образец для испытания, определенный данным стандартом, представляет собой соединение двух одинаковых частей — цилиндрических металлических грибков, склеенных по торцевой поверхности. Форма и размеры образца в сборе изображены на рисунке 3.25.

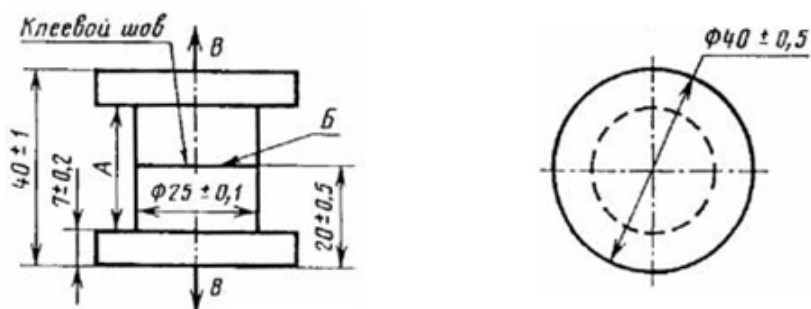


Рисунок 3.25 — Форма и размеры (в мм) образца для испытания на отрыв

Испытание образца проводится в специальном приспособлении, установленном в губках испытательной машины, до разрушения образца за счёт движения одного из зажимов с постоянной скоростью 10 мм/мин.

Предел прочности при отрыве $\sigma_{отр}$ вычисляют по формуле $\sigma_{отр} = P/F$, где P — разрушающая нагрузка; F — площадь склеивания.

Метод определения прочности при сдвиге (ГОСТ 14759–69 [5]) распространяется на клеи и устанавливает метод определения статической прочности при сдвиге клеевых соединений листовых металлов. Сущность метода заключается в определении величины разрушающей силы при растяжении стандартного образца усилиями, стремящимися сдвинуть одну половину образца относительно другой.

Образец для испытания прочности при сдвиге представляет собой две полосы листового металла, склеенные внахлестку. Размеры и форма образца приведены на рисунке 3.26.

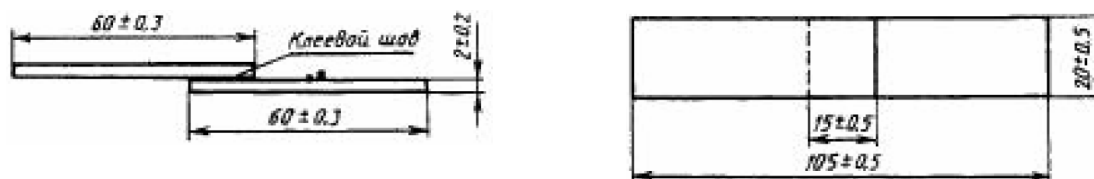


Рисунок 3.26 — Форма и размеры (в мм) образца согласно ГОСТу 14759–69

Испытание проводится до разрушения образца за счёт движения одного из зажимов с постоянной скоростью. Согласно стандарту прочность выражается величиной разрушающей нагрузки либо величиной разрушающего напряжения τ , вычисляемой по формуле $\tau = P/F$, где P — разрушающая нагрузка; F — площадь склеивания.

Примером определения прочности клеевых соединений различных материалов является ГОСТ 209–75 «Резина и клей. Методы определения прочности связи с металлом при отрыве» [7]. Данный стандарт предусматривает несколько вариантов испытаний. Для определения прочности связи резины с металлом при креплении резиновой смеси в процессе вулканизации (методы **А** и **В**) используются варианты, представленные на рисунке 3.27. Вариант испытания при креплении вулканизированных резин к металлу (метод **Б**) отличается от варианта на рисунке 3.27, б (метод **В**) наличием клеевой прослойки между резиной и металлом. Во всех этих вариантах прочность соединения вычисляется как отношение величины максимальной зарегистрированной силы к площади поперечного сечения образца.

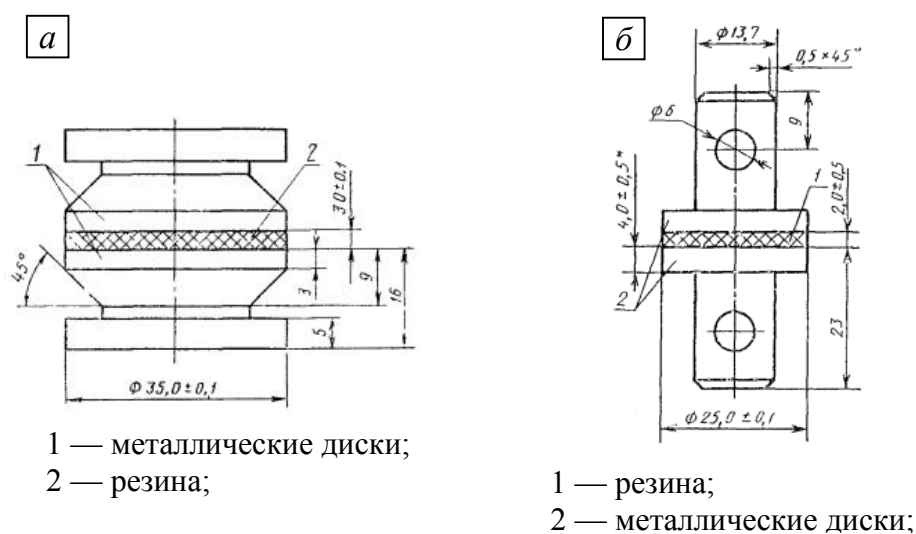


Рисунок 3.27 — Форма и размеры (в мм) образцов для испытания согласно ГОСТу 209–75: а) по методу **А**; б) по методу **Б** и **В**

Среди зарубежных стандартов рассмотрим в первую очередь те из них, которые являются аналогичными рассмотренным выше российским стандартам. Следует отметить, что зарубежные аналоги российских стандартов отличаются лишь размерами образцов, некоторыми параметрами проведения испытаний и данными, вносимыми в протокол испытаний.

Для определения статической прочности склеивания одинаковых материалов при равномерном отрыве используется национальный стандарт США «ASTM D897–08 Standard Test Method for Tensile Properties of Adhesive Bonds» [67], разработанный Американским обществом по испытанию материалов (ASTM).

Здесь образец для испытания, как и для российского стандарта, представляет собой соединение двух одинаковых цилиндрических металлических грибков, склеенных по торцевой поверхности. Форма и размеры образца изображены на рисунке 3.28.

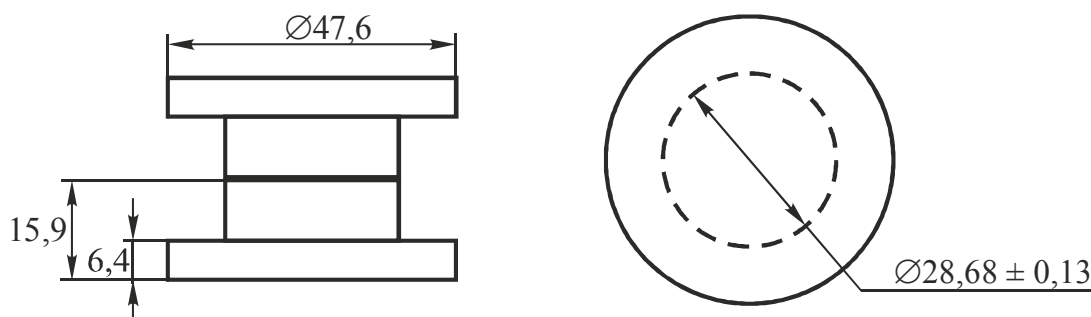


Рисунок 3.28 — Форма и размеры (в мм) образца согласно стандарту ASTM D897–08

Самым существенным отличием среди параметров проведения испытаний является скорость нагружения образца. Для данного стандарта она на порядок меньше (скорость движения одного из захватов испытательной машины должна быть постоянна и не более 1.27 мм/мин, в то время как для российского аналога рекомендуемая скорость 10 мм/мин, но допускается не выше 20 мм/мин). Согласно стандарту прочность определяется отношением разрушающей нагрузки к площади соединения.

Для определения статической прочности склеивания одинаковых материалов при равномерном сдвиге используются следующие стандарты: американский «ASTM D1002–10 Standard Test Method for Apparent Shear Strength of Single-Lap-Joint Adhesively Bonded Metal Specimens by Tension Loading (Metal-to-Metal)» [64] и международный «ISO 4587:2003 Adhesives – Determination of tensile lap-shear strength of rigid-to-rigid bonded assemblies» [118].

В обоих стандартах сообщается, что они распространяются на клеи и устанавливают метод определения прочности на сдвиг клеевых соединений жёстких материалов, склеенных внахлёстку. Как и для русского аналога, испытываемые образцы для обоих стандартов представляют собой склеенные внахлёстку полосы листового металла (рисунки 3.29 и 3.30).

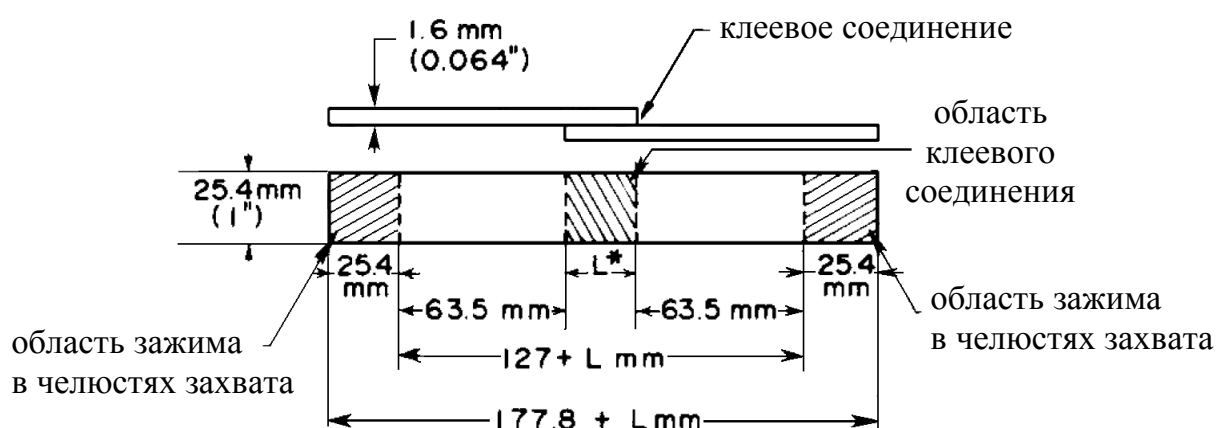


Рисунок 3.29 — Форма и размеры (в мм) образца согласно ASTM D1002–10

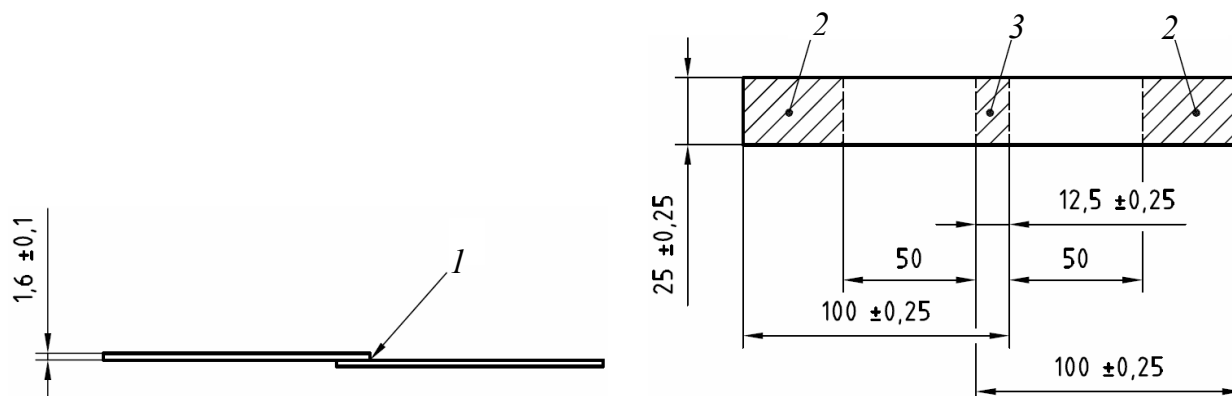


Рисунок 3.30 — Форма и размеры (в мм) образца согласно ISO 4587:2003:
 I — клеевое соединение; 2 — область зажима; 3 — область соединения

Для обоих стандартов испытания проводятся до разрушения образца за счёт движения одного из захватов испытательной машины с постоянной скоростью. Согласно стандартам прочность на сдвиг вычисляется делением величины разрушающего усилия на площадь склеивания.

Для определения предела прочности клеевого соединения разных материалов при отрыве существуют методы, установленные американским стандартом «ASTM D2095–96(2015) Standard test method for tensile strength of adhesives by means of bar and rod specimens» [66]. Сущность методов заключается в определении величины разрушающей силы при растяжении стандартных образцов усилиями, направленными перпендикулярно плоскости склеивания.

Согласно стандарту ASTM D2095–96(2015) образцы для испытания определяются стандартом «ASTM D2094–00(2014) Standard Practice for Preparation of Bar and Rod Specimens for Adhesion Tests» [65] и представляют собой цилиндр либо брусок с квадратным сечением, составленный из двух составных частей, склеенных по торцевой поверхности. Форма и размеры составных частей изображены на рисунке 3.31, *а*. Вид образца в сборе представлен на рисунке 3.31, *б*. Стандарт ASTM D2095–96(2015) применим для определения прочности склеивания не только разных, но и одинаковых материалов.

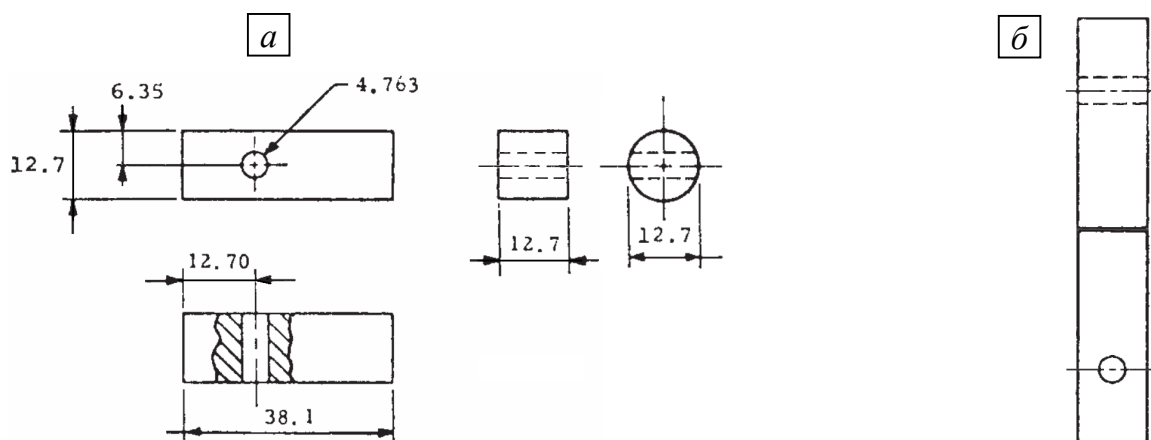


Рисунок 3.31 — Форма и размеры (в мм) составных частей (*а*) и образца (*б*)

Испытания проводятся до разрушения образца за счёт движения одного из захватов испытательной машины с постоянной скоростью. Согласно стандарту прочность на отрыв вычисляется делением величины разрушающего усилия на площадь склеивания.

Согласно действующим ГОСТам прочность клеевых соединений при отрыве и при сдвиге оценивается на основе экспериментальных данных, полученных при испытании стандартных образцов, как отношение разрушающей нагрузки к площади склеивания. Такая оценка основана на предположении, что распределение напряжений по поверхности склеивания является однородным.

Получим реальную картину распределения напряжений в образцах на основе численного моделирования. Численный расчёт напряжённо-деформированного состояния в образцах проведён с использованием стандартных процедур метода конечных элементов в коммерческом пакете ANSYS. Необходимая точность расчётов обеспечивается на основе варианта со сгущением сетки конечных элементов в зоне контакта различных материалов и окрестности особых точек [40]. Эффективной оценкой точности получаемых численных результатов при решении задач на основе принципа возможных перемещений является погрешность выполнения естественных краевых условий на свободной от нагрузок боковой поверхности образцов и на поверхности контакта различных материалов. На свободной поверхности эта погрешность оценивается значениями соотношений σ_n/P , τ_n/P , а на поверхности контакта — $(\sigma_n^1 - \sigma_n^2)/P$, $(\tau_n^1 - \tau_n^2)/P$, где σ_n , τ_n — нормальные и касательные напряжения на соответствующих поверхностях, верхний индекс соответствует принадлежности одному из двух контактирующих материалов, P — уровень внешней нагрузки. В этом случае можно добиться необходимой точности вычисляемых напряжений вне некоторой окрестности особой точки. Размеры этой окрестности зависят от степени сгущения конечно-элементной сетки.

Для представленных на рисунках 3.25 и 3.26 образцов, половинки которых выполнены из одного и того же материала, характер распределения напряжений имеет смысл оценивать только при учёте в расчётах напряжённо-

деформированного состояния клеевой прослойки толщиной t . Рассмотрим сначала результаты расчёта напряжённого состояния в образце, представленном на рисунке 3.25.

Расчёты выполнены при следующих значениях механических характеристик склеиваемого материала и клея: $E_m = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_m = 0.3$, $E_k = 4 \cdot 10^9$ Па, $\nu_k = 0.3$. Толщина клеевой прослойки варьировалась от 0.01 мм до 0.5 мм. В выполненных расчётах погрешность выполнения естественных краевых условий, за исключением окрестности особой точки размером 0.064% от радиуса образца, составляла менее 0.5%. На рисунке 3.32 приведены распределения отрывных напряжений по поверхности контакта материал–клей для некоторых значений толщины клевого слоя.

Наличие в данном случае сингулярного решения проявляется в том, что распределение напряжений в окрестности края поверхности контакта материал–клей имеет существенно неоднородный характер, а на краю поверхности напряжения асимптотически стремятся к бесконечности при увеличении числа конечных элементов. Это означает, что на практике окрестность края поверхности контакта материала и клея является зоной ярко выраженной концентрации напряжений. Размеры этой зоны зависят от толщины клевого слоя.

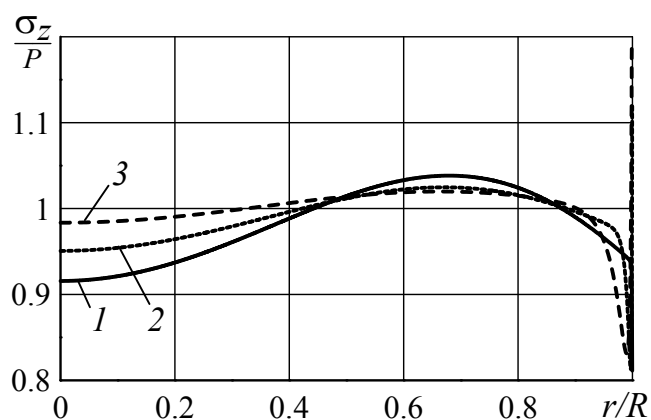


Рисунок 3.32 — Распределение отрывных напряжений на поверхности контакта материал–клей в образце для испытаний по ГОСТу 14760–69 в зависимости от толщины клевого слоя t , мм: 1 — 0.01; 2 — 0.15; 3 — 0.5

При расчёте напряжённого состояния в образце для определения прочности на сдвиг, представленном на рисунке 3.26, приняты те же самые значения механических характеристик склеиваемого материала и клея, что и в предыдущем случае. Расчётная схема и конечно-элементная сетка представлены на рисунке 3.33. Погрешность выполнения естественных краевых условий, за исключением окрестностей особых точек размером 0.57 % от длины нахлёстки, составила менее 0.5 %. Распределения сдвиговых напряжений по поверхности контакта металл – клей в зависимости от толщины клеевой прослойки приведены на рисунке 3.34.

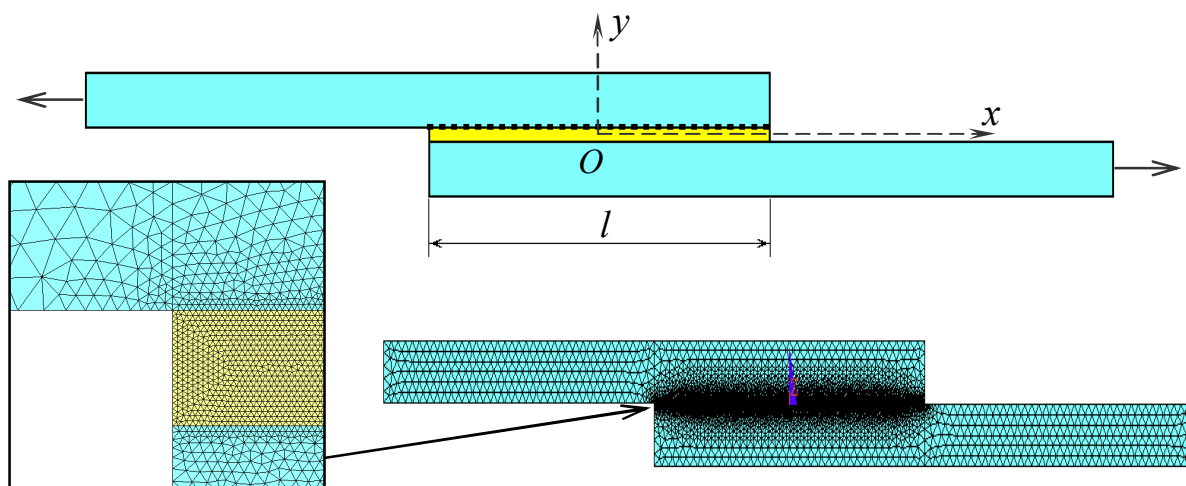


Рисунок 3.33 — Расчётная схема и конечно-элементная сетка образца для испытания прочности клеевого соединения на сдвиг по ГОСТу 14759–69 (l — длина нахлёстки)

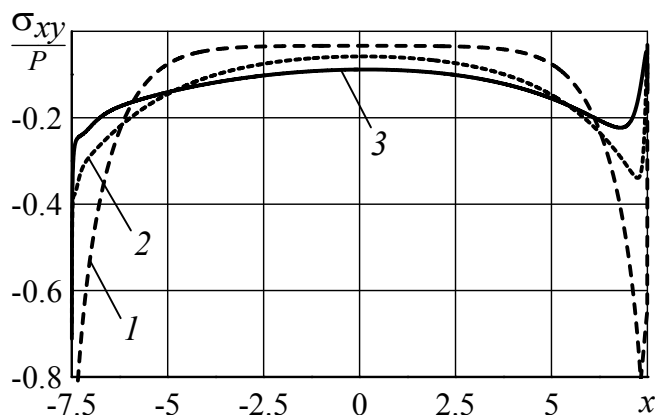


Рисунок 3.34 — Распределение касательных напряжений на поверхности контакта материал–клей образца для испытаний по ГОСТу 14759–69 в зависимости от толщины клеевого слоя t , мм: 0.01 (кривая 1); 0.15 (кривая 2); 0.5 (кривая 3)

Видно, что в окрестности особых точек (окрестности выхода на внешнюю поверхность границы контакта материала и клея) имеет место ярко выраженная концентрация напряжений для всех значений толщины клеевого слоя. Однако в данном случае толщина клеевого слоя оказывает более ощутимое влияние на распределение касательных напряжений по поверхности контакта материал – клей по сравнению с образцом для испытаний по ГОСТу 14760–69 (рисунок 3.32). Следует отметить, что несимметрия относительно точки $x = 0$ обусловлена тем, что на левом крае поверхности склеивания угол между внешними поверхностями клея и материала равен $\pi/2$, а на правом крае такой угол равен π .

Рассмотрим напряжённое состояние в образце для определения прочности связи металл – резина при испытании на отрыв (рисунок 3.27). Механические характеристики металла и резины были приняты следующими: $E_m = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_m = 0.28$, $E_r = 1.667 \cdot 10^7$ Па, $\nu_r = 0.4$.

В выполненных расчётах при использовании числа конечных элементов более 341000 погрешность выполнения естественных краевых условий, за исключением окрестности особой точки размером 0.12 % от радиуса образца, составила менее 0.5 %. Распределение отрывных напряжений по поверхности контакта металл – резина представлено на рисунке 3.35.

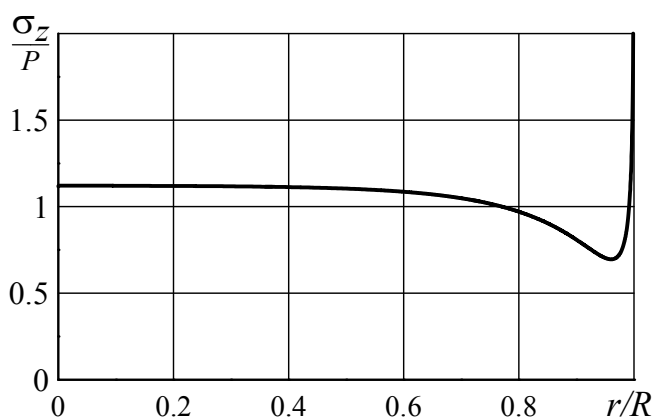


Рисунок 3.35 — Распределение отрывных напряжений на поверхности контакта металл – резина образца для испытаний по методу А ГОСТа 209–75 в случае бесклевого соединения (R — радиус образца)

Приведённый результат расчётов демонстрирует существенно неоднородное распределение отрывных напряжений с ярко выраженной концентрацией в окрестности выхода границы контакта металл – резина на внешнюю боковую поверхность образца.

Исследуем, как изменится напряжённо-деформированное состояние в образце при добавлении в расчётную схему клеевой прослойки различной толщины между металлом и резиной. Примем следующие механические характеристики клея: $E_k = 4 \cdot 10^9$ Па, $\nu_k = 0.3$.

Результаты расчётов, приведённые на рисунке 3.36, демонстрируют существенно неоднородное распределение напряжений с ярко выраженной концентрацией вблизи внешней боковой поверхности как на границе контакта металл – клей, так и клей – резина. Кроме того, изменение толщины клеевой прослойки практически не оказывает влияния на распределения отрывных напряжений по поверхности контакта клей – резина, в отличие от распределений отрывных напряжений по поверхности контакта металл – клей. На поверхности металл – клей при уменьшении толщины клеевого слоя зона концентрации напряжений в окрестности выхода клеевого слоя на поверхность уменьшается.

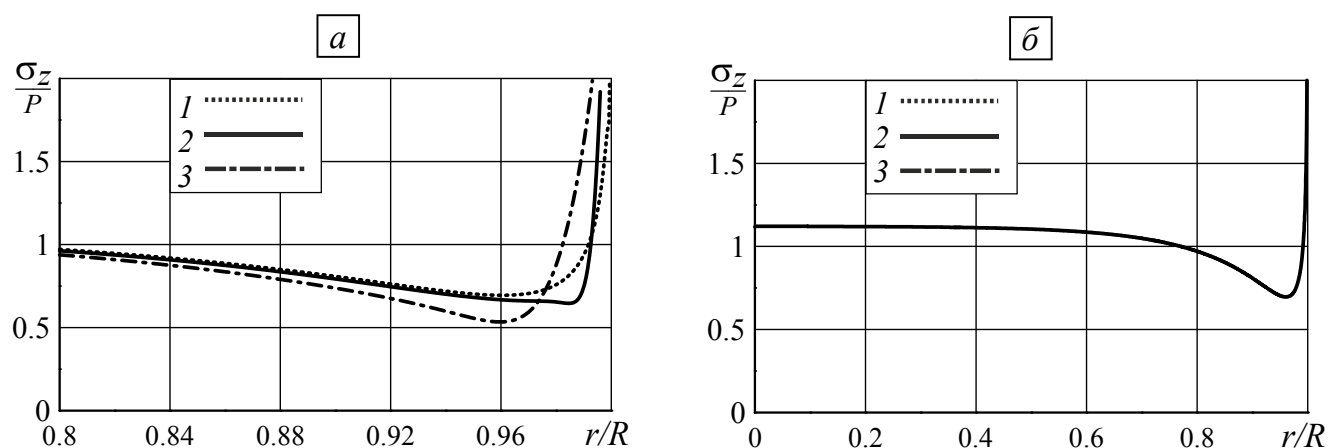


Рисунок 3.36 — Распределение отрывных напряжений на поверхностях контакта металл – клей (а) и клей – резина (б) в образце для испытаний по методу А ГОСТа 209–75 при различных толщинах клеевого слоя t , мм: 0.01 (кривая 1); 0.15 (кривая 2); 0.5 (кривая 3) (R — радиус образца)

3.4. Совершенствование методов определения прочности клеевых соединений и технологий склеивания на основе использования свойств оптимальных решений в окрестности особых точек

Расчёты напряжённо-деформированного состояния в образцах для испытаний на прочность клеевых соединений демонстрируют существенно неоднородное распределение напряжений по поверхности склеивания. Это не вполне соответствует используемым в стандартных методиках формулам расчёта прочности клеевых соединений, основанных на предположении однородного характера распределения напряжений.

Неоднородность распределения напряжений по поверхности клеевого соединения, как было продемонстрировано расчётами, обусловлена наличием сингулярного поведения напряжений в окрестности особых точек (линий). В связи с этим представляется возможным использовать для совершенствования методик испытания на прочность клеевых соединений закономерности, полученные для оптимальных геометрий в окрестности особых точек.

Продemonстрируем это на примере методики по ГОСТу 209–75 вариант А (рисунок 3.27, а). Предлагаемое усовершенствование будет связано с изменением геометрии образцов для испытания на прочность клеевых соединений. Согласно полученным результатам геометрия в окрестности особых точек должна определять границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений. Рассмотрим вариант со следующими механическими характеристиками металла $E_m = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_m = 0.28$ и резины $E_r = 1.667 \cdot 10^7$ Па, $\nu_r = 0.4$. Для данных значений механических характеристик на рисунке 3.37 в области величин (γ_m, γ_r) , определяющих углы между касательными к поверхности контакта и к внешней поверхности металла (γ_m) и клея (γ_r), приведена кривая, разделяющая решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений. Для изменения геометрии боковой поверхности используются

как наиболее технологичный вариант кольцевые выточки, обеспечивающие углы γ_m и γ_r , принадлежащие кривой на рисунке 3.37.

Рассмотрим вариант кольцевой выточки в резине ($\gamma_m = 90^\circ$, $\gamma_r = 51^\circ$) (рисунок 3.38). Для данной геометрии на рисунке 3.39 приведено распределение напряжений по поверхности контакта металл – резина.

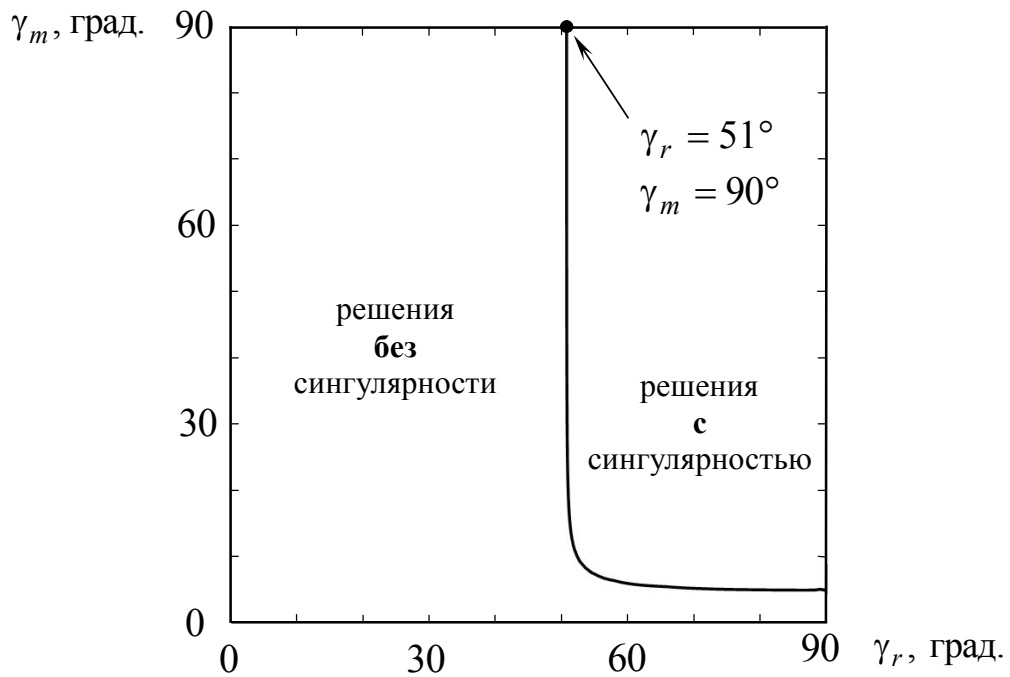


Рисунок 3.37 — Кривая, разделяющая в области параметров γ_r и γ_m решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений

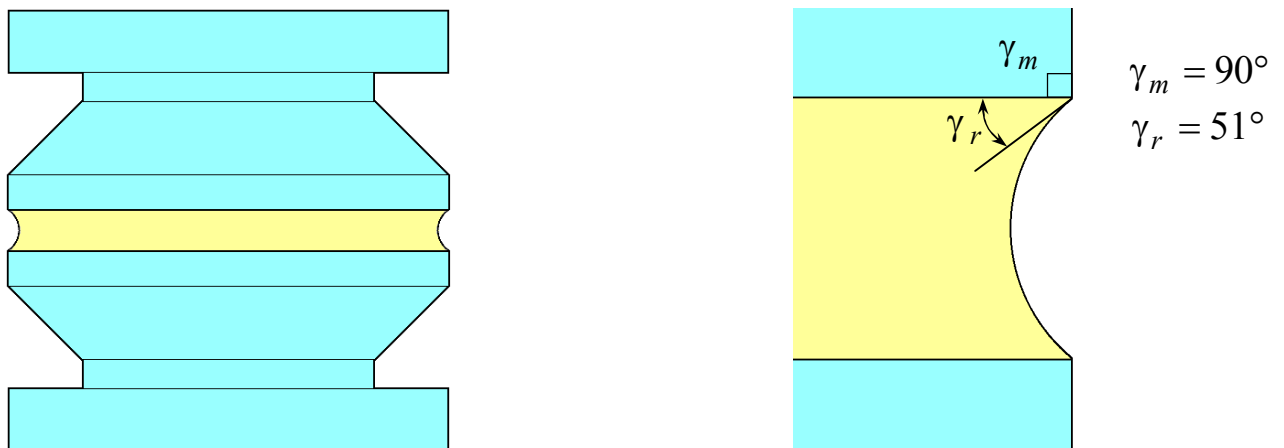


Рисунок 3.38 — Модифицированный вариант образца для испытания на прочность клеевых соединений по ГОСТу 209–75

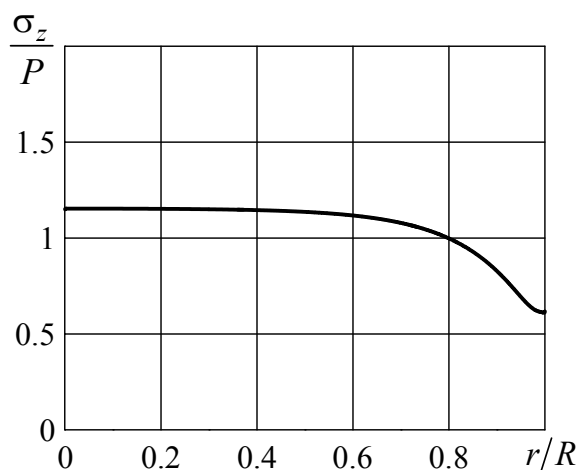


Рисунок 3.39 — Распределение отрывных напряжений на поверхностях контакта металл – резина в модифицированном образце (R — радиус образца)

Приведённые результаты в сравнении со стандартным вариантом, представленным на рисунке 3.35, демонстрируют существенно более однородные распределения напряжений по поверхности контакта металл–резина, а следовательно, и более приемлемый вариант интерпретации результатов эксперимента в рамках стандартной методики.

Существуют различные подходы и технические решения, направленные на уменьшение напряжений в клеевых соединениях внахлестку. Одно из направлений связано с изменением формы внешней поверхности клеевого слоя на концах области контакта. Для соединения внахлестку с прямым торцом клеевого слоя, полученным в результате тщательного удаления излишков клея с краёв области контакта, имеет место неоднородное распределение напряжений по поверхности контакта и сильная концентрация напряжений на концах области контакта. Изменение прямолинейной формы краевого торца клеевого слоя с помощью специально сформированных внешних излишков клея (выжимок) перераспределяет нагрузку по большей площади и обеспечивает более однородное распределение напряжений.

На рисунке 3.40 приведены два варианта клеевого соединения внахлестку: без клеевой выжимки и с клеевой выжимкой (l_H, l_{HH} — длина участка нахлестки для соединения без выжимки и с выжимкой соответственно).

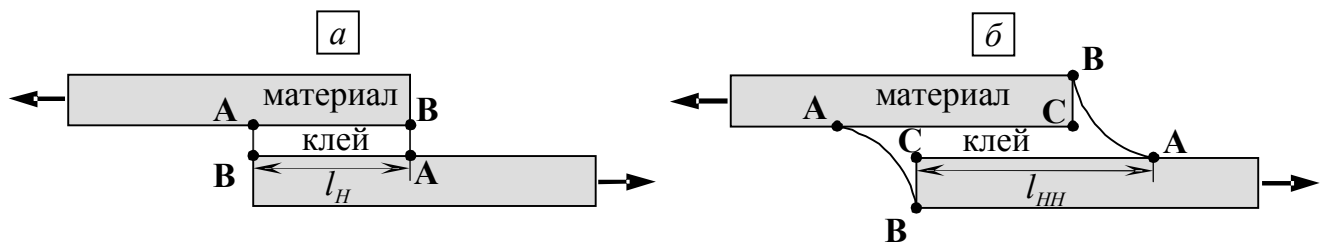


Рисунок 3.40 — Примеры клеевого соединения материалов внахлестку: без клеевой выжимки (а) и с клеевой выжимкой (б)

В ряде работ [59, 60, 63, 87, 93, 130, 172, 193] показано, что использование выжимок на концах области контакта клеевых соединений уменьшает концентрацию напряжений как в клее, так и в склеиваемых материалах. При этом исследователи в основном ограничиваются рассмотрением лишь какой-то одной формы выжимки. В большинстве случаев клеевая выжимка имеет треугольную форму и, как правило, с углом сопряжения внешней поверхности клея с поверхностью склеиваемого материала равным 45° . В работе [130] исследованы восемь вариантов геометрий выжимок, среди которых наиболее существенное уменьшение максимальных значений напряжений обеспечивает форма, образованная дугой окружности с центром и радиусом, при которых углы сопряжения равны $g_A = g_B = 9.3^\circ$ (рисунок 3.41).

Применим свойство оптимальных решений при выборе оптимального варианта дуги окружности. Рассмотрение ограниченного класса поверхностей при выборе оптимальной геометрии в данном случае не имеет принципиального значения и может быть обосновано соображениями технологичности изготовления клеевого соединения.

Рассматривается клеевое соединение, находящееся под действием растягивающего усилия $P = 445 \text{ Н}$ [130]. Модули упругости и коэффициенты Пуассона материала пластин и клея имеют следующие значения: $E_m = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu_m = 0.3$, $E_k = 4 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\nu_k = 0.3$. Толщина пластины $t_m = 2.54 \text{ мм}$, толщина слоя клея $t_k = 0.762 \text{ мм}$.

На рисунке 3.42 приведены углы, определяющие поведение напряжений в окрестностях особых точек A , B , C .

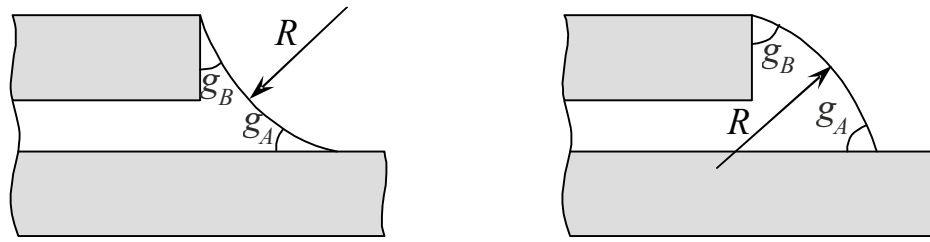


Рисунок 3.41 — Формы свободной поверхности клеевой выжимки

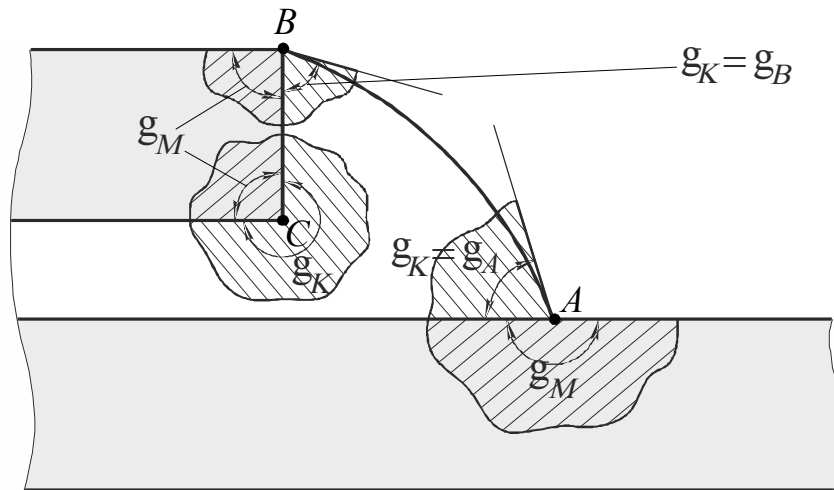


Рисунок 3.42 — Углы, определяющие поведение напряжений в окрестностях точек A , B и C

Анализ собственных значений при $g_m = 180^\circ$ показывает, что для всех $g_A > 0^\circ$ имеют место собственные значения с $0 < \text{Re}\lambda_1 < 1$. Согласно свойству оптимальных геометрий в окрестностях особых точек, при оптимальном выборе дуги окружности угол сопряжения свободной поверхности клеевого слоя и поверхности склеиваемого материала в точке A должен быть равен нулю. В особой точке B для рассматриваемых характеристик материалов при $g_B < 63^\circ$ все собственные значения имеют действительные части, большие единицы. При $g_B > 63^\circ$ появляются собственные значения с $0 < \text{Re}\lambda_1 < 1$, соответствующие сингулярным решениям. Следовательно, в точке B оптимальный угол $g_B = 63^\circ$. Для точки C сингулярные решения отсутствуют только при $g_m = g_k = 180^\circ$, но в случае соединения внахлестку данный вариант не имеет смысла. В работе [193] предлагается скругление внутреннего прямого угла в точке C . В [193] и настоящей работе радиус скругления равен толщине пластины.

На рисунке 3.43 приведено распределение интенсивности напряжений σ_u по поверхности склеивания при $g_A = 0^\circ$, $g_B = 63^\circ$ в случае наличия скругления в точке C , а также распределение σ_u для варианта внешней поверхности клеевой выжимки с углами сопряжения $g_A = g_B = 9.3^\circ$, который, согласно [130], обеспечивает наименьшую концентрацию напряжений. В отличие от [130], в настоящей работе к наилучшему варианту клеевой выжимки из работы [130] добавлено скругление прямого угла в точке C .

Анализ результатов показывает, что для полученной оптимальной геометрии напряжения в окрестностях особых точек существенно меньше, чем для наилучшего из работы [130] варианта геометрии клеевой выжимки, к которому в дополнение было добавлено скругление прямого угла в точке C .

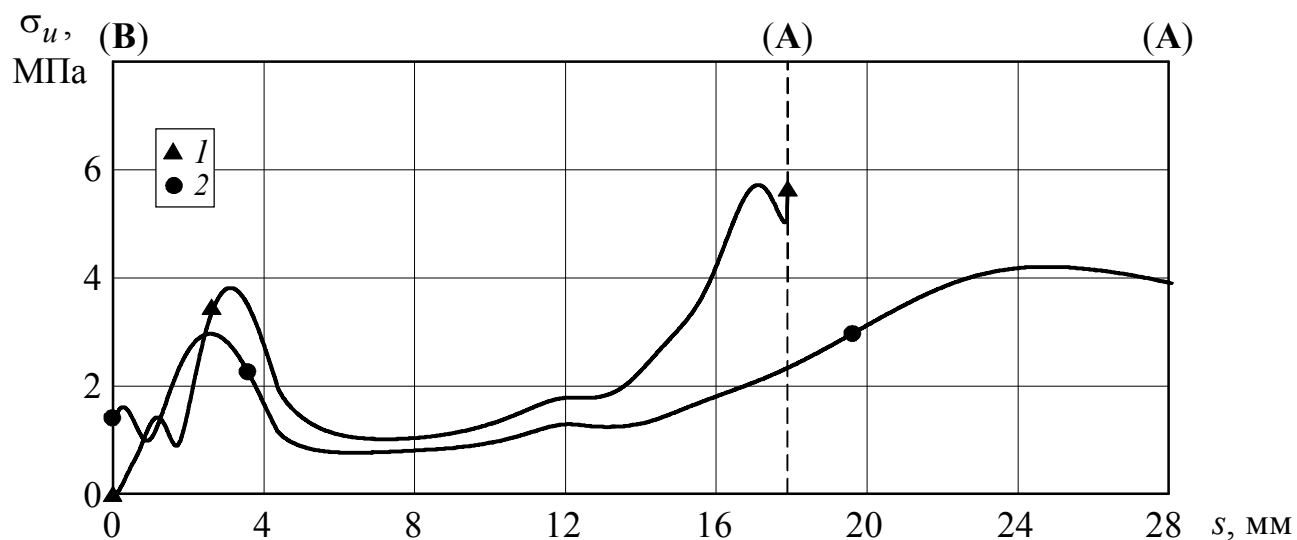


Рисунок 3.43 — Распределение интенсивности напряжений σ_u по поверхности клеевого соединения:

- 1 — вариант геометрии клеевой выжимки из статьи [130] ($g_A = g_B = 9.3^\circ$),
- 2 — оптимальный вариант геометрии клеевой выжимки ($g_A = 0^\circ$, $g_B = 63^\circ$)

3.5. Результаты экспериментов, качественно подтверждающих свойство оптимальных решений в окрестности особых точек

Для данной диссертационной работы группой экспериментаторов в составе к. т. н. В. Н. Коврова и В. Г. Золотухина в ИМСС УрО РАН были выполнены эксперименты по определению прочности клеевых соединений на образцах с различной геометрией поверхности в окрестности особых точек.

Объектом исследований являлась адгезионная пара — полиметилметакрилат (ПММА) и латунь. Механические характеристики пары следующие: модуль упругости ПММА равен $0.32 \cdot 10^4$ МПа, латуни — $9.8 \cdot 10^4$ МПа; коэффициент Пуассона одинаков для обоих материалов и равен 0.35. Форма и размеры адгезионного соединения показаны на рисунке 3.44. Геометрия соединения характеризовалась углом φ , отсчитываемым от плоскости контакта до касательной к образующей элемента из ПММА. Глубина выточек составляла 1 мм при величине диаметра образца $D = 20$ мм.

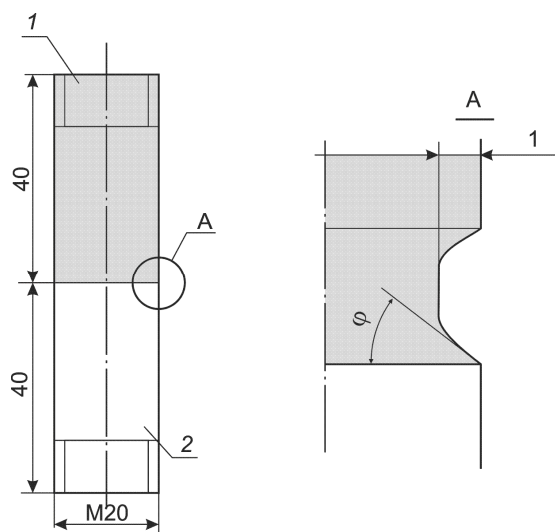


Рисунок 3.44 — Образец для испытаний (1 — ПММА, 2 — латунь)

Элементы адгезионного соединения склеивались коммерческим эпоксидным клеем при соотношении смолы и отвердителя 1:10 и выдерживались под давлением 0.03 МПа при температуре $22 \pm 2^\circ\text{C}$ 72 часа. Измерения полщины клеевой плёнки после испытаний показали, что толщина клеевого слоя составляла $h = 0.10 \div 0.15$ мм, а относительная величина $D/h = 133 \div 200$.

Пара устанавливалась в захватном приспособлении разрывной машины, обеспечивающем строгое центрирование приложения нагрузки, и нагружалась при скорости перемещения траверсы 2 мм/мин до нарушения клеевого соединения. Для каждого варианта геометрии были испытаны по пять образцов. Результаты экспериментов были статистически обработаны.

На рисунке 3.45 для различных углов φ приведены усилия P , при которых нарушались клеевые соединения. Максимальные усилия достигались при угле $\varphi = 55^\circ$. Данное значение угла в соответствующей задаче для составного клина определяет границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений. Таким образом, проведённый эксперимент качественно подтверждает обнаруженные свойства оптимальных решений в окрестности особых точек.

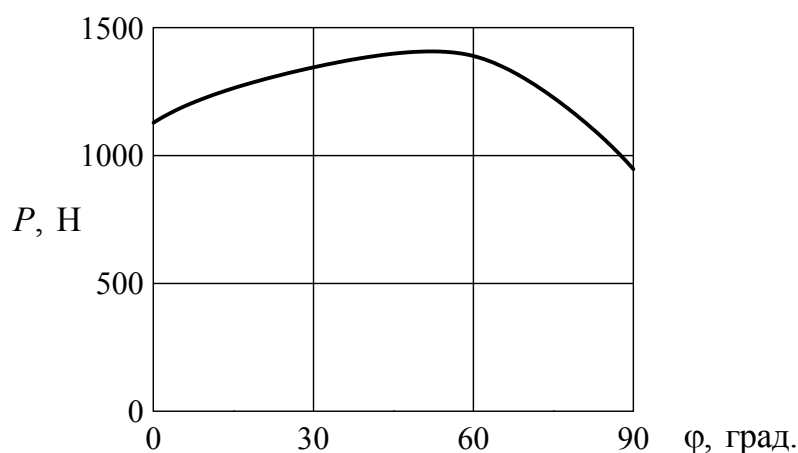


Рисунок 3.45 — Зависимость усилий P , при которых нарушались клеевые соединения, от угла на кромке стыка при нормальном отрыве

Заключение

Итоги выполненного исследования:

1. Систематизированы сингулярные решения для двумерных (и сводящихся к двумерным) задач теории упругости, обеспечивающие возможность для определения показателей сингулярности напряжений и построения границы между решениями с сингулярностью и без неё в пространстве параметров, определяющих эти решения.

2. Предложен численный алгоритм оценки показателя степенной зависимости напряжений в окрестности особых точек для различных задач теории упругости, позволяющий получать новые результаты для анизотропных тел, тел, описываемых моделью несимметричной теории упругости, и трёхмерных тел.

3. Аналитическими и численными методами установлено, что поведение напряжений в окрестности особых точек упругих тел из функционально-градиентных материалов такое же, как и в соответствующем по геометрии однородном теле с упругими характеристиками, совпадающими с константами функционально-градиентного материала в особой точке.

4. Предложена постановка задачи выбора геометрии и параметров функционально-градиентного материала в окрестности особых точек упругих тел, обеспечивающих оптимальное распределение заданной характеристики напряжённого состояния.

5. На основе решений задач оптимизации напряжённого состояния в окрестности особых точек различного типа обоснован вывод о том, что в оптимальном варианте параметры геометрии в окрестности особой точки и значения упругих постоянных в этой точке определяют границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

6. Продемонстрирована эффективность использования установленного свойства оптимальных решений в окрестности особых точек для снижения концентрации напряжений на поверхности соединения различных материалов, в том числе в клеевых и адгезионных соединениях.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. По результатам диссертационной работы можно вырабатывать рекомендации по совершенствованию элементов конструкций и конструкций в целом, предлагать оптимальные решения. Остается поле для дальнейшего исследования сингулярности напряжений в окрестности особых точек трёхмерных тел с функционально-градиентными свойствами, в рамках других моделей линейной и нелинейной теории упругости.

Список литературы

1. *Андреев, А. В.* Асимптотический анализ решения в окрестности точки излома трещины на границе раздела двух сред / А. В. Андреев, Р. В. Гольдштейн, Ю. В. Житников // ПММ. — 1999. — Т. 63, Вып. 5. — С. 865–870.
2. *Борзенков, С. М.* Расчет и оптимизация напряженно-деформированного состояния упругих тел в окрестности особых точек с использованием сингулярных элементов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Борзенков Сергей Михайлович. — Пермь, 1992. — 147 с.
3. *Борзенков, С. М.* Оптимизация упругих тел в окрестности особых точек / С. М. Борзенков, В. П. Матвеев // Изв. РАН. МТТ. — 1996. — № 2. — С. 93–100.
4. *Будаев, Б. В.* Кручение кругового конуса при статическом и динамическом нагружении / Б. В. Будаев, Н. Ф. Морозов, М. А. Нарбут // ПММ. — 1994. — Т. 58, Вып. 6. — С. 152–155.
5. ГОСТ 14759–69 Клеи. Метод определения прочности при сдвиге. — М.: Изд-во стандартов, 1998. — 13 с.
6. ГОСТ 14760–69 Клеи. Метод определения прочности при отрыве. — М.: Изд-во стандартов, 1993. — 6 с.
7. ГОСТ 209–75 Резина и клей. Методы определения прочности связи с металлом при отрыве. — М.: Изд-во стандартов, 1993. — 14 с.
8. *Дандерс, Ж.* Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и сцепленные по граням / Ж. Дандерс // Тр. Амер. об-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикл. механика. — 1969. — № 3. — С. 283–285.

9. *Каландия, А. И.* Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов / А. И. Каландия // ПММ. — 1969. — Т. 33, Вып. 1. — С. 132–135.
10. *Караш, И. Т. Б.* Конструкционная прочность стеклопластиковых оболочек вращения с межслойными дефектами структуры: дис. ... канд. тех. наук: 05.02.09 / Караш Имад Тома Бане. — Сумы, 2012. — 196 с.
11. *Ковров, В. Н.* Теоретический и экспериментальный поиск оптимальных образцов для оценки прочности клеевых соединений / В. Н. Ковров, В. П. Матвеев, Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // XVII Зимняя школа по механике сплошных сред: тезисы докладов, 28 февраля – 3 марта 2011 г. — Пермь–Екатеринбург, 2011. — С. 161.
12. *Кондратьев, В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками / В. А. Кондратьев // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1967. — Т. 16. — С. 209–292.
13. *Корепанов, В. В.* Численный анализ сингулярных решений двумерных задач несимметричной теории упругости / В. В. Корепанов, В. П. Матвеев, А. Ю. Федоров, И. Н. Шардаков // Изв. РАН. МТТ. — 2013. — № 4. — С. 50–58.
14. *Корепанова, Т. О.* Численный анализ сингулярности напряжений в вершине пространственных пересекающихся трещин / Т. О. Корепанова, В. П. Матвеев, Н. В. Севодина // Вычисл. мех. сплош. сред. — 2011. — Т. 4, № 3. — С. 68–73.
15. *Матвеев, В. П.* Метод численного анализа сингулярности напряжений в угловых точках трехмерных тел / В. П. Матвеев // Изв. РАН. МТТ. — 1995. — № 5. — С. 71–77.
16. *Матвеев, В. П.* Оптимизационный, деформационный и динамический расчет вязкоупругого осесимметричного тела со смешанными условиями на границе: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Матвеев Валерий Павлович. — М., 1977. — 205 с.
17. *Матвеев, В. П.* Численно-аналитический метод расчета сингулярности напряжений в вершине составного анизотропного клина и примеры его приложения / В. П. Матвеев, С. Г. Минакова // Исследования по механике

- материалов и конструкций. — Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. — С. 99–106.
18. *Матвеевко, В. П.* Сингулярность напряжений в вершине однородных и составных конусов при разных граничных условиях / В. П. Матвеевко, Т. О. Накарякова, Н. В. Севодииа, И. Н. Шардаков // ПММ. — 2008. — Т. 72, Вып. 3. — С. 487–49.
 19. *Матвеевко, В. П.* Исследование сингулярности напряжений в вершине эллиптического конуса / В. П. Матвеевко, Т. О. Накарякова, Н. В. Севодина, И. Н. Шардаков // ДАН. — 2006. — Т. 411, № 3. — С. 326–329.
 20. *Матвеевко, В. П.* Оптимизация геометрии в окрестности особых точек составных упругих тел на примере клеевого соединения внахлестку / В. П. Матвеевко, Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред: тезисы докладов, 18–22 февраля 2013 г. — Пермь–Екатеринбург, 2013. — С. 245.
 21. *Матвеевко, В. П.* Оптимизация геометрии упругих тел в окрестностях особых точек на примере клеевого соединения внахлестку / В. П. Матвеевко, Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // ПМТФ. — 2013. — № 5. — С. 180–186.
 22. *Матвеевко, В. П.* Анализ сингулярности напряжений в особых точках упругих тел из функционально-градиентных материалов / В. П. Матвеевко, А. Ю. Федоров, И. Н. Шардаков // ДАН. — 2016. — Т. 466, № 1. — С. 38–42.
 23. *Матвеевко, В. П.* Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений / В. П. Матвеевко, А. Ю. Федоров // Вычисл. мех. сплош. сред. — 2011. — Т. 4, № 4. — С. 63–70.
 24. *Матвеевко, В. П.* Анализ сингулярности напряжений и задачи оптимизации напряжённого состояния в особых точках упругих тел из функционально-градиентных материалов / В. П. Матвеевко, А. Ю. Федоров // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 20–24 августа 2015 года. — Казань, 2015. — С. 2501–2503.

25. *Матвеевко, В. П.* Численный анализ стандартных методов по определению прочности клеевых соединений / В. П. Матвеевко, А. Ю. Федоров // Неравновесные переходы в сплошных средах: тезисы докладов всероссийской конференции молодых учёных, 26–27 ноября 2010 г. — Пермь, 2010. — С. 89.
26. *Минакова, С. Г.* Численно-аналитический метод расчета показателей сингулярности напряжений в вершинах плоских и пространственных клиньев: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Минакова Светлана Григорьевна. — Пермь, 1990. — 136 с.
27. *Михайлов, С. Е.* Сингулярность напряжений в окрестности ребра в составном неоднородном анизотропном теле и некоторые приложения к композитам / С. Е. Михайлов // Изв. АН СССР. МТТ. — 1979. — № 5. — С. 103–110.
28. *Накарякова, Т. О.* Исследование сингулярности напряжений в вершине круговых и некруговых конусов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Накарякова Татьяна Олеговна. — Пермь, 2009. — 125 с.
29. *Новацкий, В.* Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
30. *Партон, В. З.* Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. — М.: Наука, 1981. — 688 с.
31. *Попов, Г. Я.* Напряженное состояние упругого составного конуса при наличии центра вращения у острия конуса / Г. Я. Попов // ПММ. — 2006. — Т. 70, Вып. 4. — С. 660–672.
32. *Севодина, Н. В.* Влияние на прочность клеевых соединений геометрии клеевых кромок / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // Тезисы докладов VII Российской конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение», 23–27 апреля 2012 г. — Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2012. — С. 108.
33. *Севодина, Н. В.* Общая закономерность при оптимизации формы упругих тел в окрестности особых точек / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // Актуальные проблемы механики, математики, информатики: сб. тез. науч.-практ. конф.,

- 30 октября – 1 ноября 2012 г. / гл. ред. В.И. Яковлев. — Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т, 2012. — С. 65.
34. *Севодина, Н. В.* Сингулярные решения в вершинах составных плоских клиньев / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // Прикладная математика, механика и процессы управления. — 2013. — Т. 1. — С. 74–85.
35. *Севодина, Н. В.* Сингулярные решения в вершинах составных плоских клиньев / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // Прикладная математика, механика и процессы управления: тезисы докладов всероссийской научно-технической интернет-конференции студентов и молодых учёных, 4–19 ноября 2013 г. — Электрон. текст. изд. (1,02 Мб). — 1 электрон. опт. диск. — Пермь: ПНИПУ, 2014. — С. 47–49.
36. *Севодина, Н. В.* Совершенствование методов определения прочности клеевых соединений на основе численного моделирования / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров // Вестник ПНЦ. — 2014. — № 2. — С. 4–11.
37. *Севодина, Н. В.* Об оптимизации формы упругих тел в окрестности особых точек с использованием пакета Ansys / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров, А. В. Фонарев // Неравновесные переходы в сплошных средах: материалы всероссийской конференции молодых учёных, 4–5 декабря 2009. — Пермь, 2009. — С. 227–230.
38. *Севодина, Н. В.* Оптимизация формы упругих тел с концентраторами напряжений в конечно-элементной среде Ansys / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров, А. В. Фонарев // Неравновесные переходы в сплошных средах: тезисы докладов всероссийской конференции молодых учёных, 4–5 декабря 2009. — Пермь, 2009. — С. 72.
39. *Севодина, Н. В.* Поиск конструктивных решений для снижения концентрации напряжений в упругих телах / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров, А. В. Фонарев // Механика микронеоднородных материалов и разрушение: тезисы докладов VI всероссийской конференции, 24–28 мая 2010. — Екатеринбург, 2010. — С. 24.

40. *Севодина, Н. В.* Поиск конструктивных решений для снижения концентрации напряжений в упругих телах [Электронный ресурс] / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров, А. В. Фонарев // VI Российская конференция «Механика микронеоднородных материалов и разрушение». — Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2010. — С. 1–6. — Режим доступа: <http://www.imach.uran.ru/conf/mmp/doklad/d32.doc> (дата обращения: 24.02.2016).
41. *Севодина, Н. В.* Постановка задачи и разработка алгоритма оптимизации формы упругих тел в окрестности особых точек / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров, А. В. Фонарев // Современные проблемы математики и её прикладные аспекты: материалы всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, 12 марта 2010. — Пермь, 2010. — С. 128.
42. *Севодина, Н. В.* Снижение концентрации напряжений в зонах контакта неоднородных тел / Н. В. Севодина, А. Ю. Федоров, А. В. Фонарев // Математическое моделирование и краевые задачи: труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций. — Самара: СамГТУ, 2010. — С. 321–324.
43. *Степанова, Л. В.* О собственных значениях в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями / Л. В. Степанова // ПМТФ. — 2008. — Т. 49, № 1. — С. 173–180.
44. *Степанова, Л. В.* Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния / Л. В. Степанова, Е. М. Яковлева // Вестник ПНИПУ. Механика. — 2014. — № 3. — С. 129–162.
45. *Тимошенко, С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1975. — 575 с.
46. *Федоров, А. Ю.* Влияние клеевой прослойки на напряжённое состояние в образцах для испытания на прочность клеевых соединений / А. Ю. Федоров // Неравновесные переходы в сплошных средах: тезисы докладов всероссийской конференции молодых учёных, 16–17 декабря 2011. — Пермь, 2011. — С. 75.

47. *Федоров, А. Ю.* Влияние клеевой прослойки на напряжённое состояние в образцах для испытания на прочность клеевых соединений / А. Ю. Федоров // Вестник пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Вып. 5(9). — С. 183–186.
48. *Федоров, А. Ю.* Исследование сингулярности напряжений в окрестности общей вершины нескольких радиальных трещин / А. Ю. Федоров // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред: тезисы докладов, 24–27 февраля 2015 г. — Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. — С. 330.
49. *Федоров, А. Ю.* Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния в образцах для испытаний на прочность клеевых соединений / А. Ю. Федоров // Тезисы V Российской научно-технической конференции «Ресурс и диагностика материалов и конструкций», 25–29 апреля 2011. — Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2011. — С. 95.
50. *Федоров, А. Ю.* Поиск оптимальных геометрических параметров при проектировании составных конструкций / А. Ю. Федоров // Неравновесные переходы в сплошных средах: тезисы докладов всероссийской конференции молодых учёных, 16–17 ноября 2012. — Пермь, 2012. — С. 75.
51. *Чобанян, К. С.* Напряжения в составных упругих телах / К. С. Чобанян. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. — 338 с.
52. *Эскин, Г. И.* Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными / Г. И. Эскин // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1970. — Т. 21. — С. 245–292.
53. *Яковлева, Е. М.* К вопросу о нелинейных задачах на собственные значения, возникающих в механике разрушения / Е. М. Яковлева // Вестник СамГУ. — 2015. — № 3. — С. 125–139.
54. Adhesive-bonded single-lap joints: technical report / Hart-Smith L.J. — Long Beach, California: Douglas Aircraft Co., January 1973. — 126 p. — NASA Langley Report CR-112236. — Режим доступа: <http://www.ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19740005083.pdf> (дата обращения: 24.02.2016).

55. Adhesive-bonded double-lap joints: technical report / Hart-Smith L.J. — Long Beach, California: Douglas Aircraft Co., January 1973. — 118 p. — NASA Langley Report CR-112235. — Режим доступа: <http://www.ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19740005082.pdf> (дата обращения: 24.02.2016).
56. Adhesive-bonded scarf and stepped-lap joints: technical report / Hart-Smith L. J. — Long Beach, California: Douglas Aircraft Co., January 1973. — 127 p. — NASA Langley Report CR-112237. — Режим доступа: <http://www.ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19740005084.pdf> (дата обращения: 24.02.2016).
57. *Adams, R. D.* Prediction of strength of joints between composite materials / R. D. Adams, N. A. Peppiatt, J. Coppendale // Symp. Jointing in fibre reinforced plastics. Imperial College. — London: IPC Sci Technol Press, 1978. — P. 64–78.
58. *Adams, R. D.* Structural adhesive joints in engineering / R. D. Adams, J. Comyn, W. C. Wake — London: Chapman and Hall, 1998. — 376 p.
59. *Adams, R. D.* Stress analysis and failure properties of carbon-fibre-reinforced-plastic/steel double-lap joints / R. D. Adams, R. W. Atkins, J. A. Harris, A. J. Kinloch // J. Adhes. — 1986. — Vol. 20, No. 1. — P. 29–53.
60. *Adams, R. D.* Stress analysis of adhesive-bonded lap joints / R. D. Adams, N. A. Peppiatt // J. Strain. Anal. Eng. — 1974. — Vol. 9, No. 3. — P. 185–196.
61. *Adams, R. D.* Stress analysis of adhesive bonded tubular lap joints / R. D. Adams, N. A. Peppiatt // J. Adhes. — 1977. — Vol. 9, No. 1. — P. 1–18.
62. *Adams, R. D.* Stress analysis of axisymmetric butt joints loaded in torsion and tension / R. D. Adams, J. Coppendale, N. A. Peppiatt // J. Strain. Anal. Eng. — 1978. — Vol. 13, No. 1. — P. 1–10.
63. *Adams, R. D.* The influence of local geometry on the strength of adhesive joints / R. D. Adams, J. A. Harris // Int. J. Adhes. Adhes. — 1987. — Vol. 2, No. 1. — P. 69–80.
64. ASTM D1002–10 Standard test method for apparent shear strength of single-lap-joint adhesively bonded metal specimens by tension loading (Metal-to-Metal). — West Conshohocken: ASTM, 2010. — 6 p.

65. ASTM D2094–00(2014) Standard practice for preparation of bar and rod specimens for adhesion tests. — West Conshohocken: ASTM, 2014. — 4 p.
66. ASTM D2095–96(2015) Standard test method for tensile strength of adhesives by means of bar and rod specimens. — West Conshohocken: ASTM, 2015. — 3 p.
67. ASTM D897–08 Standard test method for tensile properties of adhesive bonds. — West Conshohocken: ASTM, 2008. — 3 p.
68. *Baldan, A.* Adhesively-bonded joints and repairs in metallic alloys polymers and composite materials: Adhesives adhesion theories and surface pretreatment / A. Baldan // *J. Mater. Sci.* — 2004. — Vol. 39. — P. 1–49.
69. *Baldan, A.* Adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: Mechanical and environmental durability performance / A. Baldan // *J. Mater. Sci.* — 2004. — Vol. 39. — P. 4729–4797.
70. *Banea, M. D.* Adhesively bonded joints in composite materials: an overview / M. D. Banea, L. F. M. da Silva // *P. I. Mech. Eng. L.-J. Mat.* — 2009. — Vol. 223. — P. 1–18.
71. *Banea, M. D.* Smart adhesive joints: an overview of recent developments / M. D. Banea, L. F. M. da Silva, R. D. S. G. Campilho, Ch. Sato // *J. Adhesion.* — 2014. — Vol. 90, No. 1. — P. 16–40.
72. *Bobaru, F.* Shape sensivity analysis and shape optimization in planar elasticity using th element-free Galerkin method / F. Bobaru, S. Mukherjee // *Comput. Method. Appl. M.* — 2001. — Vol. 190, No. 32–33. — P. 4319–4337.
73. *Bogy D. B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedges angles under surface tractions / D. B. Bogy // *J. Appl. Mech.* — 1971. — Vol. 38, No. 2. — P. 377–386.
74. *Bogy, D. B.* On the plane elastostatic problems of a loaded crack terminating at a material interface // *J. Appl. Mech.* — 1971. — Vol. 38, No. 4. — P. 911–918.
75. *Bogy, D. B.* On the problem of edge-bonded elastic quarter-planes loaded at the boundary / D. B Bogy // *Int. J. Solid. Struct.* — 1970. — Vol. 6, No. 9. — P. 1287–1313.

76. *Bogy, D. B.* The plane solution for anisotropic elastic wedges under normal and shear loading / D. B. Bogy // *J. Appl. Mech.* — 1972. — Vol. 39, No. 4. — P. 1103–1109.
77. *Bogy, D. B.* Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials / D. B. Bogy, K. C. Wang // *Int. J. Solid. Struct.* — 1971. — Vol. 7, No. 8. — P. 993–1005.
78. *Carpenter, W. C.* A path independent integral for computing stress intensities for V-notched cracks in a bi-material / W. C. Carpenter, C. Byer // *Int. J. Fracture.* — 1987. — Vol. 35, No. 4. — P. 245–268.
79. *Carpinteri, A.* Influence of the intermediate material on the singular stress field in trimaterial junctions / A. Carpinteri, M. Paggi // *J. Mater. Sci.* — 2006. — Vol. 42, No. 1. — P. 95–101.
80. *Carpinteri, A.* On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials / A. Carpinteri, M. Paggi // *Int. J. Fracture.* — 2005. — Vol. 135, No. 1. — P. 267–283.
81. *Comninou, M.* Stress singularity at a sharp edge in contact problems with friction / M. Comninou // *Z. Angew. Math. Phys.* — 1976. — Vol. 27, No. 4. — P. 493–499.
82. *Cornell, R. W.* Determination of stresses in cemented lap joints / R. W. Cornell // *J. Appl. Mech.* — 1953. — Vol. 20, No. 3. — P. 355–364.
83. *Chen, M. C.* A novel hybrid finite element analysis of bimaterial wedge problems / M. C. Chen, K. Y. Sze // *Eng. Fract. Mech.* — 2001. — Vol. 68, No. 13. — P. 1463–1476.
84. *Chiang, F. P.* Three-dimensional crack tip deformation: an experimental study and comparison to HRR field / F. P. Chiang, T. V. Hareesh // *Int. J. Fracture.* — 1988. — Vol. 36, No. 4. — P. 243–257.
85. *Coker, D.* Experimental observation of intersonic crack growth in asymmetrically loaded unidirectional composite plates / D. Coker, A. J. Rosakis // *Philos. Mag. A.* — 2001. — Vol. 81, No. 3. — P. 571–595.

86. *Cowin, S. C.* Singular stress concentrations in plane Cosserat elasticity / S. C. Cowin // *Z. Angew. Math. Phys.* — 1969. — Vol. 20, No. 6. — P. 979–982.
87. *Crocombe, A. D.* Influence of the spew fillet and other parameters on the stress distribution in the single lap joint / A. D. Crocombe, R. D. Adams // *J. Adhesion.* — 1981. — Vol. 13, No. 2. — P. 141–155.
88. *Delale, F.* Stress singularities at the vertex of a cylindrically anisotropic wedge / F. Delale, F. Erdogan, H. Boduroglu // *Int. J. Solids. Struct.* — 1982. — Vol. 19, No. 4. — P. 247–256.
89. *Dally, J. W.* Dynamic photoelastic studies of fracture / J. W. Dally // *Exp. Mech.* — 1979. — Vol. 19, No. 10. — P. 349–361.
90. *Dempsey, J. P.* On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge / J. P. Dempsey, G. B. Sinclair // *J. Elasticity.* — 1981. — Vol. 11, No. 3. — P. 317–327.
91. *Daxini, S. D.* A review on recent contribution of meshfree methods to structure and fracture mechanics applications / S. D. Daxini, J. M. Prajapati // *Scientific World. J.* — 2014. — Vol. 2014, Article ID 247172. — P. 1–13. — Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/247172> (дата обращения: 24.02.2016).
92. *Dimitrov, A.* Efficient computation of order and mode of corner singularities in 3D-elasticity / A. Dimitrov, H. Andrä, E. Schnack // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 2001. — No. 52, No. 8. — P. 805–827.
93. *Dorn, L.* The stress state and failure properties of adhesive-bonded plastic/metal joints / L. Dorn, W. Liu // *Int. J. Adhes. Adhes.* — 1993. — Vol. 13, No. 1. — P. 21–31.
94. *Eischen J. W.* Fracture of nonhomogeneous materials / J. W. Eischen // *Int. J. Fracture.* — 1987. — Vol. 34, No. 1. — P. 3–22.
95. *Fedorov, A.* Critical and constructive analysis of the experimental schemes for evaluation of adhesive strength / A. Fedorov, V. Matveenko, N. Sevodina // *Book of Abstracts: EngOpt2010 2nd International Conference on Engineering Optimization, 6–9 September 2010, Lisbon.* — Lisbon: Instituto Superior Técnico, 2010. — P. 175–176.
96. *Fedorov, A. Yu.* Selection of the optimum geometry of test specimens for determination of tensile strength of adhesive joints / A. Yu. Fedorov,

- V. P. Matveenko // Book of Abstracts of XXXIX Summer School «Advanced Problems in Mechanics» — Saint-Petersburg: IPME RAS, 2011. — P. 44–45.
97. *Fedorov, A. Yu.* Optimization of geometry of adhesive joints [Электронный ресурс] / A. Yu. Fedorov, N. V. Sevodina // Abstract presented at WCCM-ECCM-ECFD-2014, July 20 – 25, 2014. — Barcelona, Spain, 2014. — P. 1–2. — Режим доступа: <http://www.wccm-eccm-ecfd2014.org/admin/files/fileabstract/a1938.pdf> (дата обращения: 24.02.2016).
98. *Fedorov, A. Yu.* Application of singular solutions for optimization of geometry of specimens used for testing the strength of adhesive joints / A. Yu. Fedorov, V. P. Matveenko // Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics / editors N.K. Gupta, A.V. Manzhurov, R. Velmurugan. — New Delhi: Elite Publishing House PVT LTD, 2013. — P. 156–167.
99. *Fenner, D. N.* Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface / D. N. Fenner // Int. J. Fracture. — 1976. — Vol. 12, No. 5. — P. 705–721.
100. *Fessler, H.* Dynamic photoelastic studies of fracture / H. Fessler, D. O. Mansell // J. Mech. Eng. Sci. — 1962. — Vol. 4, No. 3. — P. 213–225.
101. *Gleich, D. M.* Structural bonded joints analysis: an overview / D. M. Gleich, M. J. L. van Tooren, A. Beukers // Adhesive joints: formation, characteristics and testing / editor K. L. Mittal. — Boston: VSP, 2002. — P. 159–200.
102. *Goland, M.* The stresses in cemented joints / M. Goland, E. Reissner // J. Appl. Mech. — 1944. — Vol. 11, No. 1. — P. A17–A27.
103. *Gu, L.* A numerical study of stress singularities in a two-material wedge / L. Gu, T. Belytschko // Int. J. Solids. Struct. — 1994. — Vol. 31, No. 6. — P. 865–889.
104. *Haftka, R. T.* Structural shape optimization – a survey / R. T. Haftka, R. V. Grandhi // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 1986. — Vol. 57, No. 1. — P. 91–106.
105. *Harris, J. A.* Strength prediction of bonded single lap joints by non-linear finite element methods / J. A. Harris, R. D. Adams // Int. J. Adhes. Adhes. — 1984. — Vol. 4, No. 2. — P. 65–78.

106. *Hasanyan, D.* Elastic stress and magnetic field concentration near the vertex of a soft-ferromagnetic 2d compound wedge / D. Hasanyan, Z. Qin, L. Librescu // *J. Appl. Mech.* — 2008. — Vol. 75, No. 4. — P. 041013-1–6.
107. *He, D.* Stress analysis and strength evaluation of scarf adhesive joints with dissimilar adherends subjected to static tensile loadings / D. He, T. Sawa, A. Karami // *Int. J. Adhes. Adhes.* — 2009. — Vol. 3, No. 8. — P. 1033–1044.
108. *He, X.* A review of finite element analysis of adhesively bonded joints / X. He // *Int. J. Adhes. Adhes.* — 2011. — Vol. 31, No. 4. — P. 248–264.
109. *He, X.* Recent development in finite element analysis of clinched joints / X. He // *Int. J. Adv. Manuf. Tech.* — 2010. — Vol. 48, No. 5–8. — P. 607–612.
110. *He, X.* Self-pierce riveting for sheet materials: state of the art / X. He, I. Pearson, K. Young // *J. Mater. Process. Tech.* — 2008. — Vol. 199, No. 1–3. — P. 27–36.
111. *Hein, V. L.* Stress singularities in a two-material wedge / V. L. Hein, F. Erdogan // *Int. J. Fract. Mech.* — 1971. — Vol. 7, No. 3. — P. 317–330.
112. *Hu, N.* Shape-optimum design of a bi-material single-lap joint / N. Hu, B. Wang, H. Sekine, Z. Yao, G. Tan // *Compos. Struct.* — 1998. — Vol. 41, No. 3–4. — P. 315–330.
113. *Hsu, Y.-L.* A review of structural shape optimization / Y.-L. Hsu // *Comput. Ind.* — 1994. — Vol. 25, No. 1. — P. 3–13.
114. *Huang, C. S.* Corner stress singularities in an FGM thin plate / C. S. Huang, M. J. Chang // *Int. J. Solids. Struct.* — 2007. — Vol. 44, No. 9 — P. 2802–2819.
115. *Hutchinson, J. W.* Crack paralleling to an interface between dissimilar materials / J. W. Hutchinson, M. E. Mear, J. R. Rice // *J. Appl. Mech.* — 1987. — Vol. 54, No. 4. — P. 828–832.
116. *Hung, Y. Y.* Simultaneous measurement of three displacement derivatives using a multiple image-shearing interferometric camera / Y. Y. Hung, A. J. Durelli // *J. Strain. Anal. Eng. Design.* — 1979. — Vol. 14, No. 3. — P. 81–88.
117. *Ingen, J. W. van* Stress analysis of adhesively bonded single lap joints / J.W. van Ingen, A. Vlot — Delft University of Technology, April 1993. — Report

- LR-740. — Режим доступа: <http://repository.tudelft.nl/assets/uuid:211d5e4e-bf11-4c71-8a43-6c43a5ce45a4/LR-740.pdf> (дата обращения: 24.02.2016).
118. ISO 4587:2003 Adhesives – Determination of tensile lap-shear strength of rigid-to-rigid bonded assemblies. — Geneva: ISO, 2003. — 4 p.
119. *Kalthoff, J. F.* The shadow optical method of caustics / J. F. Kalthoff // Photoelasticity. Proceedings of the international symposium on photoelasticity / M. Nisida, K. Kawata. — Japan: Springer Japan, 1986 — P. 109–120.
120. *Kang, B. S.-J.* Stable crack growth in aluminum tensile specimens / B. S.-J. Kang, A. S. Kobayashi, D. Pos // Exp. Mech. — 1987. — Vol. 27, No. 3. — P. 234–245.
121. *Karp, S. N.* The elastic-field in the neighbourhood of a crack of arbitrary angle / S. N. Karp, F. C. J. Karal // Commun. Pur. Appl. Math. — 1962. — Vol. 15. — P. 413–421.
122. *Kim, N. H.* Numerical method for shape optimization using meshfree method / N. H. Kim, K. K. Choi, M. E. Botkin // Struct. Multidisc. Optim. — 2003. — Vol. 24. — P. 418–429.
123. *Kimberley, J.* Dynamic crack kinking from a PMMA-Homalite interface / J. Kimberley, J. Lambros // Exp. Mech. — 2004. — Vol. 44, No. 2. — P. 158–166.
124. *Kinloch, A. J.* Adhesion and adhesives: science and technology / A. J. Kinloch. — London: Chapman and Hall, 1987. — 441 p.
125. *Kozlov, V. A.* Spectral problems associated with corner singularities of solutions of elliptic equations / V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann // Mathematical surveys and monographs. — 2001. — Vol. 85. — Providence: American Mathematical Society. — 437 p.
126. *Kwak, B. M.* A review on shape optimal design and sensitivity analysis / B. M. Kwak // Struct. Eng. Earthquake Eng. — 1994. — Vol. 10, No. 4. — P. 159s–174s.
127. *Lakes, R. S.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua / R. S. Lakes // Continuum models for materials with microstructure / editor H. Muhlhaus. — 1995. — P. 1–22.

128. *Lambros, J.* Dynamic crack initiation and growth in thick unidirectional graphite/epoxy plates / J. Lambros, A. J. Rosakis // *Compos. Sci. Tech.* — 1997. — Vol. 57, No. 1. — P. 55–65.
129. *Lambros, J.* Shear dominated transonic interfacial crack growth in a bimaterial—I. Experimental observations / J. Lambros, A. J. Rosakis // *J. Mech. Phys. Solid.* — 1995. — Vol. 43, No. 2. — P. 169–188.
130. *Lang, T. P.* Effect of spew geometry on stresses in single lap adhesive joints / T. P. Lang, P. K. Mallick // *Int. J. Adhes. Adhes.* — 1998. — Vol. 18, No. 1. — P. 167–177.
131. *Leguillon, D.* Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity / D. Leguillon, E. Sanchez-Palencia. — Masson: Wiley Paris, 1987. — 200 p.
132. *Linkov, A.* Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges / A. Linkov, L. Rybarska-Rusinek // *Int. J. Eng. Sci.* — 2012. — Vol. 61. — P. 87–93.
133. *Liu, C.* A study of the fracture behavior of unidirectional fiber-reinforced composites using coherent gradient sensing (CGS) interferometry / C. Liu, A. J. Rosakis, R. W. Ellis, M. G. Stout // *Int. J. Fracture.* — 1998. — Vol. 90, No. 4. — P. 355–382.
134. *Lubarda, V. A.* The effects of couple stresses on dislocation strain energy / V. A. Lubarda // *Int. J. Solids. Struct.* — 2003. — Vol. 40, No. 15. — P. 3807–3826.
135. *Mackerle, J.* Finite element analysis and simulation of adhesive bonding, soldering and brazing: a bibliography (1976–1996) / J. Mackerle // *Model. Simul. Mater. Sc.* — 1997. — Vol. 5, No. 2. — P. 159–185.
136. *Matveenko, V. P.* Theoretical and applied results of the analysis of stress singularity in the vicinity of singular points in elastic bodies made of functionally graded materials / V. P. Matveenko, A. Yu. Fedorov // *Abstracts of the Second Greek-Russian Symposium on Advanced Solid and Fracture Mechanics*, edited by E.E. Gdoutos, M.S. Konsta-Gdoutos and R. Goldstein, Xanthi, Greece, 28 June–2 July, 2015. — P. 7–8.

137. *Mackerle, J.* Finite element analysis and simulation of adhesive bonding, soldering and brazing – an addendum a bibliography (1996–2002) / J. Mackerle // *Model. Simul. Mater. Sc.* — 2002. — Vol. 10, No. 6 — P. 637–671.
138. *Mays, G. C.* Adhesives in civil engineering / G. C. Mays, A. R. Hutchinson. — Cambridge University Press, 1992. — 348 p.
139. *Muki, R.* The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids / R. Muki, E. Sternberg // *Z. Angew. Math. Phys.* — 1965. — Vol. 16, No. 5. — P. 611–648.
140. *Munz, D.* Stress singularities at the interface in bonded dissimilar materials under mechanical and thermal loading / D. Munz, Y. Y. Yang. // *J. Appl. Mech.* — 1992. — Vol. 59, No. 4. — P. 857–861.
141. *Murakawa, H.* Shape optimization for reducing stress at ceramics/metal joints / H. Murakawa, Y. Ueda // *Trans. JWRI.* — 1989. — Vol. 18, No. 2. — P. 133–140.
142. *Murakawa, H.* Effect of singularity in stress field on optimum shape of ceramics/metal joint / H. Murakawa, Y. Ueda // *Trans. JWRI.* — 1991. — Vol. 20, No. 1. — P. 109–116.
143. *Pagano, N. J.* Load-induced stress singularities in the bending of Cosserat plates / N. J. Pagano, G. C. Sih // *Meccanica.* — 1968. — Vol. 3, No. 3 — P. 34–42.
144. *Pageau, S. S.* Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials / S. S. Pageau, S. B. Jr. Biggers // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — Vol. 38, No. 13. — P. 2225–2239.
145. *Pageau, S. S.* Finite element analysis of anisotropic materials with singular inplane stress fields / S. S. Pageau, P. F. Joseph, S. B. Biggers // *Int. J. Solids. Struct.* — 1995. — Vol. 32, No. 5 — P. 571–591.
146. *Paggi, M.* On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion / M. Paggi, A. Carpinteri // *Appl. Mech. Rev.* — 2008. — Vol. 61, No. 2. — P. 020801-1–22.
147. *Pahoja, M.H.* Stress analysis of an adhesive lap joint subjected to tension, shear force and bending moments / M.H. Pahoja. — Urbana-Champaign: University of

- Illinois, August 1972. — T.&A.M. Report No. 361. — Режим доступа: <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/753469.pdf> (дата обращения: 24.02.2016).
148. *Pan, K. L.* Nonlocal stress field of interface dislocations / K. L. Pan, N. Takeda // Arch. Appl. Mech. — 1998. — Vol. 68, No. 3. — P. 179–184.
149. *Parihar, K.S.* Singularity at the vertex of pyramidal notches with three equal angles / K.S. Parihar, L.M. Keer // Q. J. Mech. Appl. Math. — 1977. — Vol. 35, No. 2. — P. 401–405.
150. *Parihar, K.S.* The singularity at the corner of a wedge-shaped crack or inclusion / K.S. Parihar, L.M. Keer // J. Appl. Mech. — 1978. — Vol. 45, No. 4. — P. 791–796.
151. *Pedersen, P.* Design for minimum stress concentration by finite elements and linear programming / P. Pedersen // J. Struct. Mech. — 1983. — Vol. 10, No. 4. — P. 375–391.
152. *Prassianakis, J.N.* Stress intensity factors of V-notched elastic, symmetrically loaded, plates by method of caustics / J. N. Prassianakis, P. S. Theocaris // J. Phys. D: Appl. Phys. — 1980. — Vol. 13, No. 4. — P. 1043–1053.
153. *Picu, C. R.* Stress singularities at vertices of conical inclusions with freely sliding interfaces / C. R. Picu // Int. J. Solids. Struct. — 1996. — Vol. 33, No. 17. — P. 2453–2457.
154. *Ping, X.-Ch.* Singular stress analyses of V-notched anisotropic plates based on a novel finite element method / X.-Ch. Ping, M.-Ch. Chen, J.-L. Xie // Eng. Fract. Mech. — 2008. — Vol. 75, No. 13. — P. 3819–3838.
155. *Rise, J. R.* Plane problems of cracks in dissimilar media / J. R. Rise, G. C. Sih // J. Appl. Mech. — 1965. — Vol. 32, No. 2. — P. 418–423.
156. *Rosakis, A. J.* On the application of the optical method of caustics to the investigation of transient elastodynamic crack problems: limitations of the classical interpretation / A. J. Rosakis, S. Krishnaswamy, H. V. Tippur // Optic. Laser. Eng. — 1990. — Vol. 13, No. 3–4. — P. 183–210.

157. *Rosakis, A. J.* Caustics by reflection and their application to elastic-plastic and dynamic fracture mechanics / A. J. Rosakis, A. T. Zehnder, R. Narasimhan // *Opt. Eng.* — 1988. — Vol. 27, No. 8. — P. 596–610.
158. *Rubio-Gonzalez, C.* Experimental investigation of dynamic punch tests on isotropic materials and fiber reinforced composites / C. Rubio-Gonzalez, J. J. Mason // *Exp. Mech.* — 2001. — Vol. 41, No. 2. — P. 129–139.
159. *Qian, Z. Q.* On the evaluation of wedge corner stress intensity factors of bi-material joints with surface tractions / Z. Q. Qian // *Comput. Struct.* — 2001. — Vol. 79, No. 1. — P. 53–64.
160. *Saigal, S.* Conforming boundary elements in plate elasticity for shape design sensitivity / S. Saigal, R. Aithal, J. H. Kane // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* — 1989. — Vol. 28, No. 12. — P. 2795–2811.
161. *Sator, C.* Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial junctions / C. Sator, W. Becker // *Arch. Appl. Mech.* — 2012. — Vol. 82, No. 5. — P. 643–658.
162. *Sevodina, N. V.* Optimization of the edge surface of adhesive joints / N. V. Sevodina, A. Yu. Fedorov // *Book of abstracts of XL Summer School–Conference «Advanced Problems in Mechanics»*, July 2–8, 2012. — St. Petersburg, 2012. — P. 78–79.
163. *Sevodina, N. V.* Singular solutions at singular points of composite wedges for different types of boundary and contact conditions / N. V. Sevodina, A. Yu. Fedorov // *Advanced Problems in Mechanics: book of abstracts of International Summer School–Conference*, 1–6 of July 2013. — Spb.: Polyechnical University Publishing House, 2013. — P. 98–99.
164. *Sinclair, G. B.* On the singular eigenfunctions for plane harmonic problems in composite regions / G. B. Sinclair // *J. Appl. Mech.* — 1980. — Vol. 47, No. 1. — P. 87–92.
165. *Sinclair, G. B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis / G. B. Sinclair // *Appl. Mech. Rev.* — 2004. — Vol. 57, No. 4. — P. 251–297.

166. *Sinclair, G. B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification / G. B. Sinclair // *Appl. Mech. Rev.* — 2004. — Vol. 57, No. 5. — P. 385–439.
167. *Shyy, Y. K.* Shape optimal design using high-order elements / Y. K. Shyy, C. Fleury // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 1988. — Vol. 71, No. 1. — P. 99–116.
168. *Sanford, R. J.* A general method for determining mixed-mode stress intensity factors from isochromatic fringe patterns / R. J. Sanford, J. W. Dally // *Eng. Fract. Mech.* — 1979. — Vol. 11, No. 4. — P. 621–633.
169. *Singh, R. P.* Investigation of the mechanics of intersonic crack propagation along a bimaterial interface using coherent gradient sensing and photoelasticity / R.P. Singh, J. Lambros, A. Shukla, A. J. Rosakis // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1997. — Vol. 453, No. 1967. — P. 2649–2667.
170. *Speth, D. R.* Qualification of adhesives for marine composite-to-steel applications / D. R. Speth, Y. Yang, G. W. Ritter // *Int. J. Adhes. Adhes.* — 2010. — Vol. 30, No. 2. — P. 55–62.
171. *Tan, M. A.* Analysis of bimaterial wedges using a new singular finite element / M. A. Tan, S. A. Meguid // *Int. J. Fract.* — 1997. — Vol. 88, No. 4. — P. 373–391.
172. *Tsai, M. Y.* The effect of a spew fillet on adhesive stress distributions in laminated composite single-lap joints / M. Y. Tsai, J. Morton // *Compos. Struct.* — 1995. — Vol. 32, No. 1–4. — P. 123–131.
173. *Theocaris, P. S.* Stress singularities at concentrated loads / P. S. Theocaris // *J. Exp. Mech.* — 1973. — Vol. 13, No. 12. — P. 511–518.
174. *Theocaris, P. S.* The reflected caustics method for the evaluation of mode III stress intensity factor / P. S. Theocaris // *Int. J. Mech. Sci.* — 1981. — Vol. 23, No. 2. — P. 105–117.
175. *Ting, T. C. T.* The remarkable nature of cylindrically anisotropic elastic materials exemplified by an anti-plane deformation / T. C. T. Ting // *J. Elasticity.* — 1998. — Vol. 49, No. 3. — P. 269–284.

176. *Tippur, H. V.* Coherent gradient sensing (CGS) method for fracture mechanics: a review / H. V. Tippur // *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.* — 2010. — Vol. 33, No. 12. — P. 832–858.
177. *Tippur, H. V.* Interfacial crack initiation under quasi-static and dynamic loading conditions: an experimental study / H. V. Tippur, L. Xu // *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.* — 1997. — Vol. 20, No. 1. — P. 49–60.
178. *Tippur, H. V.* Optical mapping of crack tip deformations using the methods of transmission and reflection coherent gradient sensing: a study of crack tip K-dominance / H. V. Tippur, S. Krishnaswamy, A. J. Rosakis // *Int. J. Fract.* — 1991. — Vol. 52, No. 2. — P. 91–117.
179. *Tippur, H. V.* Quasi-static and dynamic crack growth along bimaterial interfaces: a note on crack-tip field measurements using coherent gradient sensing / H. V. Tippur, A. J. Rosakis // *Exp. Mech.* — 1991. — Vol. 31, No. 3. — P. 243–251.
180. *Volkersen, O.* Die Niekraftverteilung in Zugbeanspruchten mit konstanten Laschenquerschnitten / O. Volkersen // *Luftfahrtforschung.* — 1938. — Vol. 15. — P. 41–47.
181. *Williams, M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension / M. L. Williams // *J. Appl. Mech.* — 1952. — Vol. 19, No. 3. — P. 526–528.
182. *Williams, M. L.* The stress around a fault or crack in dissimilar media / M. L. Williams // *B. Seismol. Soc. Am.* — 1959. — Vol. 49, No. 2. — P. 199–204.
183. *Xu, C.* Shape optimization of structures to minimize stress concentration / C. Xu, M. Yu // *Comput. Struct.* — 1990. — Vol. 36, No. 3. — P. 491–497.
184. *Xu, L. R.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design / L. R. Xu, H. Kuai, S. Sengupta // *Exp. Mech.* — 2004. — Vol. 44, No. 6. — P. 608–615.
185. *Xu, L. R.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis / L. R. Xu, S. Sengupta // *Exp. Mech.* — 2004. — Vol. 44, No. 6. — P. 616–621.

186. *Xu, L.* Measurement of contact stresses using real-time shearing interferometry / L. Xu, H. V. Tippur, C.-E. Rousseau // *Opt. Eng.* — 1999. — Vol. 38, No. 11. — P. 1932–1937.
187. *Yamazaki, K.* Design sensitivity analysis of three-dimensional body by boundary element method and its application to shape optimization / K. Yamazaki, J. Skamoto, M. Kitano // *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.* — 1993. — Vol. 59, No. 558. — P. 400–406.
188. *Yang, Y. Y.* Stress analysis in a joint with a functionally graded material under a thermal loading by using the Mellin transform method / Y. Y. Yang // *Int. J. Solids. Struct.* — 1998. — Vol. 35, No. 12. — P. 1261–1287.
189. *Yang, R. J.* Component shape optimization using BEM / R. J. Yang // *Comput. Struct.* — 1990. — Vol. 37, No. 4. — P. 561–568.
190. *Yao, X. F.* Fracture investigation at V-notch tip using coherent gradient sensing (CGS) / X. F. Yao, H. Y. Yeh, W. Xu // *Int. J. Solid. Struct.* — 2006. — Vol. 43, No. 5. — P. 1189–1200.
191. *Yavari, A.* On fractal cracks in micropolar elastic solids / A. Yavari, S. Sarkani, E. T. Moyer // *J. Appl. Mech.* — 2002. — Vol. 69. — P. 45–54.
192. *Yong-li, W.* Crack tip stress singularities in bimaterial with an inclined interface / W. Yong-li // *Int. J. Fracture.* — 1992. — Vol. 54, No. 4. — P. R65-R72.
193. *Zhao, X.* Single lap joints with rounded adherend corners: stress and strain analysis / X. Zhao, R. D. Adams, L. F. M. da Silva // *J. Adhes. Sci. Technol.* — 2011. — Vol. 25, No. 8. — P. 819–836.
194. *Zhigang, S.* Singularities interacting with interfaces and cracks / S. Zhigang // *Int. J. Solids. Struct.* — 1989. — Vol. 25, No. 10 — P. 1133–1142.